Hieronymus Georg Zeuthen.

Von

M. Noether in Erlangen¹⁾.

Der am 6. Januar 1920 verstorbene H. G. Zeuthen hat in den ersten 47 Bänden dieser Annalen vom ersten an seine hauptsächlichsten geometrischen Forschungen niedergelegt und war dabei so eng mit der ursprünglichen Richtung unserer Zeitschrift verwachsen, daß es unsere Pflicht ist, bei seinem Hinscheiden seiner hier eingehend zu gedenken. Nachdem ich früher einigen ihm verwandten Geometern hier habe Würdigungen zuteil werden lassen, übernehme ich nun auch eine Würdigung Zeuthens um so lieber, als schon seine ersten Annalenartikel mich, der ich damals analoge Tendenzen verfolgte, in wissenschaftliche und persönliche Beziehungen zu dem Forscher brachten, die bis zu dessen Tode fortgedauert haben.

H. G. Zeuthen wurde am 15. Februar 1839 in Grimmstrup, Jütland, als Sohn eines Pfarrhauses geboren. Von 1857—1862 studierte er an der Universität in Kopenhagen, ein Studium, das er mit dem Magisterexamen abschloß. Der Ruf von M. Chasles zog ihn dann 1863 nach Paris, und dort schloß er sich eng an die von Chasles vertretenen Richtungen an, sowohl an dessen anzahlgeometrische, als an die historische Richtung. Diese beiden Richtungen umschreiben auch im wesentlichen die ganze nachfolgende wissenschaftliche Betätigung von Zeuthen, und wir werden uns

---

¹⁾ Zu diesem Nachruf habe ich die in der Sitzung der Dän. Akad. d. Wiss. vom 16. Jan. 1920 von Herrn C. Juel gehaltene Gedächtnisrede auf H. G. Zeuthen als Material benutzt. Die in eckigen Klammern gesetzten Zahlen im Nachruf beziehen sich auf die Nummern des beigefügten Schriftenverzeichnisses. Auch für dieses Verzeichnis habe ich die Angaben für die Jahre vor 1868 hauptsächlich Herrn Juel zu verdanken. Für die Angaben für die Jahre 1868—1915 habe ich mich besonders des Jahrbuchs für die Fortschritte der Mathematik bedienen können, während für die vorhergehenden und die späteren Jahre keines der vorliegenden Verzeichnisse genügende Zuverlässigkeit bot, weder der Internationale Katalog der Royal Society noch das Verzeichnis in Poggendorffs Handwörterbuch.

deshalb in unserer Würdigung im wesentlichen auf diese beiden Richtungen beschränken.

Nach Dänemark zurückgekehrt, betätigte er sich sogleich in der 1859 gegründeten dänischen Zeitschrift *Tidsskrift for Mathematik*, in die er schon seit ihrer Gründung geschrieben hatte, mit einer größeren Reihe von kleineren Artikeln aus allen Gebieten; von 1871 an beginnend, mit der dritten Serie, übernahm er auch die Redaktion der Zeitschrift, zuerst allein, von 1883—1889 zusammen mit I. P. Gram, und in ihr veröffentlichte er von den meisten seiner vielen Aufsätze mindestens die ersten Auszüge. Auch der Nachfolgerin, der *Nyt Tidsskrift*, blieb er bis zuletzt ein treuer Mitarbeiter. Im Jahre 1871 wurde Zeuthen auch außerordentlicher Professor an der Universität Kopenhagen, im Jahre 1886 ordentlicher Professor daselbst, und er las bis kurz vor seinem Tode über alle Teile der Mathematik, nicht nur der reinen, sondern auch der auf die Mechanik angewandten, und über die Geschichte der Mathematik aus allen Zeiten. Zugleich hielt er lange Jahre hindurch auch Vorlesungen an der Polytechnischen Lehranstalt; von dieser Tätigkeit gibt eine Reihe von Arbeiten über allgemeine Bewegungslehre und über graphische Statik Zeugnis sowie die veröffentlichten Übungen [6], die Vorlesungen [7] über Hydrostatik und die Vorlesungen [8]. Durch diese reiche Vorlesungstätigkeit wurde Zeuthen der hochverehrte Lehrer aller jetzigen mathematischen Lehrer Dänemarks. Auch für diese Verehrung liegt ein Zeugnis vor in der wissenschaftlichen Festschrift, die ihm 1909 zum 70. Geburtstag von 13 bekannten Gelehrten des Landes gewidmet worden ist.

Im Jahre 1896 war Zeuthen Rektor der Universität, wovon die geschichtliche Rektoratsrede [11] zeugt. Sehr lange Zeit hindurch war er auch als eifriger und hochgeschätzter Sekretär der Dänischen Gesellschaft der Wissenschaften tätig, in deren Schriften ebenfalls viele größere und kleinere Arbeiten von seiner Hand veröffentlicht sind.

Indem wir die mechanischen, algebraischen und analytischen Arbeiten als zurücktretend übergehen, wenden wir uns sogleich den Arbeiten der ersten der beiden Hauptrichtungen Zeuthens, der *anzahlgeometrischen*, zu. Gleich seine erste Arbeit in dieser Richtung, seine 1865 der Universität in Kopenhagen zur Promotion vorgelegte Dissertation [23], 1866 auch in französischer Sprache erschienen [23'], schließt an Chasles' Charakteristikentheorie für Kegelschnittssysteme an, gibt aber neue Gesichtspunkte, da sie davon ausgeht, zuerst die Anzahlen für die im Punkt- oder Liniensinne zerfallenden Kegelschnitte der zu betrachtenden Elementarsysteme zu ermitteln, um dann diese Anzahlen für die Bestimmung der Charakteristiken zu benutzen. Eine eingehende Auskunft über diesen Zusammenhang und den ganzen ausgebauten Kalkül der Theorie findet

man in der bekannten Abhandlung Cayleys von 1867: „On the curves which satisfy given conditions“ (Philosoph. Transactions, Vol. 156 for 1868, Werke VI, Nr. 406). Dort findet man auch den Hinweis, daß Zeuthen in seiner Dissertation zum ersten Male die doppelte Ausartung einführt, welche ein Unterfall sowohl des Linienpaares als des Punktpaares ist, bestehend aus den Punkten einer doppelten Geraden und den Geraden eines doppelten Punktes, von Cayley „line-pair-point“ geheißen, und die doch nach Halphen nicht drei, sondern vier Parameter enthält, neben drei kontinuierlichen noch einen Parameter, der nur rationale Werte annimmt. Zeuthen nennt in seiner Bescheidenheit dieses Gebilde in seinem Werke [5] von 1914 immer den Halphenschen Kegelschnitt, weil dieser zuerst seine Bedeutung gezeigt habe, durch Zufügung eines Gliedes zur Chaslesschen Charakteristikenformel. Dieser Erklärung einer Abweichung von der alten Charakteristikentheorie in einzelnen Beispielen schließt sich Zeuthen auch in seiner Polemik gegen Study [110], die in diesen Annalen 1890 geführt worden ist, an, ohne jedoch diese Erklärung als die einzig mögliche bezeichnen zu wollen.

Eine Ausdehnung der Charakteristikentheorie über das bisher versuchte gelang Zeuthen schon früh. Schon 1866 in [26] erscheint die Ausdehnung auf Systeme von Flächen zweiter Ordnung, 1872 [41] auf Systeme von ebenen Kurven 3. Ordnung, sowie [42] von solchen 4. Ordnung. Die letztere Theorie wurde dann in [47] eingehend verfolgt, ohne daß man bis heute darauf zurückgekommen wäre.

Chasles hatte von seiner Charakteristikenformel $\alpha\mu + \beta\nu$, wo die Zahlen μ, ν nur vom System, die α, β nur von der Bedingung abhängen, keinen Beweis gegeben, ebensowenig Cayley, auch Zeuthen damals nicht; dieses ist von Zeuthen erst in seinem Buche [5] geschehen, abgeleitet aus den sogleich zu besprechenden Korrespondenzuntersuchungen als eklatantes Beispiel der Bedeutung dieser letzteren Forschungen; vorher enthielt nur eine der letzten Arbeiten von Clebsch (Math. Ann. 6) für die fragliche Formel bei Kegelschnittsystemen einen algebraischen Beweis. Gegenüber Cayleys Untersuchungen über Charakteristikentheorie wird man die von Zeuthen zwar für weniger reich entwickelt zu erklären haben, aber neben manchem induktivem Resultat in seinem Buche [5] von 1914 diesem doch mehr Beweise von Formeln und schärfere methodische Betrachtungen zusprechen, so daß man heutzutage zum Studium der Theorie hauptsächlich auf dieses Buch verweisen muß.

