4. Bemerkungen über das Ohm'sche Gesetz; von J. Stark.

Die vorliegende Mitteilung soll eine Ergänzung und Fortsetzung einer Abhandlung¹⁾ sein, die jüngst in diesen Annalen veröffentlicht wurde. Sie soll einmal Missverständnissen vorbeugen, indem sie den Unterschied zwischen einer wahren und einer scheinbaren Abweichung vom Ohm'schen Gesetz auseinandersetzt, ferner indem sie die Bezeichnung „elektromotorische Kraft“ bespricht. Sodann soll sie eine Formel geben für die Grenze der Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes.

I. Inhalt und Formen des Ohm'schen Gesetzes.

1. *Die Ohm'schen Differentialgesetze.* — Der Grundgedanke des Ohm'schen Gesetzes im Sinne der Ionentheorie ist der Satz, dass die Stromstärke und darum auch die Geschwindigkeit der wandernden Ionen in einem Querschnitt proportional ist der örtlichen auf die Ionen wirkenden Kraft. Eine Kraft, welche durch Bewegung von Ionen einen elektrischen Strom erzeugt, heiße elektrische Triebkraft.

J_p positive, J_n negative, J_g gesamte Stromdichte; X_p elektrische Triebkraft auf die positiven, X_n auf die negativen Ionen; n_p positive, n_n negative Ionisation (Zahl der freien Ionen in der Volumeneinheit); V_p positive, V_n negative Ionengeschwindigkeit; v_p positive, v_n negative spezifische Ionengeschwindigkeit (Beweglichkeit); ϵ Ladung des Ions; $\lambda = \epsilon \cdot (n_p \cdot v_p + n_n \cdot v_n)$ Leitfähigkeit.

Bei Einführung dieser Bezeichnungen besitzt das Ohm'sche Gesetz für den stationären Strom folgende Form:

$$(1) \quad \begin{cases} J_p = n_p \cdot \epsilon \cdot V_p = n_p \cdot \epsilon \cdot v_p \cdot X_p, \\ J_n = n_n \cdot \epsilon \cdot V_n = n_n \cdot \epsilon \cdot v_n \cdot X_n, \\ J_g = J_p + J_n. \end{cases}$$

1) J. Stark, Ann. d. Phys. 5. p. 89. 1901.

Die elektrische Triebkraft X lässt sich zerlegen in zwei Teile. Der eine Teil rührt her von der Verteilung elektrischer Spannung V , er ist gleich dem negativ gesetzten Spannungsgefälle $(-dV/dx)$, er ist für die positiven und die negativen Ionen gleich gross. Der andere Teil rührt her von inneren elektrischen Triebkräften in dem betrachteten Querschnitt, die keine elektrische Spannung besitzen; er sei mit E_{ip} bez. E_{in} bezeichnet. Bei Einführung dieser Benennungen nehmen die obigen Gleichungen folgende Form an:

$$(2) \quad \begin{cases} J_p = -n_p \cdot \varepsilon \cdot v_p \left(\frac{dV}{dx} - E_{ip} \right), \\ J_n = -n_n \cdot \varepsilon \cdot v_n \left(\frac{dV}{dx} - E_{in} \right). \end{cases}$$

Sind E_{ip} und E_{in} einander gleich, so seien sie mit E_i bezeichnet. Sind sie nicht gleich, so sei eine scheinbare gemeinsame innere elektrische Triebkraft E_i eingeführt; es sei nämlich

$$E_i = \frac{1}{n_p \cdot v_p + n_n \cdot v_n} \cdot (n_p \cdot v_p \cdot E_{ip} + n_n \cdot v_n \cdot E_{in}).$$

Bei Einführung dieser gemeinsamen inneren elektrischen Triebkraft erhält man für den Ohm'schen Gesamtstrom folgenden Ausdruck:

$$(3) \quad J_g = J_p + J_n = -\varepsilon \cdot (n_p \cdot v_p + n_n \cdot v_n) \cdot \left(\frac{dV}{dx} - E_i \right),$$

$$(4) \quad J_g = -\lambda \cdot \left(\frac{dV}{dx} - E_i \right).$$

Die im Vorstehenden gegebenen Formeln lassen sich passend als Ohm'sche Differentialgesetze bezeichnen; sie stellen nämlich die Stromstärke in einem bestimmten *Querschnitt* dar entsprechend der hier vorhandenen elektrischen Triebkraft, Ionisation und spezifischen Ionengeschwindigkeit.

