Die Beweise der ebenen Geometrie ohne Benutzung der Gleichheit und Ungleichheit der Winkel.

Von

J. MÖLLERUP in Kopenhagen.

In meiner Dissertation: *Studier over den plane Geometris Aksiomer*, Köbenhavn 1903, habe ich ein System von Kongruenzaxiomen aufgestellt, in welchem die Kongruenz der Winkel nicht benutzt wird. Diese Axiome sind erstens die drei Hilbertschen III, 1, 2, 3 (Grundlagen der Geometrie); hierauf setze ich folgende *Definition* fest:

Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind kongruent, wenn

$$AB \equiv A_1B_1, \quad AC \equiv A_1C_1, \quad BC \equiv B_1C_1.$$

Die drei Hilbertschen Axiome III, 4, 5, 6 werden nun durch die folgenden zwei ersetzt:

4. Es sei ein Dreieck ABC und eine Strecke $A_1C_1 \equiv AC$ gegeben; dann gibt es zwei und nur zwei Punkte B_1 und B_1' , so daß

$$\triangle A_1B_1C_1 \equiv \triangle ABC \quad \text{und} \quad \triangle A_1B_1'C_1 \equiv \triangle ABC.$$

5. (Ax. V, Veroneses in „Grundzüge der Geometrie“, übersetzt von A. Schepp).

Es sei $\triangle ABC \equiv \triangle A_1B_1C_1$; man trägt die paarweise kongruenten Strecken AD und A_1D_1 auf AB und A_1B_1 (oder A_1C_1) und AE und A_1E_1 auf AC und A_1C_1 (oder A_1B_1) ab; dann ist immer $DE \equiv D_1E_1$.

Ich werde nun zeigen, wie man mit Hilfe der Axiome: I, 1, 2, 3, II, 1, 2, 3, 4 (Grundlagen der Geometrie), der eben genannten fünf Kongruenzaxiome und endlich des Parallelenaxioms die ebene Geometrie *ohne Winkelkongruenz zu benutzen*, aufbauen kann. Vorläufig wird das Parallelenaxiom nicht vorausgesetzt.

Mit Zuhilfenahme der Axiome I, 1, 2 und II, 1, 2, 3, 4 leuchtet unmittelbar folgender Hilfssatz ein:

Die Ebene wird von jedem Dreiecke in acht Gebiete zerteilt: die Punkte der Seiten, das Innere, drei äußere Seitengebiete und drei äußere Winkelgebiete.

Nunmehr beweisen wir der Reihe nach folgende Sätze:

Satz 1. Die zwei Punkte B_1 und B_1' des Axioms 4 liegen auf verschiedenen Seiten von A_1C_1 .

Es seien $A_1B_1C_1$ und $A_1B_1'C_1$ zwei Dreiecke auf ein und derselben Seite von A_1C_1 und seien sie beide mit $\triangle ABC$ kongruent; nehmen wir weiter an, daß B_1' in dem äußeren Seitengebiete des A_1B_1 liegt (Fig. 1),

Fig. 1.

Fig. 1a.

so daß $C_1B_1' A_1B_1$ in E schneidet. Tragen wir nun $C_1F \equiv C_1E$ auf C_1B_1 ab, dann ist $\triangle A_1EC_1 \equiv \triangle A_1FC_1$ (Ax. 5); also ist

$$A_1F \equiv A_1E < A_1B_1.$$

Wird nun A_1F nach G verlängert, so daß $A_1G \equiv A_1B_1$, dann ist $\triangle A_1GC_1 \equiv \triangle A_1B_1C_1$, was mit Axiom 4 in Widerspruch steht.

Derselbe Beweis gilt, wenn B_1' ins Innere des Dreiecks $A_1B_1C_1$ fällt; es ist also bewiesen, daß zwei Dreiecke nicht kongruent sein können, wenn sie eine Seite gemein haben und eine Ecke des einen Dreiecks ins Innere des anderen fällt. B_1' liegt dann nicht in dem äußeren Winkelgebiete von B_1 . Wenn B_1' im äußeren Seitengebiete von BC liegt, dann schneidet $A_1B_1' B_1C_1$, und der Beweis bleibt wie früher. Andere Gebiete als die eben betrachteten gibt es auf derselben Seite von A_1C_1 als B_1 nicht.

Satz 2. In einem Dreiecke ist eine Seite der Summe der zwei andern nicht gleich.

Sei das Dreieck ABC und sei D ein Punkt der Seite AC , so daß $AB \equiv AD$ und $CB \equiv CD$. Auf BD trägt man die Punkte P und Q ab, so daß $BP \equiv DQ$; wenn nun $\triangle ABD \equiv \triangle ADB$, so ist nach Axiom 5 $AP \equiv AQ$; ebenso ist $CP \equiv CQ$. Es wäre dann $\triangle APC \equiv \triangle AQC$, was unmöglich ist (1).

Satz 3. Eine Strecke hat immer eine Mitte.

Fig. 2.