Während Cayley sich hauptsächlich auf Funktionalgleichungen stützt, benutzt Zeuthen, wie gesagt, nur das *Korrespondenzprinzip*. Das zunächst auf wechselseitiges Entsprechen von Punktgruppen auf Geraden bezügliche einfache Korrespondenzprinzip war schon von seinem Urheber Chasles auf

unikursale Kurven, also auf Kurven, deren Koordinaten rational von einem Parameter abhängen, ausgedehnt worden (C. R. 1866), gestützt auf den Begriff des eindeutigen Entsprechens; Cayley gab aus reiner Induktion heraus 1868 eine Verallgemeinerung der Formel für Kurven von beliebigem Geschlecht p , durch Zufügung eines mit p proportionalen Gliedes (s. die Fortsetzung der obengenannten Arbeit, Werke VI, Nr. 407). Auch Zeuthen war es damals nicht geglückt, diese Ausdehnung theoretisch abzuleiten; aber er konnte 1870 [35] einen Satz geben, den man durch doppelte Anwendung der Cayleyschen Ausdehnung ableiten könnte, und der selbst eine Ausdehnung des Satzes von der Erhaltung des Geschlechtes p einer Kurve bei 1-1-deutiger Transformation ist, nämlich einen Satz über die Beziehung zwischen den Geschlechtern zweier mehrdeutig aufeinander bezogenen Kurven, in welchen die Differenz zwischen den Koinzidenzanzahlen auf beiden Kurven (d. h. der Verzweigungsanzahlen auf beiden Kurven) eingeht. Es ist also die Ausdehnung der Riemannschen Formel $2p - 2 = w - 2n$, wo n die Anzahl der Blätter, w die der Verzweigungspunkte einer Riemannschen Fläche, p die Geschlechtzahl der zugehörigen algebraischen Funktion vorstellen. Ein strenger Beweis des Cayleyschen Satzes und zwar in algebraischer Form ist erst von A. Brill (Math. Ann. 6) gegeben worden, im Anschluß an einen Beweis einer Formel für die Anzahl der zweien Korrespondenzen auf einer algebraischen Kurve gemeinsamen Punktpaare; und noch direkter und unterer stärkerer Verwertung der Begriffe des eindeutigen Entsprechens ist Brills Beweis in Math. Ann. 7. Das ganze Gebiet der Korrespondenztheorie zwischen den Punktsystemen einer oder zweier Kurven gehört ja in das Gebiet der Eigenschaften, welche bei rationalen Transformationen invariant sind; schon bei der Ausdehnung des ursprünglichen Korrespondenzprinzips auf der Geraden auf die Punktgruppen einer rationalen Kurve hat Chasles dies erkannt; das Prinzip ist aber geeignet, alle Verhältnisse, welche durch singuläre Stellen der Grundkurve oder durch spezielle Lagen der einander entsprechenden Punkte sich komplizieren, übersichtlich aufzufassen und ohne Schwierigkeiten zu erledigen. Auch Zeuthen hat in [112] (1892) das Prinzip zu einem Beweis des allgemeinen Korrespondenztheorems benutzt; und dabei hat er noch einen weiteren Beweis zugefügt, indem er für die allgemeine Kurve vom Geschlecht p den Einfluß untersuchte, welchen die Zufügung eines weiteren Doppelpunktes an der Formel bewirkt, und so die Frage sukzessiv auf den bekannten Fall der rationalen Grundkurve zurückführte. In seinem Buche [5] § 111 hat er dann den Beweis von [112] noch verbessert und in dieses Buch auch die ganze Literatur über den Korrespondenzsatz aufgenommen. Auch hat er [ibidem] §§ 119 und 124 den Weg angezeigt, um *alle* Korrespondenzen, auch die mit ne-

gativer oder gebrochener „Wertigkeit“ zu erledigen und diesem letzteren Begriff auch die Hurwitzschen „singulären“ Korrespondenzen einzuordnen.

Als eine Fortführung der Begriffe über eindeutige Transformation der Gebilde, aber auf das viel kompliziertere Gebiet der *Flächen*, ist eine sich anschließende Reihe von Arbeiten, [34] von 1870 sowie [37] bis [39] von 1871 wie auch [60], [62] von 1876, anzusehen, welche die geometrisch-algebraische Kraft Zeuthens im hellsten Lichte zeigen, und welche am meisten zur Bedeutung seines Namens beigetragen haben, um so mehr als sie auch die Polarentheorie stark gefördert haben. Man sieht in ihnen deutlich, daß der Gesichtspunkt der rationalen Transformationen den innersten Kernpunkt des Zeuthenschen Arbeitsgeistes bildet, und daß aus dieser Beschäftigung seine feine und scharfe Erfassung und Fassung von komplizierten geometrischen Einzelheiten, wie sie zu jener Zeit höchstens einigen Algebraikern oder Analytikern an der Hand von Reihenentwicklungen sich erschlossen hatten, erwachsen ist. Diese Einzelheiten boten sich in besonderer Fülle und Mannigfaltigkeit beim Entsprechen von Fundamentalpunkten und -kurven auf Flächen dar; an ihnen entwickelte sich Zeuthens eingehendes geometrisches Verständnis und seine scharfe geometrische Bezeichnungsweise, die sich auch unmittelbar in analytische Formeln übertragen läßt, wie auch umgekehrt jeder analytische Ausdruck sich in die geometrische Sprache umsetzen läßt. Vergleicht man damit die unbestimmte und sorglose Sprache der Geometer der damaligen und auch späteren Zeit, so erkennt man erst das große, noch nirgends hervorgehobene Verdienst Zeuthens um die allgemeine Ausbildung der Geometrie, auf das der Berichterstatter um so lieber hinweist, als er in derselben Richtung zu wirken bestrebt war und sich dabei gern als Schüler Zeuthens in jener Richtung bekennt²⁾.

Die Hauptarbeit in dieser Richtung ist [38], die Verallgemeinerung der Operationen von [35], während [37], eine Feststellung der Verhältnisse bei vielfachen Geraden einer Fläche, nur als Vorbereitung der Aufgabe von [38] anzusehen ist, die bei eindeutigen Punkttransformationen zwischen zwei Flächen invarianten Zahlenrelationen zu ermitteln. Der Beweis für die Erhaltung der Geschlechtzahl p bei zwei Kurven ließ sich nach Zeuthen, Clebsch und Bertini dahin fassen, daß man die Transformation zwischen zwei Kurven durch zwei sukzessive Transformationen ersetzt, welche je eine der beiden Koordinaten festlassen; und in einer solchen einfacheren Transformation hat man nur aus den, einem von einem Punkt der Ebene

²⁾ Ich erlaube mir dabei, auf meine Noten in Math. Annalen 56 und in dem Chicago Congress Math. Papers hinzuweisen, in welchen besonders die von Anfang an so notwendige scharfe Unterscheidung zwischen „koinzidierenden“ und „konsekutiven“ Punkten einer Kurve betont wird.

an die Kurve gehenden Tangentenbüschel zugehörigen Zahlen (der Anzahl der beweglichen Punkte der Geraden des Büschels und der Anzahl der eigentlichen und uneigentlichen Tangenten des Büschels, den Zahlen n und w in der obigen Riemannschen Formel $w - 2n = 2p - 2$) eine solche Kombination p zu bilden, welche sich bei Änderung des Scheitels des Büschels nicht ändert. Genau so geht Zeuthen bei zwei Flächen vor, hier nur mit Einschieben zweier neuer Flächen unter Betrachtung der Anzahlen, die zwei Tangentenkegel an eine Fläche betreffen, wobei die Schwierigkeit nur in der genauen Bestimmung der Singularitätenzahlen dieser Kegel bei allgemein und bei speziell gelegnem Scheitel liegt. Es gelingt Zeuthen auch hier, zunächst eine bei Verlegung des Scheitels invariante Kombination zu finden, eben die Geschlechtzahl p , welche schon von Clebsch und mir (Math. Ann. 2) angegeben war. Aber Zeuthen findet zugleich noch eine zweite Kombination, welche zwar nicht völlig invariant ist, insofern in die Transformationsformel noch die Anzahlen der einfachen Fundamentalpunkte der beiden Flächen eintreten. Sie erscheint daher als neue Invariante nur gegenüber Transformationen, bei denen überhaupt keine einfachen Fundamentalpunkte auf beiden Flächen auftreten, sie ist eine „relative Invariante“. Auch Segre hat auf anderm Wege diese Halbinvariante gefunden, und so nannte man sie „Zeuthen-Segresche Invariante“; ihre Auffindung stellt die Hauptleistung Zeuthens in der Theorie der algebraischen Flächen dar. Dem Berichterstatter ist es später (Math. Ann. 8) gelungen, die nicht-invarianten Glieder der Zeuthenschen Formel mittels Beziehung der Fundamentalpunkte zu den zu der Fläche zugehörigen invarianten „Flächen φ “, negativ genommen, durch Invarianten zu ersetzen, und so eine völlig invariante Zahl p zu erhalten, aber diese Arbeit (Math. Ann. 8) ruht doch völlig auf der Zeuthenschen Arbeit. Es war nur natürlich, daß meine eigenen Bestrebungen mit denen von Zeuthen eng zusammenstießen.