2. *Die Ohm'schen Integralgesetze.* — Um das Ohm'sche Gesetz für das *Leiterstück* ($x_2 - x_1 = l$) zu erhalten, dividiren wir beide Seiten der Gleichung (4) mit λ , multipliciren mit dx und integriren zwischen x_1 und x_2 .

$$J_g \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda} = - \int_{x_1}^{x_2} dV + \int_{x_1}^{x_2} E_i \cdot dx = (V_1 - V_2) + \int_{x_1}^{x_2} E_i \cdot dx.$$

Die Grösse

$$r = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\lambda}$$

stellt den Widerstand zwischen x_1 und x_2 dar; ist λ räumlich constant, so ist in bekannter Weise

$$r = \frac{x_2 - x_1}{\lambda} = \frac{l}{\lambda};$$

für den Querschnitt q gilt $r = (l/q \cdot \lambda)$.

Die Grösse $(V_1 - V_2)$ ist die Spannungsdifferenz zwischen x_1 und x_2 . Die Grösse

$$\int_{x_1}^{x_2} E_i \cdot dx$$

stellt dar eine Arbeit, zu leisten von der inneren elektrischen Triebkraft E_i an der Ladungseinheit, also eine in dem Leiterstück enthaltene potentielle Energie bezogen auf die Ladungseinheit; sie sei mit E_i bezeichnet und innere elektrische Triebenergie oder, wie es üblich ist, innere elektromotorische Kraft genannt.

Bei Einführung von r und E_i erhält man:

$$(5) \quad J_g = \frac{(V_1 - V_2) + E_i}{r}.$$

Dies ist die übliche allgemeine Form des Ohm'schen Gesetzes für ein Leiterstück. Ist in dem Leiterstück keine innere elektrische Triebkraft und darum auch keine innere elektrische Triebenergie oder elektromotorische Kraft enthalten, so wird noch einfacher

$$(6) \quad J_g = \frac{V_1 - V_2}{r}.$$

Ist in diesem Fall r constant, so ist die Stromstärke proportional der Spannungsdifferenz (Klemmspannung, Elektroden-spannung).

Um das Ohm'sche Gesetz für den ganzen Stromkreis zu erhalten, hat man Gleichung (4) über den ganzen Stromkreis zu integrieren. Man erhält

$$(7) \quad J_g = \frac{\sum E_i}{\sum r}.$$

Die Grösse $\sum E_i$ stellt die Summe aller in dem Kreis enthaltenen inneren elektromotorischen Kräfte (Triebenergien) dar, $\sum r$ die Summe aller Widerstände.

3. *Die Bezeichnung „elektromotorische Kraft“.* — Die Grösse E_i , die hier innere elektrische Triebkraft genannt wird, ist eine Kraft, welche Elektrizität in Bewegung setzt. Man könnte sie darum sachgemäss innere elektromotorische Kraft nennen, und in diesem Sinne habe ich diese Bezeichnung in meiner eingangs citirten Abhandlung auch gebraucht. Doch ist diese meine Ausdrucksweise nicht glücklich und kann zu Verwechslungen Anlass geben. Unter elektromotorischer Kraft versteht man nämlich in der Regel die Grösse E_i , die innere elektrische Triebenergie, wie sie oben genannt wurde. Freilich ist E_i gar keine Kraft, sondern eine Energie bezogen auf die Ladungseinheit; die Bezeichnung elektromotorische Kraft in diesem Sinne ist darum verfehlt und irreführend, aber sie hat sich einmal eingebürgert und deshalb muss sie beibehalten werden.

Nachdem die Bezeichnung elektromotorische Kraft, eigentlich der richtige Name für die Kraft E_i , einmal für die Energie E_i weggegeben ist, möchte man fast versucht sein, die Kraft E_i innere elektrische Energie zu heissen. Doch sei sie innere elektrische Triebkraft genannt, solange kein besseres Wort dafür gefunden ist. Möge die Lautähnlichkeit von elektrischer Triebkraft und elektromotorischer Kraft gerade zum Nachdenken anregen über den sachlichen Unterschied der beiden Bezeichnungen.