(Fig. 2). Sei die Strecke BD , und seien A und C zwei Punkte auf verschiedenen Seiten der Geraden BD , so daß $\triangle CBD \equiv \triangle ADB$ (Ax. 4). AC schneidet BD im Punkte Q . Es sei nun $BQ < DQ$; man trägt $DP \equiv BQ$ auf DQ ab. Aus $DP \equiv BQ$ und $PQ \equiv QP$ entnehmen wir $DQ \equiv BP$

(Axiom III, 3). Wenn $\triangle ABD \equiv \triangle CDB$, $DC \equiv BA$ und $DP \equiv BQ$, so ist $AQ \equiv CP$ (Ax. 5); ebenso ist $AP \equiv CQ$. Wenn man diese Gleichungen addiert, bekommt man (Ax. III, 3), $AC \equiv AP + CP$, was unmöglich ist (2). Also ist Q die Mitte von BD .

Definition. Es sei $\triangle ABC$ gegeben, auf der Verlängerung von AC wird ein Punkt A_1 bestimmt, so daß $CA_1 \equiv AC$; $\triangle A_1BC$ wird dann *Nebendreieck* des Dreiecks ABC genannt. Wenn die zwei Dreiecke kongruent ausfallen, wird das gegebene Dreieck *rechtwinklig bei C* genannt; AB ist die *Hypotenuse*, AC und BC sind die *Katheten*.

Satz 4. Wenn zwei Dreiecke kongruent sind, dann fallen ihre entsprechenden Nebendreiecke auch kongruent aus.

Die kongruenten Dreiecke seien ABC und $A_1B_1C_1$, ihre entsprechenden Nebendreiecke ABD und $A_1B_1D_1$. Aus $AC \equiv A_1C_1$ und $DA = D_1A_1$ entnehmen wir bei Addition $DC \equiv D_1C_1$; hieraus folgt aber $BD = B_1D_1$ (Ax. 5), und die Dreiecke ABD und $A_1B_1D_1$ sind dann kongruent.

Folgerung. Ein Dreieck, welches einem rechtwinkligen Dreiecke kongruent ausfällt, ist selbst rechtwinklig.

Satz 5. Es gibt rechtwinklige Dreiecke.

Denn verbinden wir die Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks mit der Mitte der Grundlinie, so wird das Dreieck in zwei kongruente Nebendreiecke zerlegt.

Die Sätze:

Wenn $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C ist, dann ist auch $\triangle AB_1C$ rechtwinklig bei C , wenn B_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CB ist, und wenn $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C ist, dann ist auch $\triangle A_1BC$ rechtwinklig bei C , wenn A_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CA ist, werden unmittelbar durch Ax. 5 bewiesen.

Hieraus folgt:

Satz 6. Wenn $\triangle ABC$ rechtwinklig bei C ist, dann ist auch $\triangle A_1B_1C$ rechtwinklig bei C , wenn A_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CA und B_1 ein beliebiger Punkt der Halbgeraden CB ist.

Satz 7. Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn die Katheten einander paarweise kongruent sind.

Seien die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$, die rechtwinklig bei C und C_1 sind, $AC \equiv A_1C_1$, $BC \equiv B_1C_1$. Sei E ein Punkt auf derselben Seite von AC als B , so daß $\triangle ACE \equiv \triangle A_1C_1B_1$; sei weiter $A'CB$ das Nebendreieck von ACB bei BC . Die Gerade CE wird AB oder $A'B$, zum Beispiel AB in F schneiden; wird nun $BG \equiv BF$ auf BA' abgetragen,

Fig. 3.

so ist $AF \equiv A'G$ (Ax. III, 3) und deshalb $\triangle ACF \equiv \triangle A'CG$ (Ax. 5). Es ist aber auch $\triangle ACF \equiv \triangle A'CF$ (6), also $\triangle A'CG \equiv \triangle A'CF$, was unmöglich ist (1). Der Punkt E fällt also mit B zusammen.

Folgerung. Satz 6 gilt nun auch, wenn A_1 und B_1 beliebige Punkte der Geraden CA und CB sind.

Die vorstehenden Sätze erlauben die folgende

Definition. Die Gerade l ist senkrecht auf die sie im Punkte A schneidende Gerade m , wenn die Strecken DC und DB von einem beliebigen Punkte D in l zu den Punkten C und B in m , die auf verschiedenen Seiten und in gleichem Abstände von A liegen, gleich sind.

Satz 8. Wenn l senkrecht auf m ist, dann ist auch m senkrecht auf l (7, Folgerung).

Satz 9a. In einem gegebenen Punkte einer Geraden gibt es nur eine senkrechte Gerade.

Seien AD und BD zwei Lote (Senkrechte) auf EC im Punkte D ; $DE \equiv DC$; $DA \equiv DB$. Es ist dann $EA \equiv CA$ und $EB \equiv CB$, aber auch $EA \equiv EB$ (7). Es sollte dann $\triangle AEC \equiv \triangle BEC$ sein, was mit dem Satze 1 in Widerspruch steht.

Satz 9b. Von einem gegebenen Punkte außerhalb einer Geraden gibt es nur ein Lot auf die Gerade.

Der Beweis wird ganz einfach aus 9a hergeleitet.

Nun wird auch das Axiom der Parallelen (IV, Grundlagen der Geometrie) vorausgesetzt.

Definition. Ein Viereck, worin je zwei gegenüberstehende Seiten einander parallel sind, wird *Parallelogramm* genannt.