Interessant ist in dem Aufsatz [38] auch die Anwendung auf Abbildungen von Flächen auf Doppelebenen, in [39] die auf Überführung einer Fläche in ihre reziproke. In dieser letzteren Arbeit läßt Zeuthen einige Glieder als noch nicht hinreichend untersucht weg, da er verlangt, daß jede der eingeführten Singularitäten nicht nur vom Punktstandpunkt aus, sondern auch vom dualen Standpunkt genau festgestellt werde. Es ist dies ein Zeichen, welche Anforderungen Zeuthen an seine Beweise stellte, und zugleich ein Beweis für seine Redlichkeit: es war ihm natürlich, sich zu einer Lücke oder gar einem Fehler zu bekennen, sobald er sie eingesehen hatte. Diese Wahrheitsliebe hat Zeuthen immer betätigt: die Sache ging ihm immer vor der Person. Auch in den Polemiken, zu denen Zeuthen mehrfach Veranlassung hatte, läßt sich bei ihm derselbe

sachliche Zug erkennen; er blieb immer in streng objektiven Grenzen, auch wenn es auf der Gegenseite nicht der Fall war: eine wahrhaft vornehme Natur.

Die Betrachtungen über Reziprokflächen hat Zeuthen 1876 in [60], [62] zu einem befriedigenden Abschluß gebracht, indem er nicht nur die Formeln von Salmon und Cayley wiedergibt, sondern sie auch beträchtlich auf außerordentliche Singularitäten ausdehnt, die nicht jede Fläche, sei es von dem einen oder andern Standpunkt, „im allgemeinen“ aufweist. Über die Resultate dieser Autoren geht Zeuthen auch darin hinaus, daß er die Singularitätszahlen völlig sicher festlegt, mit Methoden vielfach analytischer Art, die auch die Weiterführung auf noch höhere Singularitäten gestatten würden³⁾. Schon früher, 1868, in [29] und [33] hatte Zeuthen, bei analogen Untersuchungen über die Singularitätengleichungen der Raumkurven, seinen Namen an die von Cayley und Salmon gebunden, indem er auch hierbei deren Resultate mit dem einfachen Korrespondenzprinzip bedeutend erweitert hatte.

Eine andere Reihe von geometrischen Arbeiten aus derselben Zeit zeigt Zeuthen von einer neuen Seite: eine starke intuitive Kraft, die ihn zur Aufdeckung von *gestaltlichen* Verhältnissen bei Kurven und Flächen führt. Diese Tätigkeit führt aber in ihrem Ursprung auf die oben besprochene Beschäftigung mit der Charakteristikentheorie zurück. In der großen Abhandlung [47] von 1873 über Systeme von Kurven vierter Ordnung war es nötig geworden, die Singularitäten mit Kontinuitätsbetrachtungen zu verfolgen, indem es darauf ankam, unter den ausgearteten Lösungen einer Aufgabe die „eigentlichen“ Lösungen zu erkennen, was nur dadurch möglich war, daß das Auftreten von sogen. „Scheiteln“ gestaltlich beobachtet wurde, von denen ein jeder in einen doppelten Punkt (im Sinne der Liniengeometrie) übergehen kann.

Die Grundarbeit für die Aufzählung der verschiedenen Gestalten der ebenen Kurven vierter Ordnung (ohne mehrfache Punkte) ist die in diesen Annalen erschienene Abhandlung [50]. Von früherer Literatur werden nur allgemeine Betrachtungen von Plücker und von Staudt benutzt. Die Einteilung geschieht hauptsächlich nach dem Verhalten der Kegelschnitte, welche durch die acht Berührungspunkte der vier Doppeltangenten *eines* Zuges gehen (die imaginären inbegriffen), wobei zunächst 13 Klassen unterschieden, daraus aber 36 verschiedene Formen von Kurven vierter Ordnung abgeleitet werden, von denen sämtlich auch die Existenz nachgewiesen

³⁾ Merkwürdigerweise erwähnt die neueste Darstellung der Theorie von H. W. E. Jung „Über algebraische Flächen“ J. f. Math. 150 die Zeuthenschen Verallgemeinerungen der früheren Theorie überhaupt nicht, so daß es unentschieden bleibt, ob sie benutzt worden sind.

wird. Auch die Formen der Kurven vierter Ordnung mit Doppelpunkten werden erledigt; und weiter wird von da die Untersuchung der Gestalten der allgemeinen Flächen dritter Ordnung erledigt, indem sie mit Geiser durch Projektion von einem ihrer Punkte aus auf eine Ebene, die eine Doppel-ebene mit Übergangskurve vierter Ordnung wird, auf jenen Fall zurückgeführt werden. Auch hier (s. auch [51]) ergeben sich alle möglichen Gestalten und Realitätsverhältnisse der Geraden der Fläche, und es werden alle Resultate von Schläfli wieder erhalten, sowie die von Klein (Math. Ann. 6), der einen ganz anderen Ausgangspunkt genommen hatte. Die Methode von Zeuthen ist besonders dadurch einfach, daß außer dem einen Fundamentalpunkt, der Projektionspunkt auf der Fläche ist, keine weiteren Fundamentalpunkte in der Abbildung auftreten.

Viel später [97] hat Zeuthen auch die Gestalten der Flächen 4. Ordnung mit Doppelkegelschnitt abgeleitet.

Dieser ganze, in sich geschlossene Kreis von geometrischen Forschungen fällt, sich in immer intensiverer Weise aussprechend, in das erste Jahrzehnt von Zeuthens Schaffenswerk. Damit ist aber auch der Höhepunkt in seinem geometrischen Schaffen erreicht; nur haben wir noch eines nachzutragen.

1874 hat in [56] Zeuthen das Korrespondenzprinzip von Kurven auf Ebene und Raum ausgedehnt, was freilich teilweise schon von Salmon (Raumgeometrie von 1868) vorausgenommen war. Diese Ausdehnung beruht auf einfacher Anwendung des gewöhnlichen Chaslesschen Prinzips, auch im Falle, daß unendlich viele Punkte existieren, welche mit ihren entsprechenden zusammenfallen.

Was nun folgt, betrifft entweder vereinzelte Fragen, oder es sind Arbeiten, welche frühere Ideen nur ausführen; ein größeres neues Gebiet wird nicht mehr besprochen. Nicht als ob die späteren Leistungen, die wieder etwa 1909 einsetzen, gegenüber den früheren durchaus zurückblieben; im Gegenteil: hat doch Zeuthen noch im Greisenalter 1914 sein großes Werk [5], das wir schon mehrfach zu erwähnen Gelegenheit hatten, erscheinen lassen können. Aber auch hier fehlt die Fortentwicklung, wenn auch nicht die Umgestaltung, seiner Ideen; über die übrigen geometrischen Leistungen Zeuthens können wir uns kurz fassen.

Eine Reihe von kleineren Arbeiten sind der Konstruktion des 8. Schnittpunktes der durch 7 gegebene Punkte gehenden Flächen 2. Ordnung gewidmet, und der Betrachtung der Konfiguration dieses Oktupels von Punkten, von dem analoge Eigenschaften nachgewiesen werden zu denen, wie sie das erweiterte Pascalsche Sechseck eines Kegelschnitts bietet. Die Grundarbeit in dieser Richtung ist der Aufsatz [79] (1881), sie schließt also auch an Zeuthens frühere Richtung auf das Korrespondenzprinzip an,

das nur von der Ebene durch Abbildung auf die Fläche 2. Ordnung übertragen ist, wobei jene Betrachtungen nur als Anwendung auftreten. Fortgeführt sind sie in [82] (1882), [96] (1886) und [105] (1889).

Ein weiterer Gedankenweg Zeuthens versucht, die Abzählungen für Schnittpunktsätze, wie sie etwa Cayley vorgenommen hatte, zwar beizubehalten, aber auf eine strengere Form zu bringen. Obwohl ihm das gelungen ist, wird man doch das Verfahren Zeuthens gegenüber dem algebraischen des Berichterstatters noch nicht als befriedigend anerkennen können. Endlich ist noch ein Beitrag zum Beweis des Fundamentalsatzes der projektiven Geometrie [127], [128] zu nennen.

Beim Überreichen seines geometrischen Hauptwerkes [5] von 1914 an die Dänische Akademie der Wissenschaften sprach sich Zeuthen unter dem Titel „Über Anwendung von Rechnung und Raisonement in der Mathematik“ [155] selbst über seine Arbeitsweise aus. Er knüpft an Aussprüche seiner beiden ersten Universitätslehrer Ch. Jürgensen und A. Steen an, von denen der erstere die Mathematik als eine Trägheitswissenschaft bezeichnete, der zweite ein mathematisches Resultat nicht eher als wohlbegründet erklärte, bis es durch Rechnen vollgesichert erscheine („Rechnung“ im weitesten Sinne genommen). Beide Aussprüche regten ihn an, der erste, obwohl Zeuthen nicht zur Trägheit veranlagt war; aber er wünschte, die Resultate auf möglichst kurzem Wege zu erlangen, vor allem jede weitläufige Rechnung zu umgehen, und diese Ziele suchte er auf dem Konstruktionswege zu erreichen mit rein geometrischen Lösungen durch Konstruktionen, welche zugleich mehr Einsicht in das Wesen des Problems geben als der Rechnungsweg, und sich dann auch als einfacher herausstellen. Dieses Ziel hat Zeuthen dann sein Leben hindurch verfolgt von den ältesten Problemen der griechischen Mathematik an bis zu den neuesten Forschungen, und oft mit ausgezeichnetem Erfolg.