4. *Scheinbare und wahre Abweichung vom Ohm'schen Gesetz.* — Wie man das Ohm'sche Gesetz für elektrolytische und metallische Leiter auf Grund der speciellen Form

$$J_g = \frac{V_1 - V_2}{r}$$

prüfte, so hat man es auch auf Grund derselben Form für durchströmte Gase geprüft und gefunden, dass für diese die Proportionalität zwischen Stromstärke und Elektrodenspannung in den meisten Fällen nicht vorhanden ist. Und auf diesen Befund hin sprach man dann von einer Ungültigkeit des Ohm'schen Gesetzes oder von Abweichungen von demselben in Gasen.

Dies ist zum mindesten ungenau und eine Folge unbewusster unberechtigter Voraussetzungen. Man nahm stillschweigend an, dass der Widerstand eines Gases unabhängig von der Stromstärke sei und dass sich bei Stromdurchgang keine inneren elektromotorischen Kräfte entwickeln. Dies darf man nicht thun. Man muss vielmehr von dem allgemeineren Gesetz

$$J_g = \frac{(V_1 - V_2) + E_i}{r}$$

ausgehen und E_i sowohl wie r als Functionen von J_g zulassen. Die Versuche über die Beziehung zwischen Stromstärke und Elektrodenspannung allein können über die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes nicht entscheiden; man kann unter Berufung auf sie höchstens von einer scheinbaren Abweichung sprechen, indem man eben die Form des Ohm'schen Gesetzes schwankend lässt.

Wenn ich in der eingangs citirten Abhandlung von einer Abweichung vom Ohm'schen Gesetz sprach, so meinte ich nicht die hier charakterisirte scheinbare Abweichung, sondern eine wahre. Um die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze klar definiren zu können, hat man auf dessen Differentialform zurückzugehen.

Der Grundgedanke des Ohm'schen Gesetzes ist der Satz, dass die Stromstärke und die Ionengeschwindigkeit in einem bestimmten Querschnitt proportional ist der örtlichen Triebkraft, unabhängig von der Kraft in den benachbarten Querschnitten, oder mit anderen Worten unabhängig von der räumlichen Variation der Triebkraft. Und „Ohm'sches Gesetz gilt nicht mehr“ heisst: „der vorstehende Satz gilt nicht mehr“. In diesem Sinne habe ich von einer Abweichung vom Ohm'schen Gesetz gesprochen.

II. Gültigkeitsgrenze des Ohm'schen Gesetzes.

1. *Grenzformel.* — Es sei l die freie Weglänge der Ionen im elektrischen Strome, μ ihre Masse. Innerhalb der Weglänge sei die Triebkraft X räumlich constant. Die mittlere Geschwindigkeit sei wieder v . X zwischen zwei aufeinander folgenden Zusammenstößen; beim Zusammenstoss soll das Ion

den grössten Teil seiner Geschwindigkeit einbüssen, $2v \cdot X$ ist dann die Endgeschwindigkeit vor dem Zusammenstoss. Wir nehmen ferner an, dass die Selbstinduction des Ions oder die Arbeit zur Schaffung seines magnetischen Feldes sehr klein sei, dass also die elektrische Arbeit an ihm sich vollständig in kinetische Energie verwandle. Diese Annahmen, die ja nicht genau der Wirklichkeit entsprechen, machen wir, um vorläufig wenigstens eine angenäherte Grenzformel für die Gültigkeit des Ohm'schen Gesetzes zu erhalten.

Unter den gemachten Annahmen gilt:

$$\frac{1}{2} \mu (2v \cdot X)^2 = \varepsilon \cdot X \cdot l \quad \text{oder} \quad l = 2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot v^2 \cdot X.$$

Das Ohm'sche Gesetz gilt nur so lange genau, als die freie Weglänge der Ionen klein ist im Vergleich zur Länge des Leiterstückes (Δx), innerhalb dessen die Triebkraft um einen merklichen Betrag (ΔX) sinkt. Es muss also sein:

$$l / \frac{\Delta x}{\Delta X} = l \cdot \frac{\Delta X}{\Delta x} < -k,$$

wo k einen kleinen echten Bruch bedeutet.