Satz 10. Jedes Viereck, worin je zwei gegenüberstehende Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Sei das Viereck $ABCD$ (Fig. 4),

$$AB \equiv DC, \quad AD \equiv BC;$$

mögen weiter die Verlängerungen von AD und BC einander im Punkte E schneiden; sei DA bis zum Punkte F verlängert, so daß

$$DF \equiv BE.$$

Wenn

$\triangle ABC \equiv \triangle CDA$, $BA \equiv DC$, $BE \equiv DF$,
dann ist

$$AE \equiv CF \text{ (Ax. 5);}$$

wenn

$\triangle DBC \equiv \triangle BDA$, $BD \equiv DB$, $BE \equiv DF$,
dann ist

$$DE \equiv BF \text{ (Ax. 5).}$$

Fig. 4.

Wenn man nun subtrahiert, bekommt man

$$AD \equiv CF - BF$$

oder

$$BC + BF \equiv CF,$$

was unmöglich ist (2).

Also sind je zwei Gegenseiten einander parallel.

Satz 11. In jedem Viereck, in welchem je zwei Gegenseiten einander gleich sind, halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig (3).

Satz 12. Jedes Viereck, in welchem sich die Diagonalen gegenseitig halbieren, ist ein Parallelogramm.

Das Viereck sei $ABCD$, die Diagonalen schneiden sich im Punkte O ; die Dreiecke OBC und ODA sind beide Nebendreiecke des Dreiecks OCB , aber an verschiedenen Seiten. Wir werden beweisen, daß sie kongruent sind (Erweiterung des Satzes 4). Auf OC wird D' und auf OD C' abgetragen, so daß

$$OD' \equiv OD \quad \text{und} \quad OC' \equiv OC;$$

$OB'D'$ ist Nebendreieck des Dreiecks $OC'D'$.

Es ist nun: $\triangle OC'D' \equiv \triangle OCD$ (Axiom 5);

$\triangle OB'D' \equiv \triangle OBC$ (Ax. 5); $\triangle OB'D' \equiv \triangle OAD$ (4); also ist $B'D' \equiv BC \equiv AD$ und $\triangle OAD \equiv \triangle OBC$. Ebenso ist $AB \equiv DC$, und also ist das Viereck ein Parallelogramm (10).

Fig. 5.

Satz 13. In jedem Parallelogramme halbieren sich die beiden Diagonalen gegenseitig.

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich im Punkte O schneiden; sei M die Mitte von BD und sei AM bis E verlängert, so daß $AM \equiv ME$. DE ist dann mit AB parallel (12), und E fällt also in die Gerade DC (Ax. III). Ebenso ist dann BE mit AD parallel, was mit demselben Axiom in Widerspruch steht.

Satz 14. In jedem Parallelogramme sind je zwei gegenüberstehende Seiten einander gleich (13, 12).

Satz 15. Verbindet man die Mitten der zwei Seiten eines Dreiecks durch eine Strecke, so ist diese der dritten Seite parallel und der Hälfte derselben gleich.

Wird ohne Schwierigkeit mittels der vorherstehenden Sätze bewiesen.

Satz 16. Eine Gerade, die auf einer von zwei parallelen Geraden senkrecht ist, ist auch auf der anderen senkrecht.

Seien die parallelen Geraden BC und AD und sei weiter BA auf BC senkrecht; BA wird bis P verlängert, so daß $PA \equiv AB$. PC schneidet AD im Punkte D ; $\triangle PBC_1$ ist Nebendreieck des Dreiecks PBC ;

PC_1 schneidet AD im Punkte D_1 . Es ist nun $AD \equiv \frac{1}{2}BC$ (15); $BC \equiv BC_1$; $AD_1 \equiv \frac{1}{2}BC_1$ (15); also ist $AD \equiv AD_1$. Weiter ist: $PD \equiv \frac{1}{2}PC$; $PD_1 \equiv \frac{1}{2}PC_1$; $PC \equiv PC_1$, also ist $PD \equiv PD_1$. Dann ist aber PB auf AD senkrecht.

Folgerung. Zwei Geraden, die je auf ihrer von zwei parallelen Geraden senkrecht sind, sind parallel.

Hieraus entnehmen wir ohne Schwierigkeit

Satz 17. Die drei Perpendikel, die man in den Halbierungspunkten der Seiten eines Dreiecks errichten kann, schneiden sich in einem Punkte.

Satz 18. Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte.

Wird wie gewöhnlich aus dem Satze 17 ermittelt.

Definition. Sei (a, b) ein Winkelraum von den Halbgeraden a und b gebildet; sei a_1 die entgegengesetzte Halbgerade zu a ; der gemeinsame Scheitel der drei Halbgeraden sei O . d ist eine Halbgerade senkrecht auf a im Punkte O ; b und d liegen auf ein und derselben Seite von a . Fällt nun d in den Winkelraum (a_1, b) , so wird dieser stumpf genannt, während der Winkelraum (ab) ein spitzer ist.

Satz 19. In einem gleichschenkeligen Dreiecke sind die Winkelräume an der Grundlinie spitz.

Sei das Dreieck ABC mit dem Scheitel A ; nehmen wir an, daß CC_1 die Senkrechte auf BC im Punkte C ist und daß sie die Strecke AB im Punkte C_1 schneidet; auf CA wird $CB_1 \equiv BC_1$ abgetragen. BB_1 und CC_1 schneiden sich im Punkte O . Nach Ax. 5 sind die Dreiecke CBB_1 und BCC_1 einander kongruent, also ist das Dreieck CBB_1 rechtwinklig bei B (4, Folgerung). Dieses ist aber unmöglich (9b).