Dem zweiten Ausspruch stand Zeuthen widerstrebend gegenüber; er erkannte die Gefahr, von dem System der Rechenformeln und -symbole mechanisch abhängig zu werden, anstatt mit dem Gedanken über den Rechenmethoden zu stehen und den Problemen begrifflich ins Auge zu sehen und die Methoden selbst erst nach ihnen zu formen. Hätte er das geflügelte Wort O. Hesses gekannt: „Die Mathematik ist die Wissenschaft, das Rechnen zu vermeiden“, er hätte dieses Wort wohl sich zu eigen gemacht. Aber da er so an seinem Wege festhalten wollte, fühlte er den Worten Steens gegenüber nur die Verpflichtung, auch seinen Weg gegen jeden Einwand möglichst sicherzustellen, und seinen Resultaten einen ähnlichen Grad von Zuverlässigkeit zu geben, wie ihn die Rechnung beanspruchen konnte. So entstand sein Bemühen, in seinen Forschungen neben der Einfachheit auch immer größere Klarheit und Strenge zu er-

zielen, und er verschmähte dazu bei Einzeluntersuchungen auch nicht die Verwendung algebraischer und analytischer Methoden, nur daß diese nicht die Grundlage seiner Forschungen bilden durften, als welche ihm immer die Induktion galt: nur gepaart mit strenger Selbstkritik, die er bei manchen seiner Vorgänger, deren richtige Resultate mehr ihrem „bonsens“ zuzuschreiben waren, schwer vermißte. Zeuthen arbeitete mit der *Intuition*, für ihn eine Art Gesamtheitsauffassung, welche alle Einzelheiten des Gegenstandes seiner Forschung schon in sich faßt, und damit durchdrang er auch diese Einzelheiten. Besonders deutlich ist dies in seinem Lehrbuch [5] der Fall, das zwar die Geometrie nach allen Richtungen durchforscht und einen Überblick über das ganze Gebiet eröffnet, das aber doch im wesentlichen nur *Regeln* für alle möglichen Vorkommnisse gibt, keine eigentlichen *Beweise*. Wer sich in die Einzelheiten dieser Untersuchungen vertieft hat, wird aber bei abzählenden Fragen selten in Zweifel über ihre Behandlung kommen. Nur von einer in den letzten Jahren oft erörterten Frage der abzählenden Geometrie kann man nicht sagen, daß sie eine völlig befriedigende Lösung gefunden hat, auch durch Zeuthen nicht, dessen letzte Arbeit [161] (1919) ihr gewidmet ist: die Frage, wie unendlich viele Lösungen, die bei einem Problem mit im allgemeinen endlich vielen Lösungen im speziellen Falle eintreten, die Anzahl der endlich vielen eigentlichen Lösungen modifizieren? Es kommt vor, daß diese Anzahl ganz unberührt bleibt, und dies soll nach Zeuthen davon herrühren, daß die beiden Arten von Lösungen zu verschiedenen Faktoren der Resultante gehören, von denen durch die Spezialisierung nur ein Faktor berührt wird. Diese Erklärung, abgesehen davon, daß sie nur eine Umschreibung ins Algebraische ist, ist aber nicht erschöpfend, indem die Spezialisierung an den Eliminationsprozessen, nicht nur erst in der Schlußresultante vorzunehmen ist, sondern schon im Laufe der Prozesse, so daß das spezielle Problem eigentlich ganz unabhängig vom allgemeinen zu behandeln wäre. Die dabei gegebene geometrische Erklärung mag für die an $p - 1$ -Stellen eine Kurve vom Geschlecht p berührenden Kurven φ im hyperelliptischen Fall für $p = 3$ zutreffen; wie soll man aber für $p > 3$ damit als Resultat erhalten, daß die unendlich vielen Lösungen als eigentliche Lösungen mitzählen oder nicht mitzählen, je nachdem der Grad der Unendlichkeit ein gerader oder ein ungerader ist (wie schon für $p = 5$ beide Fälle vorkommen)?

Da sich Zeuthens induktive und intuitive Art zu denken über das ganze Werk [5] erstreckt, ist es geeignet, in dem Leser nach und nach dieselbe Anschauung hervorzurufen und durch die Umfassung eines so großen Materials das Gefühl der Richtigkeit und Zuverlässigkeit so weit zu entwickeln, daß ein rein deduktiv gehaltenes Werk nicht eindringlicher wirken könnte.

Das Werk [5] ist nur in deutscher Sprache erschienen. Es gehört somit zu unserer deutschen mathematischen Literatur und wird von hier aus trotz der entgegenstehenden Widerstände in die Weltliteratur eindringen; diese Gabe eines Ausländers an unsere Literatur soll Zeuthen hoch angerechnet werden.

Auf die erste zehnjährige geometrische Periode folgt bei Zeuthen zunächst ein zehnjähriges Zwischenstadium, ausgefüllt mit Arbeiten über Mechanik, mit Lehrbüchern geometrischen oder mechanischen Inhalts und mit dem Enzyklopädiebericht über abzählende Methoden [141], hierin aber anschließend eine *mathematisch-geschichtliche* Periode, die Zeuthens Arbeitskraft bis etwa 1909 in Anspruch nahm und während des letzten Lebensjahrzehnts neben der zweiten geometrischen Periode herlief. Auch durch die ganze historische Periode hindurch hat sich Zeuthen die alte mathematische Schärfe und Kritik zu bewahren gewußt, wie sein geometrisches Alterswerk [5] beweist.

Wenn jetzt die historische Tätigkeit Zeuthens näher betrachtet werden soll, so werde ich mich, da mir diese Tätigkeit ferner steht als die geometrische, auf einen kurzen Überblick beschränken müssen.

Die ersten Schritte auf diesem Gebiet geschahen nur zögernd in einigen kurzen Noten von 1876 bis 1883 [59], [85], [90], unter dem gemeinsamen Titel „Fra Matematikens Historie“ in seiner Tidsskrift veröffentlicht: Über indische Geometrie, über diophantische Aufgaben usw. Aber 1885 holt Zeuthen zu einem Hauptschlager aus, es erscheinen in den Abhandlungen der Dänischen Akademie die „Kegelsnitlæren i Oldtiden“ (eingereicht 1884), ein Jahr darauf auch in Deutsch als selbständiges Werk in Kopenhagen herausgegeben unter dem Titel: „Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum“, über 500 Seiten groß. Der Inhalt ist nicht mehr und nicht weniger als der Nachweis, daß das Buch des Apollonius von Perga über die Kegelschnitte, bald nach Euklids Elementen geschrieben, eine förmliche *analytische* Geometrie der Kegelschnitte unter Koordinatenbenutzung und mit einem Äquivalent für algebraische Rechnung enthält: eine Entdeckung, welche alle unsere bisherigen Begriffe über die Entwicklung der alten und der neueren Mathematik über den Haufen wirft. Und sie ist so wohlbegründet, daß sie kaum mehr eine Hypothese genannt werden kann. Die Koordinaten bestimmen als zwei lineare variable Parameter die Punkte der Kurve, ebenso wie in unseren auf zwei durch einen Brennpunkt gehenden Achsen ausgedrückten Kegelschnittsgleichungen. Und wenn auch die Rechnung noch nicht mit den neueren algebraischen Symbolen geführt sein kann, so bietet sie doch vollen Ersatz dafür, indem sie geometrische Größen dafür benutzt und diese in Form einfacher geometrischer Prozesse

verknüpft, wie Teilung von Rechtecken und Wiederausammensetzung zu Flächen, eine Operation, die von den Griechen zur numerischen Auflösung der quadratischen Gleichungen verwendet worden ist. (Nach [3'] S. 25 oder S. 19 leistet Buch VI, 28 oder Buch II, 5 der „Elemente“ die Auflösung der quadratischen Gleichung $ax - x^2 = b^2$.) Diese Auffassung einer *geometrischen* Algebra hatte übrigens schon P. Tannery vorbereitet, und sie wurde in Zeuthen durch Beschäftigung mit Tannerys Arbeiten angeregt; sie ist auch in Deutschland geäußert worden, von Nesselmann und selbst von M. Cantor, und sie hat wohl keine Gegnerschaft.

Für die Griechen — und dies ist ein weiterer Punkt, auf den Zeuthen immer wieder hingewiesen hat — war eine solche *geometrische* Algebra schon aus dem Grunde nötig, weil sie auch die irrationalen Größen beherrscht, während die Arithmetik nur die rationalen Zahlen besaß; gerade dieser Umstand bewirkte es ja auch, daß man die geometrischen Methoden allein als strenge erklärte, während den arithmetischen Methoden die Existenzbeweise fehlten.