Satz 20. Wenn der Winkelraum (ab) spitz (oder stumpf) ist, dann ist der Winkelraum (ba) ebenso spitz (oder stumpf).

Fig. 6.

Seien a und a_1 zwei entgegengesetzte Halbgeraden und O der gemeinsame Endpunkt der drei Halbgeraden a , a_1 und b ; sei weiter d die Senkrechte auf a im Punkte O . Sie fällt in den Winkelraum (ab) , der also ein stumpfer ist. Es werden die kongruenten Strecken Oa_1 und Ob auf a_1 und b abgetragen; die Senkrechte d_1 auf Oa_1 im Punkte a_1 fällt außerhalb des Dreiecks Oa_1b (19) und ist mit d parallel (16). Die Verlängerung von a_1b schneidet dann d . Eine Höhe des Dreiecks Oa_1b verbindet O mit der Mitte von a_1b ; sie fällt also ins Innere des Dreiecks; die Höhe von b ist mit d und d_1 parallel, fällt also auch ins Innere des Dreiecks. Diese zwei Höhen schneiden sich

Höhe des Dreiecks Oa_1b verbindet O mit der Mitte von a_1b ; sie fällt also ins Innere des Dreiecks; die Höhe von b ist mit d und d_1 parallel, fällt also auch ins Innere des Dreiecks. Diese zwei Höhen schneiden sich

dann in einem Punkte P im Innern des Dreiecks. a_1P ist nun die dritte Höhe (18); sie schneidet Ob in einem Punkte, die Senkrechte auf Ob im Punkte O ist mit dieser Höhe parallel und fällt also in den Winkelraum ad . Der Satz ist nun in einer erweiterten Fassung bewiesen.

Satz 21. Unter allen Strecken, die man nach einer gegebenen Geraden von einem außerhalb derselben liegenden Punkte ziehen kann, ist die senkrechte die kürzeste.

Die Gerade sei NM , der Punkt P ; wir nehmen an, daß die senkrechte PM größer als PN ist und tragen $PQ \equiv PN$ auf PM ab; PO ist mit NM parallel und also auf PM senkrecht. PM' ist die Verlängerung von MP . Im Winkelraum OM' gibt es eine Parallele zu NQ ; denn jede Gerade durch P im Winkelraume OM schneidet NQ . Der Winkelraum MPR ist stumpf, denn er enthält PO ; die Senkrechte auf PR im Punkte P fällt dann in den Winkelraum OPM (20). Dieses ist aber unmöglich, denn die Gerade, die P mit der Mitte von NQ verbindet, ist auf NQ und deshalb auch auf PR senkrecht. Also ist PM nicht größer als PN .

Fig. 7.

PM ist auch nicht gleich PN ; denn alsdann könnte man noch eine Senkrechte von P nach der Geraden NM ziehen, nämlich nach der Mitte der Strecke NM .

Dieser Beweis findet sich in: *Elementi di Geometria* von Veronese (Parte I, pag. 51); er stützt sich aber dort auf die Vorstellung von gleichen und ungleichen Winkeln, welche hier nicht zu Hilfe genommen ist.

Satz 22. In jedem Dreiecke ist die Summe zweier Seiten größer als die dritte Seite.

Sei BC die größte Seite des Dreiecks ABC ; auf BC wird $BD' \equiv BA$ abgetragen. Die Senkrechte auf BC im Punkte D wird die Strecke AC im Punkte E schneiden (19). Es ist nun $CD < CE < CA$ (21).

Folgerung. Wir können nun ohne Schwierigkeit die gewöhnlichen Sätze über die Gleichheit und Ungleichheit von den Strecken, die einen Punkt und eine Gerade verbinden, herleiten.

Die Lehre von den Proportionen.

Wie in meiner Abhandlung: *Die Lehre von den geometrischen Proportionen* (diese Annalen Bd. 56, pag. 277) stellen wir die folgende *Definition* auf:

Auf dem einen Schenkel eines rechten Winkels O (ich erlaube mir diese Ausdrucksweise zu benutzen) werden die Punkte A und B , auf dem anderen C und D abgetragen; AC ist parallel zu BD . Diese Lage der vier Strecken OA , OB , OC und OD wird durch die Gleichung

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$$

ausgedrückt. Die Gleichung wird eine Proportion genannt. Man kann auch schreiben

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OD}{OC}$$

oder

$$\frac{OC}{OD} = \frac{OA}{OB} \quad (\text{Ax. 5}).$$

Es ist einleuchtend, daß drei von den Gliedern der Proportionen das vierte eindeutig bestimmen.