Die geschichtlichen Untersuchungen von Zeuthen sind, im Gegensatz zu denen von M. Cantor, nicht nur literarische, lediglich auf Urkunden gestützte, sie bedienen sich der philologischen Methoden, mit denen Zeuthen völlig vertraut war, nur als Hilfsmittel; darüber hinaus war ihm das wesentliche, sich in den Geist der Methoden der Alten mathematisch so einzuleben, daß er auch wagen konnte, Hypothesen über Entstehung und Tragweite der Methoden aufzustellen. Gegen diese Richtung Zeuthens, die im Geschichtlichen genau das Entsprechende vorstellt zu seiner induktiven Richtung im Geometrischen, sind von den philologisch gerichteten Historikern der Mathematik natürlich Einwendungen erhoben worden (vgl. z. B. die Verteidigung [119]), die aber die starke Überzeugungskraft nicht leugnen konnten, welche von diesen Arbeiten Zeuthens ausgeht. Als beste Antwort auf diese Anschuldigungen wollen wir hier einige Worte anführen, die Zeuthen bezüglich Paul Tannery, welcher dieselbe Tendenz verfolgte, und der Zeuthen in seinen geschichtlichen Arbeiten als Vorbild gedient hatte, in einem Nachruf auf diesen Forscher [139] (1905) gebrauchte; und die wörtlich auch auf ihn selbst anwendbar sind: „P. Tannery war ein genügend tiefer und feiner Geometer, um sein Denken unabhängig zu machen von den aktuellen Formen der Mathematik und es den antiken Formen so anzupassen, daß er aus eigener Erfahrung den Wert der Hilfsmittel und die Tragweite der Verfahrensweisen beurteilen konnte, über die man in den vergangenen Zeiten verfügte. Daher wußte er sich auch von jeder Klassifikation freizumachen, die der modernen Mathematik entlehnt wäre; so verstand er z. B. in der antiken Geometrie die Grundlagen einer Algebra aufzufinden, die unmittelbar anwendbar war auf arithmetische Fragen“.

Zeuthen stützt sich zwar auf alte urkundliche Belege, aber er baut nicht ausschließlich auf sie, sondern auch auf seine mathematische Einsicht, die bis zu den fernsten voreuklidischen Zeiten dringt; er findet bei Apollonius nicht nur Zusammenhänge mit der analytischen Geometrie, sondern auch mit der projektiven Erzeugung der Kegelschnitte.

Zeuthen verfolgt in einer ganzen Reihe von Arbeiten, so [138], [144], [146], [153], vor allem in der großen Abhandlung [158] die Entwicklung der griechischen Mathematik, der Geometrie und der Arithmetik von Euklid zurück bis zu den Pythagoräern. Es gelingt ihm, alle sukzessiven Stadien in den Methoden festzulegen, alles aus den spärlichen Notizen über solche Resultate in der griechischen Literatur von Plato rückwärts, auch bei den griechischen Kommentatoren, denselben Notizen, die auch Cantors Werk zugrunde liegen, nur daß Zeuthen überall über sie hinausgeht und aus den Resultaten Schlüsse auf den Stand der Methoden zieht, welche solche Resultate möglich gemacht haben konnten. Das Hypothetische dieses Aufbaues ist ja nicht zu leugnen, aber nicht nur ist der Grund fest, auch die einzelnen Glieder des Baues stützen einander gewölbartig. Wie frei Zeuthen das Werkzeug der Griechen, dessen sich noch Newton bediente, das aber seitdem eingerostet war, zu handhaben wußte, zeigt Note [144].

Vom Altertum aus wendet sich Zeuthen in einem zweiten größeren Werk [3'] (1896) (drei Jahre vorher in dänischer Sprache [3] erschienen) der folgenden Zeit zu, bis zu derjenigen neueren Zeit, in der die direkten oder durch die Araber vermittelten Einflüsse der griechischen Mathematik aufhören, nämlich bis gegen das 16. Jahrhundert hin, dem in Verbindung mit der Mathematik des 17. Jahrhunderts Zeuthen noch ein besonderes Werk [4] (1903) gewidmet hat (siehe auch [4']). [3] ist also als eine Art Brücke zwischen [2] und [4] anzusehen, denn [3] behandelt die Einwirkungen des griechischen Geistes auf die Zeit des Mittelalters, die in mathematischer Beziehung ausschlaggebend waren; es behandelt die allmähliche Aufnahme des großen Stoffes, der teils in griechischer Sprache im Original zugeführt, teils durch die Araber vermittelt wurde, wozu sich das gesellte, was die Araber selbst in Gleichungen zweiten Grades geschaffen hatten oder was sie von den indischen Rechnern wußten. Die selbständige Verarbeitung und Vertiefung des Stoffes bei den Westvölkern beginnt erst mit der Zeit, der [4] gewidmet ist. Dieses Werk vor allem ist nicht ein historisches in dem Sinne, wie man es sonst zu nehmen gewohnt ist: eine Feststellung und Registrierung von Einzelheiten; es ist im historischen Gewande ein *mathematisches* Werk, das sich an Mathematiker wendet, um ihnen ihre Methoden im Entstehen zu zeigen und dadurch von neuer Seite nahe zu bringen. Ein großer Teil ist Vieta und Descartes gewidmet, nicht

nur in der Algebra und analytischen Geometrie, sondern auch in der Analysis des Unendlichen; aber diese wird durch alle großen Namen hindurchgeführt, von Kepler und Galilei bis auf Newton und Leibniz. Besonders flüssig geschrieben und eindrucksvoll ist die reiche, 80 Seiten starke Einleitung, welche die chronologischen und biographischen Daten gibt und eine Übersicht über die ganze behandelte Zeit gewähren soll. Die Darstellung beruht überall auf eigenen Forschungen, die in zahlreichen kleineren Veröffentlichungen vorhergegangen waren; so seien die über J. Barrow hervorgehoben [125] und [129], den Lehrer Newtons und Vorgänger auf dessen Lehrstuhl in Cambridge, den Zeuthen als den eigentlichen bewußten Entdecker des inversen Charakters der beiden Probleme, des der Tangenten und des der Quadratur, d. h. der Differential- und der Integralrechnung, hinstellt, eine Entdeckung, die Zeuthen überhaupt als das Fundament der Erfindung des Infinitesimalkalküls ansieht und die auch Newton beeinflußt habe. Wenn man sich den Würdigungen Zeuthens in dieser Einleitung im allgemeinen voll anschließen kann, so erleidet das vielleicht eine Einbuße bei der von Leibniz, die zum mindesten nicht von Voreingenommenheit für den deutschen Philosophen spricht.

Von allen weiteren historischen Einzelforschungen Zeuthens möchten wir nur noch auf die über Archimedes hinweisen, dessen Herausgabe seinem Freunde Heiberg zu danken ist, zusammen mit ihm selbst [143], [144]. In [143] gibt Zeuthen den Kommentar zu einer verloren geglaubten von Heiberg wieder entdeckten Schrift des Archimedes, einem Fund, der in un-verhoffter Weise eine „Hypothese“ von Zeuthen in tatsächliche Wirklichkeit umsetzte. Bei diesem Anlaß kämpft Zeuthen gegen gewisse neuere Benennungen, die er für ungeschichtlich hält, so das „Archimedische Prinzip“, das schon bei Euklid erscheine und von dessen Vorgänger Eudoxos herrühre [140]. Bei Euklid wird es ausdrücklich als Postulat eingeführt, und so könnte der ganze vorhergehende Teil der „Elemente“ als nicht-archimedisch bezeichnet werden. Ebenso wird die Bezeichnung „nicht-euklidische Geometrie“ verworfen, weil Euklid selbst das Parallelaxiom nur als fünftes Postulat einführt, jene Geometrie also eigentlich gerade dem Sinn von Euklid selbst entspreche. Auch gegen die Verwendung des Ausdruckes „Pascalscher Satz“ für einen speziellen Fall des allgemeinen Pascalschen Satzes kämpft er. Er wünscht auch im Historischen die Strenge der Alten, die unter anderem einen Satz dem allein zuschrieben, der ihn bewiesen und damit seine Existenz gezeigt habe, während der ursprüngliche Entdecker nicht einmal zitiert wurde.

Wir wollen unseren Bericht nicht schließen, ohne nochmals der Persönlichkeit Zeuthens in Verehrung zu gedenken. Ich hebe seine immer hohe, gleichmäßige Gesinnung hervor, auch in politischen Dingen, wo er

aufs innigste die Versöhnung der feindlichen Geister durch die Wissenschaft erhoffte; leider trügerisch; er starb, ohne diese geistige Versöhnung gesehen zu haben. Der Adel seiner Gesinnung machte Zeuthen zum ehrwürdigen Mittelpunkt der Gelehrten seines Landes. Seit 1872 mit ihm in brieflichem, manchmal auch in persönlichem, immer herzlichem Verkehr, konnte auch ich immer nur zu ihm aufblicken. Wenn er im allgemeinen in persönlichen Dingen zurückhaltend war, so hat er doch einmal einen Einblick in sein Inneres tun lassen. In der ersten Anmerkung zu der Veröffentlichung der Universitätsrede von 1907 [13] spricht Zeuthen davon, daß dieses Fest der Universität ehemals ein kirchliches war, „pour commémorer la propagation à travers les siècles de vérités qui sont aussi pour moi les plus chères.“ Und am Schlusse der Rede: „Nous (die Professoren als Lehrer) devons donc mettre notre personnalité dans notre travail; mais que cela ne nous incite pas à y chercher notre propre honneur! plaise à Dieu que nous n’y cherchions que la vérité, et que la semence déposée par nous soit bonne et saine.“

Schriftenverzeichnis.