Satz 23. Wenn DE eine Transversale parallel zu der Kathete OC im rechtwinkligen Dreiecke OAC (rechtwinklig bei O) ist, dann ist

$$\frac{AD}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Sei EF auf OC im Punkte F senkrecht, FG zu CA parallel, und sei G der Schnittpunkt der Geraden FG und OA . Es ist dann $OG \equiv DA$; denn trägt man $OH \equiv DA$ auf OA ab, dann ist $\triangle OHF \equiv \triangle DAE$ (7); es ist dann auch $FH \equiv EA \equiv FG$ (14). Also fällt H in den Punkt G (22, Folgerung). Nach der Definition ist nun

$$\frac{OG}{OA} = \frac{OF}{OC}$$

oder

$$\frac{AD}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Satz 24. Wenn das Dreieck AOC rechtwinklig bei O , und DE eine Transversale zwischen AO und AC ist, die senkrecht auf die letztere gezogen ist, dann ist

$$\frac{AE}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Tragen wir $AF \equiv AE$ auf AO und $AG \equiv AD$ auf AC ab, dann sind die Dreiecke AFG und AED einander kongruent; mithin ist FG auf OA senkrecht (4, Folgerung). Es ist nun

$$\frac{AF}{AO} = \frac{FG}{OC} \quad (23)$$

oder

$$\frac{AE}{AO} = \frac{DE}{OC}.$$

Satz 25. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{f},$$

dann ist auch

$$\frac{b}{e} = \frac{d}{f} \quad (\text{Ax. III}).$$

Satz 26. (Das kommutative Gesetz.) Wenn die Proportion

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

gilt, hat man auch

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

Sei $B\beta$ auf AC im Punkte β senkrecht, $\beta A \equiv a$, $\beta B \equiv b$; auf βB wird $\beta O \equiv c$ abgetragen. Es ist nun ein Dreieck ABC bestimmt, worin O der Höhenschnittpunkt ist; die Höhen sind $A\alpha$, $B\beta$, $C\gamma$. In den rechtwinkligen Dreiecken $A\beta O$ und $B\alpha O$ sind die Katheten proportional. Zum Beweise tragen wir $OB' \equiv OB$ auf $O\alpha$ und $O\alpha' \equiv O\alpha$ auf OB ab; es sind dann die Dreiecke $OB'\alpha'$ und $OB\alpha$ einander kongruent (Ax. 5); $B'\alpha'$ ist deshalb auf βB im Punkte α' senkrecht und also auch mit AC parallel. Wir beweisen nun ohne Schwierigkeit, daß

Fig. 8.

$$\frac{O\alpha'}{O\beta} = \frac{B'\alpha'}{A\beta} \quad (12, 14)$$

oder

$$\frac{O\alpha}{O\beta} = \frac{B\alpha}{A\beta}.$$

Weiter ist

$$\frac{O\alpha}{C\beta} = \frac{B\alpha}{B\beta} \quad (24).$$

Aus diesen zwei Proportionen entnehmen wir

$$\frac{B\beta}{A\beta} = \frac{O\beta}{O\alpha};$$

diese Proportion zeigt, daß die Katheten der Dreiecke $B\beta C$ und $A\beta O$

proportional sind, und auch, daß $C\beta$ gleich d ist. Ebenso sind die Katheten der Dreiecke $B\beta A$ und $C\beta O$ proportional und also

$$\frac{B\beta}{C\beta} = \frac{A\beta}{O\beta}$$

oder

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c},$$

was zu beweisen war.

Satz 27. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$\frac{a}{b} = \frac{e}{f},$$

dann ist

$$\frac{c}{d} = \frac{e}{f}.$$

Satz 28. (Das distributive Gesetz.) Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}.$$

Satz 29. Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

dann ist

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}.$$

Die Sätze 27, 28 und 29 sind in der oben zitierten Abhandlung bewiesen.

Definition. Sei A der Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks ABC ; P ist ein beliebiger Punkt in der Höhe von A oder ihrer Verlängerung, PQ und PR sind die Lote von P aus auf die Schenkel AB und AC . Es ist dann $PR \equiv PQ$; denn trägt man auf die Gerade AC AR_1 gleich AQ ab, dann sind die Dreiecke APR_1 und APQ einander kongruent (Ax. 5) und deshalb PR_1 auf AC senkrecht. Es fällt dann R_1 in den Punkt R (9b), und also ist $PQ \equiv PR$. AP wird die Winkelhalbierende der Halbgeraden AB und AC genannt, und es leuchtet ein, daß zwei Halbgeraden nur eine Winkelhalbierende haben.

Folgerung. Die Seiten eines Dreiecks bestimmen drei Winkelhalbierende, die sich in einem Punkte O schneiden, der von allen drei Seiten denselben Abstand hat. Ist das Dreieck ABC und sind die Abstände von BC , CA und AB $O\alpha$, $O\beta$ und $O\gamma$, dann ist $C\alpha \equiv C\beta$, $A\beta \equiv A\gamma$, $B\gamma \equiv B\alpha$.

Definition. Die Dreiecke AB_1C_1 und ABC sind in Bezug auf A in ähnlicher Lage, wenn B_1 auf der Geraden AB und C_1 auf AC liegt und B_1C_1 parallel zu BC ist.

Hilfssatz. Wenn zwei Dreiecke in ähnlicher Lage sind, dann sind die entsprechenden Winkelhalbierenden parallel.