A. Bücher, Vorlesungen, Gelegenheitsschriften.

1. Grundriß einer elementar-geometrischen Kegelschnittslehre. (Leipzig, Teubner, 1882. 8°. VI und 97 S.)
- 1'. [Vorher:] Skelett af en elementar-geometrisk Kegelsnitlsære. (Tidsskr. f. Math. (4) II (1878), S. 23—54, 65—76; VI (1882), S. 109—124, 132—148.)
2. Kegelsnitlsæren i Oldtiden. (Forh. Vid. Selsk. 1885, (6) III 1.)
- 2'. Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verf. besorgt von R. von Fischer-Benzon. Mit 80 Holzstichen. (Kopenhagen 1886. XIV und 511 S. 8°.)
3. Forelæsning over Matematikens Historie: Oldtid og Middelalder. (Kjøbenhavn, A. F. Høst & Søn, 1893, 292 S.)
- 3'. Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter. (Kopenhagen, A. F. Høst & Søn, 1896.)
- 3''. [Französische Ausgabe, besorgt von J. Mascart, Paris 1902.]
4. Forelæsning over Matematikens Historie: XVI. og XVII. Aarhundrede. (Kjøbenhavn, A. F. Høst & Søn, 1903. 8°.)
- 4'. Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert. Deutsche Ausgabe, unter Mitwirkung des Verf. besorgt von Raph. Mayer. Mit 32 Figuren im Text. (Leipzig, Teubner, 1903. VIII und 434 S. 8°.) [Auch als 17. Heft der „Abhandlungen zur Geschichte der math. Wissenschaften“, herausgeg. von Moritz Cantor.]
5. Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Mit 38 Figuren im Text. (Leipzig u. Berlin, Teubner, 1914. XII und 394 S. 8°. Teubners Sammlung von Lehrbüchern, Bd. 39.) [Der dänischen Ges. d. Wiss. überreicht am 16. Okt. 1914.]
6. Øvelser i grafisk Statik. [42 Aufgaben.] (Tidsskr. f. Math. (4) I (1877), S. 27—53.

7. Forelæsninger over Hydrostatik. (Tidsskr. (5) VI (1888), S. 129—152; mit Fortsetzung ibid. 1893.)
8. Forelæsninger over Bevægelses Lære ved Polyteknisk Læreanstalt. (Kjøbenhavn 1896. 18 S. 8^o.)
9. Forelæsninger over trekants Koordinater. (Kjøbenhavn 1896. 64 S. 8^o.)
10. Om Flader af fjerde Orden med Dobbeltkeglesnit. Festskrift i Anledning af Universitetets Firehundredaarsfest Juni 1879. (Kjøbenhavn, Gyldendalske Boghandel, 1879.)
11. Om den historiske Udvikling af Mathematiken som exakt Videnskab indtil Udgangen af det 18^{de} Aarhundrede. Indbydelsesskrift til Kjøbenhavns Universitetets Aarsfest i Anledning af hans Majestæt Kongens Fødselsdag den 8^{de} April 1896. [Rektorsrede 1896; 99 S. 4^o.]
12. Steen og Oppermann. [Festrede vor dem Math. Verein, Kopenhagen 1899.] [Nyt Tidsskr. X (1899), S. 33—45.]
13. Quelques traits sur la propagation de la Science de génération en génération. Discours prononcé à la fête annuelle de l'Université de Copenhague en 1907. (Rivista di Scienza „Scientia“, t. V anno III (1909), Bologna Zanichelli; 17 S.)

B. Abhandlungen.

1859.

14. Hvilken Potents vil være den højeste, hvori $\frac{d^p y}{dx^p}$ forekommer i den n^{te} Differentialligning, udladt af den primitive Ligning $f(x, y) = 0$. (Tidsskr. (1) I, S. 40—44.)

1861.

15. Deskriptiv Bestemmelse af Punkterne i alle Tangenterne til nogle Klasser blandt de geometriske Kurver. (Tidsskr. (1) III, S. 12—22.)

1862.

16. En Bemærkning. (Tidsskr. (1) IV, S. 184—185.)
17. Almindeliggjørelse og Løsning af Opgaver 51; 60. (Tidsskr. (1) IV, S. 185—187. 191—192; ferner (1) VI, S. 134—136; (2) II, S. 111, 160; (3) V, S. 183—188.) [Auch schon in (1) I, S. 44—47 und II, S. 80.]

1863.

- 17'. Opgaver til Løsning. (Tidsskr. (1) V, S. 63—64; ferner (2) I, S. 105—112; (2) II, S. 142—144.)
18. Elementar-geometrisk Fremstilling af nogle Sætninger om Keglersnit-linierne. [Vorbereitung zum Buche [1].] (Tidsskr. (1) V, S. 69—79.)
19. Kongruente plane Figures Stilling mod hinanden i samme Plan. Anvendelse paa Opgaverne 69, 57 og 60. (Tidsskr. (1) V, S. 97—102.)
20. En geometrisk Transformationsmethode. (Tidsskr. (1) V, S. 129—130.)
21. Bemærkninger om Cassinis Ellipse. (Tidsskr. (1) V, S. 157—160.)

1864.

22. Nogle Sætninger. (Tidsskr. (1) VI, S. 78—79.)

1865.

23. Nyt Bidrag til Læren om Systemer af Keglesnit. (Kjøbenhavn 1865, Doktor-dissertation, 97 S.)
- 23'. Nouvelle méthode pour déterminer les caractéristiques des systèmes de coniques. (Nouv. Ann. (2) V, 1866. 80 S.) [Übersetzung von [23] mit einer Zufügung.]

1866.

24. Om rumlige Sektorer paa somme Grundflade. (Tidsskr. (2) II, S. 60—64.)
25. Et Brev fra Dr. H. G. Zeuthen. (Tidsskr. (2) II, S. 97—98.)
26. Bestemmelse af Charakteristikkerne i de elementære Systemer af Flader af anden Orden. (Oversigt Dan. Wetensk. Selsk. 1866, S. 71—72.)
27. Analyse d'un mémoire intitulé: „Addition à la théorie des systèmes de coniques.“ (C. R., t. 62, p. 177—183.)

1867.

28. Note sur les degrés de multiplicités indiquées par le principe de correspondance, suivie d'une application de ce principe à une démonstration des relations Plückeriennes. (Nouv. Ann. (2) VI, S. 200—206.)

1868.

29. Sur les singularités ordinaires des courbes géométriques à double courbure. (C. R., t. 67, p. 225—229.)
30. Elementar-geometriske Beviser for Hovedsætningerne om Keglesnitternes Diameter. (Tidsskr. (1) IV, S. 145—159.)
31. Sur la détermination des caractéristiques des surfaces du second ordre. (Nouv. Ann. (2) VII, p. 385—403.)

1869.

32. Notes sur un système de coordonnées linéaires dans l'espace. (Math. Ann. I, S. 432—454.)
- 32'. Om et nyt Rumkoordinatsystem. (Scand. Naturforsk. Forh. X₁, 1868, S. 148—164.)
33. Sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche et d'une surface développable. (Annali di Mat. (2) III, S. 175—218.)

1870.

34. Sur les points fondamentaux de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. (C. R., t. 70, p. 742—745.)
35. Nouvelle démonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes. (Math. Ann. III, S. 150—156.)
- 35'. Addition au mémoire [35]. (Math. Ann. III, S. 323—324.)
36. Note sur les quadriques polaires. (Annali di Mat. (2) IV, S. 331—337.)

1871.

37. Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface. (Math. Ann. IV, S. 1—20.)
38. Études géométriques de quelques-unes des propriétés de deux surfaces dont les points se correspondent un-à-un. (Math. Ann. IV, S. 21—49.)
39. Note sur la théorie des surfaces réciproques. (Math. Ann. IV, S. 633—637.)
40. Om Dualitetsprincippet. (Tidsskr. (3) I, S. 1—11, 129—140, 161—178.)
- 40'. [Fortsetzung von [40], ebenda (3) II, S. 161—181.]

1872.

41. Détermination des caractéristiques de systèmes élémentaires de cubiques. (C. R., t. 74, p. 521—524, 604—607, 726—730.)

42. Résultats d'une recherche des caractéristiques des systèmes élémentaires de quartiques. (C. R., t. 75, p. 703—707.)
43. Équations de quartiques dont une partie se réduit à une droite double. (C. R., t. 75, p. 950—954.) [Zu [27] gehörig.]
44. Elementært Bevis for en Sætning af den nyere Algebra. (Tidsskr. (3) II, S. 33—56.)

1873.

45. Note sur le principe de correspondance. (Bull. Sc. Math. V, p. 186—191.)
46. Sur les différentes formes des courbes du quatrième ordre. (C. R., t. 77, p. 270—272.)
47. Almindelige Egenskaber ved Systemer af plane Kurver og Anvendelse til Bestemmelse af Karakteristikerne: de elementære Systemer af fjerde Orden. Med 5 Tavler. (Danske Vid. Selsk. Skr. (5) IV, S. 287—393.) Résumé, en français, S. I—XXII.
- 47'. [Auszug aus [47].] (Bull. Sc. Math. VII (1874), p. 97—105.)
48. Mindre Meddelelser: En Rettelse. (Tidsskr. (3) III, S. 56—57; (3) IV, S. 190—192.)
49. Et par Bemærkninger om Undervisning i analytisk Geometri ved de lærde Skoler. (Tidsskr. (3) III, S. 150—153.)

1874.

50. Sur les différentes formes des courbes planes du quatrième ordre. Avec 2 planches lith. (Math. Ann. VII, S. 410—432.)
- 50'. Om Udseendet af Kurver af tredje og fjerde Orden. (Tidsskr. (3) III (1873), S. 97—117; IV (1874), S. 14—18.) [Auszug aus [50], wie schon [46].]
51. Om Fladen af 3^{de} Orden. (Tidsskr. (3) IV, S. 53—62.) [Vortrag über Ch. Wieners Modell.]
52. Étude des propriétés de situation des surfaces cubiques. (Math. Ann. VIII, S. 1—30.)
53. En Utledning af de Plückerske Formuler og af Evoluters Plückerske Tal. (Tidsskr. (3) IV, S. 129—135.)
54. En Bemærkning om Beviserne for Hovedsætninger om Elimination mellem to algebraiske Ligninger. (Tidsskr. (3) IV, S. 165—171.)
55. Détermination des nombres Plückériens des enveloppes. (C. R., t. 78, p. 274—278, 339—349.)
56. Sur les principes de correspondance du plan et de l'espace. (C. R., t. 78, p. 1553—1556.)

1875.

57. Vindskjæve Kurver med konstant forhold mellem Krumningsradius og Torsionsradius. (Tidsskr. (3) V, S. 182—183.)
58. Om 4-dobbelt rørende Kegelsnit til Kurver af fjerde Orden. (Tidsskr. (3) V, S. 182—183.)

1876.

59. Fra Matematikens Historie. (Tidsskr. (3) VI, S. 168—174, 181—191.) [Fortsetzung s. [85] (1882) und [90] (1884).]
60. Sur une classe de points singuliers de surfaces. (Math. Ann. IX, S. 321—332.)
61. Note sur les singularités des courbes planes. (Math. Ann. X, S. 210—220.)
62. Révision et extension des formules numériques de la théorie des surfaces réciproques. (Math. Ann. X, S. 446—546.)

1877.

63. Anvendelse af en Sætning af Maxwell til at finde den billigste Bygningskonstruktion. (Tekn. Forenings Tidsskr., Kjøbenhavn I, S. 104—118.)
64. Om nulpunkt Cirkler. (Tidsskr. for M. (4) I, S. 113—117.)
65. Om Udvidelser af Definitioner i den elementære Arithmetik og Algebra. (Tidsskr. (4) I, S. 141—151.)
66. Nogle Exempler på leddede Stangsystemer. (Tidsskr. (4) I, S. 161—174.)

1879.

67. Om Konstruktioner af tovpolygoner [Seilpolygonen] til givne kræfter i Rummet. (Tidsskr. (4) III, S. 46—57.)
68. Svar på nogle bemærkninger af Prof. Bjørling. (Tidsskr. (4) III, S. 74—78.)
69. Déduction de différents théorèmes géométriques d'un seul principe algébrique. (Proc. London Math. Soc. X, p. 196—204; XI, p. 156—157.)
70. Détermination de courbes et de surfaces satisfaisant à des conditions de contact double. (C. R., t. 89, p. 899—902, 946—948.)
71. Nogle hypoteser om Archimedes kvadratrods Beregning. (Tidsskr. (4) III, S. 145—155.)
72. Nogle Egenskaber ved Kurver af fjerde Orden med to Dobbelpunkter. Avec un résumé en français. (Overs. Dan. Vidensk. Selsk. Forh., S. 89—122; Résumé, S. 15—19.)

1880.

73. Om antalgeometriens anvendelse til Utleddelse af sædvanlige geometriske Sætninger. (Skand. Nat. möt. Förh. 1880, Stockholm 1883, S. 155—163.)
74. Nogle tilsyneladende Paradoxer i Læren om Centralbevægelser. (Tidsskr. (4) IV, S. 3—9.)
75. Et bevis for at ligningen $f(x, y, y') = 0$ har et fuldstændigt Integral. (Tidsskr. (4) IV, S. 161—167.)
76. Konstruktion af det ottende Skæringspunkt mellem de Flader af anden Orden som gaa gennem syv givne Punkter, mit Résumé u. Tafel. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., 227—236 u. 2 S. Résumé.) [Anschließend an [79].]
77. Sur la détermination d'intégrales algébriques de différentielles algébriques. (C. R., t. 90, p. 1114—1118.)
78. Grafisk Behandling af en Bjælkes bevægelig Belastning. (Tekn. Foren. Tidsskr. 1880)

1881.

79. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (Math. Ann. XVIII, S. 33—68.)
80. Bestemmelse af største fælles Faktor til Polynomier ved Determinanter. (Tidsskr. (4) V, S. 45—55.)

1882.

81. Om stationäre Kurver i et System. (Tidsskr. (4) VI, S. 5—13.)
82. Bevis for en Konstruktion af Chasles. (Tidsskr. (4) VI, S. 13—16.)
83. Elementær Behandling af et par Sætninger om et Punkts Bevægelse. (Tidsskr. (4) VI, S. 46—50.)
84. Nogle rationale Relationer mellem Længder. (Tidsskr. (4) VI.)
85. Fra Matematikens Historie II, III. (Tidsskr. (4) VI, S. 47—101.)
86. Om mekanisk konstruktion af Descartes Ovaler ved Hjælp af Snore. (Tidsskr. (4) VI, S. 145—154.)

1883.

87. Et elementært Bevis for Pascals Sætning. (Tidsskr. (5) I, S. 78—81.)
 88. Om Sammensætning af en Punkts Hastigheder. (Tidsskr. (5) I, S. 156—162.)
 89. Sur un groupe de théorèmes et de formules de la géométrie énumérative. (Acta Math. I, S. 171—188.)

1884.

90. Fra Matematikens Historie. IV. Prøver paa Diofant's Løsning af arithmetiske Opgaver. (Tidsskr. (5) I, S. 145—156.)
 91. Anden Konstruktion af Dobbelpunkterne i Projektionen af en to Keglesnitsfladers Skjæringskurve. (Tidsskr. (5) II, S. 60—63.)
 92. Sur les pentaèdres complets inscrits à une surface cubique. (Extr. d'une lettre à M. C. le Paige.) (Acta Math. V, S. 203—204.)

1885.

93. Et Udledning af Duhamel's Konvergenzbetingelse. (Tidsskr. (5) III, S. 147—149.)
 94. Adolph Steen. (Tidsskr. (5) IV, S. 65—70.)
 95. Théorie des figures projectives sur une surface du second ordre. (Second article.) (Math. Ann. XXVI, S. 247—274.) [Fortsetzung von [79].]

1886.

96. Construction du 8^e point commun aux surfaces du second ordre qui passent par 7 points donnés. (J. f. Math. 99, S. 320—323.)
 97. Su le superficie di 4^o ordine con conica doppia. (Annali di Mat. (2) XIV, S. 31—70.)
 98. Et Udledning af Betingelsen for at en Flade af anden Orden er udfoldelig. (Tidsskr. (5) IV, S. 128—130.)
 99. Om Momentsætninger i Statiken. (Tidsskr. (5) IV, S. 145—154.)
 100. Om den matematiske Behandling af Gnidningsmodstanden. (Tidsskr. (5) IV, S. 168—174.)
 101. Nogle Bestemmelser af Pyramidens Volumen. (Tidsskr. (5) IV, S. 175—179.)

1887.

102. Note sur un problème de Steiner. (Extr. d'une lettre à M. P. H. Schoute.) (Bull. Sc. Math. (2) XI, S. 82—86.)
 103. Om algebraiske Kurvers Bestemmelse ved Punkter. (Tidsskr. (5) V, S. 65—79.)
 103'. Sur la détermination d'une courbe algébrique par des points donnés. (Math. Ann. XXXI (1888), S. 236—251.) [Übersetzung und kleine Erweiterung von [103].]

1888.

104. Note sur l'usage des coordonnées dans l'antiquité et sur l'invention de cet instrument. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 127—144.)

1889.