Seien die Dreiecke ABC und AB_1C_1 ; die Winkelhalbierende der Geraden AB und AC schneidet B_1C_1 und BC in den Punkten D und E . Die Strecke DF parallel zu AB schneidet BC im Punkte F , die Strecke FG parallel zu AD schneidet

AB im Punkte G ; es sind dann die Dreiecke AB_1D und GBF einander kongruent. B_1H ist die Winkelhalbierende der Halbgeraden B_1A und B_1C_1 , die AD im Punkte H schneidet, der in gleichen Abständen HJ und HK von AB_1 und B_1C_1 entfernt ist. Die Strecke HI parallel zu AB schneidet FG

Fig. 9.

im Punkte I , und es sind die Dreiecke BIG und B_1HA , ebenso die Dreiecke BIF und B_1HD einander kongruent. Auf BA wird $BM \equiv B_1J$ abgetragen, und es sind nach Ax. 5 die Dreiecke BIM und B_1HJ einander kongruent; IM ist also auf AB senkrecht und HJ kongruent. Ebenso wird IL senkrecht auf BC und mit HK kongruent bestimmt. Also ist $IM \equiv IL$, BI ist die Winkelhalbierende der Halbgeraden BA und BC und mit B_1H parallel.

Definition. Die Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ sind ähnlich, wenn es ein Dreieck $AB'C'$ gibt, welches in ähnlicher Lage mit dem Dreiecke ABC und dem Dreiecke $A_1B_1C_1$ kongruent ist.

Satz 30. In zwei ähnlichen Dreiecken sind die entsprechenden Seiten proportional.

Der Beweis ist in der oben zitierten Abhandlung zu finden und ist, wie ich auch dort bemerkt habe, nur in der Form von dem Hilbertschen zum Satze 22, Grundlagen der Geometrie, verschieden.

Satz 31. (Das assoziative Gesetz.) Wenn

$$(1) \quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

und

$$(2) \quad \frac{a}{e} = \frac{f}{d},$$

dann ist auch

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c}.$$

Aus der Proportion

$$(3) \quad \frac{b}{m} = \frac{e}{d},$$

wird m bestimmt. Aus (2) entnehmen wir

$$\frac{a}{f} = \frac{e}{d},$$

also

$$(4) \quad \frac{b}{m} = \frac{a}{f}.$$

Setzt man nun

$$(5) \quad \frac{b}{e} = \frac{x}{c},$$

dann ist

$$\frac{x}{c} = \frac{m}{d}$$

(mittelst (3) und (5)).

Es ist dann

$$(6) \quad \frac{x}{m} = \frac{c}{d}.$$

Aus (1) und (6) bekommt man

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{m},$$

und aus (4)

$$\frac{a}{b} = \frac{f}{m}.$$

Die zwei letzteren Proportionen zeigen, daß $x = f$; (5) wird dann als

$$\frac{b}{e} = \frac{f}{c}$$

geschrieben, was zu beweisen war.

Diese formelle Herleitung des assoziativen Gesetzes durch die anderen Sätze der Proportionenlehre rührt von A. Kneser her (Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 1. Jahrgang 1. Stück 1902). Hiermit ist der Pascalsche Satz bewiesen.

Verhältnisrechnung.

Die nachfolgenden Definitionen und Beweise der Sätze sind in meiner Dissertation pag. 63—71 zu finden.

Wir geben einem Verhältnis $\frac{a}{b}$ einen andern Nenner c , indem wir $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$ setzen; aus dieser Proportion wird x bestimmt.

$$\text{Definition: } \frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}; \quad \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{x}{b} = \frac{a+x}{b},$$

wo x aus der Proportion

$$\frac{c}{d} = \frac{x}{b}$$

bestimmt wird.

Satz 32. Addition ist eindeutig d. h.: Wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{n}$$

und

$$\frac{c}{b} = \frac{y}{n},$$

dann ist

$$\frac{a+c}{b} = \frac{x+y}{n}.$$

Satz 33. Subtraktion ist eindeutig d. h.: Wenn

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{e}{f},$$

dann bestimmt diese Gleichung $\frac{e}{d}$ eindeutig (die Gleichung hat nicht mehr als eine Lösung).

Definition. Wir wählen zunächst eine beliebige Strecke, die für die ganze Betrachtung die nämliche bleibt, und bezeichnen dieselbe mit 1. Nunmehr definieren wir:

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{d}$$

und zunächst

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{y},$$

indem wir

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{1}$$

und

$$\frac{c}{d} = \frac{1}{y}$$

setzen.

Satz 34. Multiplikation ist eindeutig.

Satz 35. Division ist eindeutig d. h.: Aus der Gleichung

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{x}{y} = \frac{c}{d}$$

wird x eindeutig bestimmt.

Satz 36. Addition und Multiplikation sind kommutativ.

Satz 37. Addition und Multiplikation sind assoziativ.

Satz 38. Multiplikation ist distributiv.

Definition. $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ oder $\frac{c}{d} < \frac{a}{b}$ bedeutet, daß wenn

$$\frac{a}{b} = \frac{c_1}{d},$$

dann ist

$$c < c_1.$$

Satz 39. Wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, und $\frac{c}{d} > \frac{e}{f}$, dann ist auch $\frac{a}{b} > \frac{e}{f}$;

wenn $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} \geq \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$;

wenn $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f} \geq \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}$;

wenn $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$, dann ist $\frac{b}{a} < \frac{d}{c}$.

Satz 40. Der Archimedische Satz: Wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, so ist es stets möglich eine ganze, positive Zahl n zu bestimmen, so daß

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b} + \cdots + \frac{a}{b} \text{ (} n \text{ Mal)} > \frac{c}{d},$$

kann durch die aufgestellten Axiome nicht bewiesen werden.

Folgerung. Indem wir eine von Hilbert (Grundlagen der Geometrie § 13) eingeführte Redeweise benutzen, können wir sagen: Die Verhältnisse bilden ein reelles, Nichtarchimedisches Zahlensystem. Diese Verhältnisse sind die Zahlen der sogenannten Nichtarchimedischen Geometrie. Hierzu gehört ein Teil der Zahlen der Arithmetik, nämlich die rationalen und solche irrationale Zahlen, die nur Quadratwurzeln enthalten, wo eine n faltige Quadratwurzel 2^n reelle Werte hat (Hilbert: Grundlagen der Geometrie Satz 44).

Definition. Wir setzen $\sqrt{\frac{p}{q}} = \frac{r}{s}$, wenn

$$\frac{p}{q} = \left(\frac{r}{s}\right)^2 = \frac{r}{s} \cdot \frac{r}{s}.$$

Satz 41. $\sqrt{\frac{p}{q}}$ kann nur bestimmt werden, wenn man die mittlere Proportionale zwischen p und q bestimmen kann.

Dieses ist im allgemeinen nicht der Fall (Hilbert: Grundlagen der Geometrie Satz 44).

Definition. Die Proportion $\frac{a}{b} = \frac{x}{m}$ bestimmt eindeutig die Strecke x , wir schreiben

$$x = m \cdot \frac{a}{b} = \frac{ma}{b}.$$

Satz 42. $\frac{ma}{b} = \frac{am}{b}.$

Satz 43. Wenn $m \cdot \frac{a}{b} = m \cdot \frac{c}{d}$, dann ist auch

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Von dem Projektionsparameter zweier Halbgeraden.

Definition. Seien L und M zwei beliebige Halbgeraden mit dem gemeinsamen Endpunkt O ; unter dem Projektionsparameter M_L verstehen wir ein Verhältnis $\frac{OA_1}{OA}$, dessen Nenner eine beliebige Strecke OA , auf M abgetragen, und dessen Zähler die Projektion OA_1 dieser Strecke auf L ist; fällt A_1 auf L , so ist der Projektionsparameter positiv; fällt A_1 auf die entgegengesetzte Halbgerade, so ist der Parameter negativ. Die Proportionslehre zeigt, daß die Strecke OA von einer andern beliebigen Strecke ersetzt werden kann.

Satz 44. Wenn L und M einen spitzen Winkelraum bilden, ist M_L positiv; wenn L und M einen stumpfen Winkelraum bilden, ist M_L negativ; wenn L und M aufeinander senkrecht sind, setzen wir $M_L = 0$.

Satz 45. $L_M = M_L$.

Dieser Satz wird sogleich durch Ax. 5 bewiesen.

Satz 46. Wenn L und L' zwei parallele Halbgeraden auf derselben Seite von M sind, dann ist $L_M = L'_M$; wenn L und L' auf verschiedenen Seiten von M sind, dann ist $L_M = -L'_M$.

Satz 47. (Der Pythagoräische Lehrsatz.)

Seien M und P zwei aufeinander senkrechte Halbgeraden; sei weiter L eine beliebige Halbgerade; es ist dann immer

$$L_M^2 + L_P^2 = 1.$$

Wir können immer voraussetzen, daß L durch den gemeinsamen Endpunkt O von M und P geht (46). Wir wählen auf L einen Punkt A , der auf M in einen Punkt A_1 projiziert wird, welcher wieder auf L im Punkte A_2 projiziert wird. Sei M' die entgegengesetzte Halbgerade von M , und nehmen wir an, daß L in den Winkelraum MP oder $M'P$ fällt. In beiden Fällen ist $OA = OA_2 + A_2A$; im ersten Fall ist

$$OA_2 = OA_1 L_M = OA \cdot L_M^2;$$

im zweiten Fall ist

$$OA_2 = OA_1 (-L_M) = OA \cdot L_M^2;$$

in beiden Fällen ist

$$A_2A = A_1A \cdot L_Q = OA \cdot L_Q^2,$$

wenn Q die Halbgerade A_1A parallel zu P ist. Hieraus entnehmen wir

$$1 = L_M^2 + L_Q^2$$

oder

$$1 = L_M^2 + L_P^2.$$

Der Parameter zweier Halbgeraden ändert nur das Vorzeichen, wenn die eine durch die entgegengesetzte ersetzt wird; wir haben also nicht nötig, mehrere Lagen von L in Betracht zu nehmen.

Definition. Im Dreiecke ABC werden die Seiten AB , BC und CA c , a und b genannt. Die Parameter a_b , b_c und c_a sind dann die Parameter der Halbgeraden CA und CB , AC und AB , BA und BC .

Satz 48. In einem Dreiecke mit den Seiten a , b und c , ist immer

$$a_b^2 + b_c^2 + c_a^2 + 2a_b b_c c_a = 1.$$

Von B aus fallen wir das Lot BD auf AC ; D fällt entweder auf die Strecke AC oder auf eine ihrer Verlängerungen. In allen Fällen ist

$$b = c \cdot c_b + a \cdot a_b,$$

ebenso

$$a = b \cdot b_a + c \cdot c_a$$

und

$$c = a \cdot a_c + b \cdot b_c.$$

Aus diesen Gleichungen leiten wir bei Elimination von a , b und c die gesuchte Gleichung her.