105. Note sur les 8 points d'intersection de trois surfaces du second ordre. (Acta Math. XII, S. 362—366.)
 106. Extrait d'une lettre adressée à M. Guccia. (Palermo Rendic. III, S. 171—178.) [Auf Geschlecht p zerfallender Kurven bezüglich.]

1890.

107. Om Omdannelse af Differentialligninger med to Variable ved Indførelse af Liniekoordinater. (Nyt Tidsskr. I, S. 1—10.)
 108. Bevis for at en algebraisk Ligning altid har en Rod. (Nyt Tidsskr. I, S. 65—67.)

109. Analytisk Løsning og almindeliggjørelse af den Opgave: paa en Kugleflade at finde en Kurve med konstant Krumning. (Nyt Tidsskr. I, S. 67—76.)
110. Sur la révision de la théorie des caractéristiques de M. Study. (Extrait d'une lettre à M. Klein) (Math. Ann. XXXVII, S. 461—464.)

1892.

111. Om Konstruktionen som Existensbevis i den græske Mathematik. (Nyt Tidsskr. IIIA, S. 105—113.)
112. Nouvelle démonstration du princip de correspondance de Cayley et Brill, et méthode à la détermination des coïncidences de correspondances algébriques sur une courbe d'un genre quelconque. (Math. Ann. XL, S. 99—124.)

1893.

113. Exemples de la détermination des coniques dans un système donné qui satisfont à une condition donnée. (Math. Ann. XLI, S. 539—544.)
114. Note sur la résolution géométrique d'une équation du 3^e degré par Archimède. (Bibliotheca math. Neue Folge VII, S. 97—104.)
115. Notes sur l'histoire des mathématiques: I. Sur la résolution numérique d'une équation du 3^e degré par Léonard de Pise. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 6—17.) [Vorher, S. 1—5: Einleitung in die „Notes“.]
116. Notes sur l'histoire des mathématiques: II. Tartalea contra Cardanum: réplique relative à la question de priorité sur la résolution des équations cubiques. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 303—330.)
117. Notes sur l'histoire des mathématiques: III. Sur la signification traditionnelle du mot „géométrique“. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 330—341.)
118. Nogle Bemærkninger over Bestemmelser af Asymptoterne til Kurver bestemte af en Differentialligning af 1^{ste} Orden. (Nyt Tidsskr. IV B, S. 33—77.)

1894.

119. M. Maurice Cantor et la géométrie supérieure de l'antiquité. (Bull. Sc. Math. (2) XVIII, S. 163—169.)

1895.

120. Notes sur l'histoire des mathématiques: IV. Sur les quadratures avant le calcul intégral, et en particulier sur celles de Fermat. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 37—80.)
121. Notes sur l'histoire des mathématiques: V. Sur le fondement mathématique de l'invention du calcul infinitésimal. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 193—256.)
122. Notes sur l'histoire des mathématiques: VI. Sur quelques critiques faites de nos jours à Newton. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 257—278.)
123. Réponse aux remarques de M. Cantor. (Bull. Sc. Math. (2) XIX, S. 183—184.)

1896.

124. Die geometrische Construction als „Existenzbeweis“ in der antiken Geometrie. (Math. Ann. XLVII, S. 222—228.)

1897.

125. Notes sur l'histoire des mathématiques: Suite. VII. Barrow, le maître de Newton. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 565—606.)
126. Bemærkninger om, og nyt Bevis for Fundamentalsætninger i den projective Geometri. (Nyt Tidsskr. VIIIB, S. 73—85.)
127. Nouvelle démonstration du théorème fondamental de la géométrie projective. (C. R., t. 125, p. 638—640, 858—859.)

1898.

128. Sur le fondement de la géométrie projective. (C. R., t. 126, p. 213—215.)
 129. Isaac Barrow et la méthode inverse des Tangentes. (Verh. des I. intern. Math.-Congr. Zürich, S. 274—280.)

1900.

130. Om en Art antalgeometriske Beviser. (Nyt Tidsskr. XB, S. 49—51.)
 131. Kleine Bemerkungen zur 2^{ten} Auflage von M. Cantor's „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“. (Biblioth. math. (3) I [unter den Bemerkungen von anderen Seiten].)
 132. Note sur la trigonométrie de l'antiquité. (Biblioth. math. (3) I, S. 20—27.)
 133. Historisk og geometrisk Studie af Descartes' Tangenterkonstruktion. (Nyt Tidsskr. XB, S. 51—58.)

1901.

134. Auszug aus einem Schreiben Z.'s an E. Wölffing. (Math.-naturwiss. Mitteil. Württemberg (2) III, S. 55—56.)
 135. Preisfrage der Dan. Vid. Selsk. (Dan. Vid. Selsk., Questions mises au concours pour 1901.)

1903.

136. Ved Forelæggelsen af Matematikens Historie: 16^{ste} og 17^{ste} Aarhundrede. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 553—572.)

1904.

137. Sur l'arithmétique géométrique des Grecs et des Indiens. (Bibl. math. (3) V, S. 97—112.)
 138. Théorème de Pythagore. Origine de la géométrie scientifique. (C. R. du II. Congrès internat. de Philosophie Genève. S. 833—854.)

1905.

139. L'œuvre de Paul Tannery comme historien des mathématiques. (Mit Porträt als Titelbild.) (Biblioth. math. (3) VI, S. 257—304.) [Mit Einleitung und Schriftenverzeichnis von G. Eneström.]
 140. Gebrauch und Mißbrauch historischer Benennungen in der Mathematik. (Verh. des III. internat. Math.-Kongr. Heidelberg, S. 536—542.)

1906.

141. Abzählende Methoden: III C3. (Encyklopädie der math. Wiss. Bd. III, S. 257—312.)
 142. Le principe de correspondance pour une surface algébrique. (C. R., t. 143, p. 491—495, 535—539.)
 143. J. L. Heiberg u. H. G. Zeuthen: Eine neue Schrift von Archimedes. (Bibl. math. (3) VII, S. 321—363 [1907 auch als Sonderabzug erschienen].) [Übersetzung von Heiberg, math. Kommentar von Zeuthen.]

1907.

144. J. L. Heiberg u. H. G. Zeuthen: Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik. (Bibl. math. (3) VIII, S. 118—134.) [13 planimetrische Aufgaben.]

1909.

145. Exemple d'une correspondance sans Wertigkeit. Atti del IV Congresso internat. dei Matematici Rom, Bd. II, S. 227—230.)
 146. Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la géométrie. (Atti del IV Congresso internat. dei Matematici Rom, Bd. III, S. 422—427.)

147. Über einige archimedische Postulate. (Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften u. der Technik, Leipzig bei F. C. W. Vogel, I. S. 320—327.)
148. Introduction à un traité didactique des méthodes énumératives de la géométrie. (C. R. du Congrès des Mathématiciens à Stockholm. S. 32—42.) [Auf das geplante Werk [5] bezüglich.]

1910.

149. Notes sur l'histoire des mathématiques: VIII. Sur la constitution des livres arithmétiques des *Éléments* d'Euclide et leur rapport à la question de l'irrationalité. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh. S. 395—435.)

1912.

150. Die Mathematik im Altertum und im Mittelalter. (Kultur der Gegenwart; Teubner, Leipzig u. Berlin. III. Teil, I. Abt.: Die mathematischen Wissenschaften. VIII u. 95 S.)
151. Præcisionsmathematikens Tilbliven fra Pythagoras til Euklid. (Bericht des 2. skand. Kongresses, Kopenhagen 1912.)
152. Om og i Anledning af Indernes Bortskaffen af dobbelt Irrationalitet. (Nyt Tidsskr. XXII A, S. 77—81.)

1913.

153. Notes sur l'histoire des mathématiques: IX. Sur les connaissances géométriques des Grecs avant la Réforme Platonicienne. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 431—473.)
154. Geometriske Synsmaader før Platon. (Nyt Tidsskr. 24 A, S. 105—124.)

1914.

155. Om Anvendelse af regning og af raisonnement i Mathematiken. Ved Forelæggelsen: Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie. Leipzig 1914. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 271—286.)

1915.

156. Sur l'origine historique de la connaissance des quantités irrationnelles. (Overs. Dan. Vid. Selsk. Forh., S. 333—362.)
157. Géométrie énumérative. III, 4. D'après l'article allemand par M. Pieri (Parme). Encyclopédie des Sc. math., t. III, v. I., p. 260—331.)

1917.

158. Hvorledes Mathematiken i Tiden fra Platon til Euklid blev rational Videnskab. Avec un résumé en français. (Forh. Dan. Vid. Selsk. (8) I, S. 199—369. Résumé S. 370—379.)

1918.

159. Sur les définitions d'Euclide. (Scientia, vol. 24, anno 12, p. 255—269.)

1919.

160. Sur l'origine de l'Algèbre. (Dan. Vid. Selsk., Math.-fys. Meddelser II, 4. 70 S.)
161. Erklärung eines „Paradox“ in der abzählenden Geometrie. (Archiv d. Math. u. Phys. (3) XXVIII, S. 52—55.)

(Eingegangen am 11. 11. 1920.)