Folgerung. Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit wenn a zum Punkte A parallel verschoben wird mit der Ausnahme, daß a_b oder a_c ihr Vorzeichen ändert. Sind also a , b und c drei Halbgeraden durch denselben Endpunkt, so ist immer

$$a_b^2 + b_c^2 + c_a^2 - 2a_b \cdot b_c \cdot c_a = 1.$$

Satz 49. In einem Dreiecke mit den Seiten a , b und c ist immer

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot b_c.$$

Diese Gleichung leiten wir in gewöhnlicher Weise aus den Gleichungen

$$a \cdot a_b = b - c \cdot c_b,$$

$$a \cdot a_c = c - b \cdot b_c$$

durch Quadrieren und Addieren her; h ist die Höhe des Dreiecks von B .

Hilfssatz. Wenn die Mediane von A im Dreiecke ABC gleich der halben Seite BC ist, dann ist das Dreieck rechtwinklig bei A .

Sei AD die Mediane; es ist dann $AD \equiv BD \equiv CD$. Auf die Verlängerung von BA tragen wir $AB' = BA$ ab; nun ist $CB' \equiv 2DA \equiv CB$. Hiermit ist der Satz bewiesen.

Definition. Wenn M ein beliebiger Punkt ist, so heißt die Gesamtheit aller Punkte A , für welche die Strecken MA einander kongruent sind, ein Kreis; M heißt der Mittelpunkt des Kreises; MA heißt Radius. Eine Strecke, die zwei Punkte des Kreises verbindet, wird eine Sehne und wenn sie durch den Mittelpunkt geht ein Durchmesser genannt. Wenn zwei Sehnen die Endpunkte eines Durchmessers mit einem dritten Punkte des Kreises verbinden, werden sie Supplementsehnen genannt.

Satz 50. Zwei Supplementsehnern sind aufeinander senkrecht.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge des obengenannten Hilfssatzes.

Satz 51. Werden von einem beliebigen Punkte eines Kreises aus gerade Strecken zu den Endpunkten einer gegebenen Sehne gezogen, dann ist der Projektionsparameter dieser Strecken mit Ausnahme des Vorzeichens völlig bestimmt.

Sei die gegebene Sehne $BC \equiv a$, der Punkt A , $AB \equiv c$, $AC \equiv b$; die Halbgerade durch A , welche den Mittelpunkt enthält, werde mit R bezeichnet. Mit demselben Buchstaben bezeichnen wir auch den Radius. Es ist

$$1 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 - 2 \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a} \cdot b_c \quad (49);$$

weiter ist

$$b = 2R \cdot R_b \quad \text{und} \quad c = 2R \cdot R_c \quad (50).$$

Hieraus entnehmen wir

$$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{2R}{a}\right)^2 \cdot R_b^2 + \left(\frac{2R}{a}\right)^2 \cdot R_c^2 - 2 \cdot \frac{2R}{a} \cdot \frac{2R}{a} \cdot R_b \cdot R_c \cdot b_c \\ &= 4 \cdot \left(\frac{R}{a}\right)^2 (R_b^2 + R_c^2 - 2R_b \cdot R_c \cdot b_c); \end{aligned}$$

es ist aber

$$1 = R_b^2 + R_c^2 + b_c^2 - 2R_b \cdot R_c \cdot b_c \quad (48)$$

und also

$$1 = 4 \left(\frac{R}{a}\right)^2 (1 - b_c^2).$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Wir unterscheiden leicht den größeren und den kleineren von den zwei *Bogen*, die beide zu der Sehne BC gehören. Wenn A auf dem größeren dieser Bogen liegt, wird der Durchmesser von B den Kreis in einem Punkte des kleineren der zwei Bogen AC schneiden, und es sind AD und AB aufeinander senkrecht. Hierdurch sieht man, daß der Winkelraum zwischen AB und AC ein spitzer ist; b_c ist deshalb positiv. Wenn A dagegen auf dem kleineren der zwei Bogen BC liegt, wird b_c negativ.

Folgerung. Hat ein Kreisviereck die Seiten a, b, c, d , dann ist immer

$$a_b = -c_d$$

und

$$a_d = -b_c.$$

Es ist kaum notwendig zu bemerken, daß die gewöhnlichen Kongruenzsätze von Dreiecken ohne die geringste Schwierigkeit hieraus hergeleitet werden können. Ebenso gilt auch hier die Hilbertsche Lehre

von den Flächeninhalten; doch ist in meiner Darstellung diejenige Form für diese Lehre die natürliche, die ich in meiner Dissertation pag. 74—79 angegeben habe.

Hiermit habe ich also bewiesen, daß von den zwei meßbaren Größen, die man der Geometrie zu Grunde legt, nämlich „Strecke“ und „Winkel“, die erstere allein für den Aufbau dieser Wissenschaft ausreicht. An die Stelle des Winkels tritt hier der Projektionsparameter zweier Geraden, der durch ein Verhältniß zweier Strecken ausgedrückt ist. Dieses Verhältniß ist durch zwei Strecken bestimmt.

Kopenhagen, Oktober 1903.