Das Ohm'sche und das allgemeinere Strömungsgesetz haben einander natürlich allmählich abzulösen; wir wollen indes eine bestimmte Grenze zwischen ihnen festsetzen. Beträgt die Abweichung einer stationären elektrischen Strömung vom Ohm'schen Gesetz mehr als 1 Proc., so soll das Ohm'sche Gesetz nicht mehr gelten. Diese Forderung wird durch die Formel ausgedrückt:

$$(8) \quad l \cdot \frac{\Delta X}{\Delta x} < -\frac{1}{100}.$$

Bei Einführung des oben abgeleiteten Wertes für l erhält man:

$$(9) \quad \frac{\Delta X}{\Delta x} < -\frac{1}{100} \cdot \frac{\varepsilon}{2\mu \cdot v^2 \cdot X}.$$

Aus diesen Formeln ist folgendes zu entnehmen. Da wo die Kraft räumlich constant ist, gilt das Ohm'sche Gesetz immer. Bei räumlicher Variation der Kraft gilt es in einem desto grösseren Bereich, je grösser $\Delta X / \Delta x$, absolut genommen, nach der Grenzformel sein darf. Die Gültigkeit hängt in diesem Falle von der specifischen Geschwindigkeit und der Kraft ab; für kleine Werte der Kraft kann das Ohm'sche

Gesetz noch gelten, für grössere unter sonst gleichen Umständen nicht mehr. Auch kann es für einige Teile der Strömung nicht mehr gelten, während es für die übrigen gleichzeitig noch gilt.

2. *Gültigkeitsgrenze für gewöhnliche Leiter.* — Von Interesse ist die Frage, ob der Fall eintreten kann, dass das Ohm'sche Gesetz für gewöhnliche Leiter, Elektrolyte und Metalle, nicht mehr gilt. Diese Frage läuft darauf hinaus, den Wert von $\Delta X / \Delta x$ zu ermitteln, der gerade noch zulässig ist, wenn das Ohm'sche Gesetz noch gelten soll. Für Elektrolyte lässt sich diese Frage beantworten.

Die grösste spezifische Ionengeschwindigkeit in einem Elektrolyt ist diejenige von Wasserstoff, sie beträgt für 1 Volt auf 1 cm $2,94 \cdot 10^{-3}$, ϵ/μ ist $1,94 \cdot 10^4$. Wir nehmen an, wir hätten eine ionisirte Wasserstoffverbindung, in welcher der Spannungsabfall 100 Volt auf 1 cm beträgt, was gewiss kaum mehr realisierbar ist; die Triebkraft X sei identisch mit dem Spannungsgeställe, X sei also 100.

Setzen wir diese Werte in die Grenzformel (9) ein, so erhalten wir:

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} < - \frac{1}{100} \cdot \frac{1,94 \cdot 10^4}{2 \cdot 8,64 \cdot 10^{-6} \cdot 100} = - 1,1 \cdot 10^5.$$

Selbst also wenn in diesem für eine Abweichung am günstigsten Falle auf 1 cm die Kraft von 100 auf Null sinken würde, würde das Ohm'sche Gesetz doch noch gelten, oder mit anderen Worten in den flüssigen Elektrolyten sind Abweichungen vom Ohm'schen Gesetz nicht zu verwirklichen.

Ob Abweichungen in Metallen sich realisiren lassen, können wir vorderhand nicht entscheiden, da wir für diese Leiter weder ϵ/μ noch v genau kennen.

3. *Gültigkeitsgrenze für Gase.* — Es liegt nahe, spezifische Ionengeschwindigkeiten in Gasen mit Hülfe der Angaben der kinetischen Gastheorie berechnen zu wollen. Dies ist aber nicht zulässig und würde sicherlich zu falschen, und zwar zu grossen Werten führen. Denn die kinetische Gastheorie gilt zwar für elektrisch neutrale Gasteilchen, aber nicht mehr für ionisirte Gase, aus folgendem Grunde. In nicht ionisirten Gasen sind die Kräfte zwischen den Gasteilchen klein, in ionisirten Gasen dagegen sind die Kräfte zwischen einem Ion und einem

benachbarten Teilchen (genauer ihr Potential in Bezug aufeinander) im Verhältnis zu der kinetischen Energie des einzelnen Teilchens nicht mehr klein. Diese Kräfte sind analog der Wechselwirkung zwischen einem geladenen Körper und einem Dielektricum oder einem zweiten geladenen Körper, je nachdem das benachbarte Teilchen ein neutrales Gasmolecül oder ein zweites Ion ist. Dies hat zwei wichtige Folgen; einmal sind die Wege der Ionen in Gasen nicht mehr aus geradlinigen, sondern aus krummlinigen Stücken zusammengesetzt; zweitens ist die mittlere freie Weglänge des Ions kleiner als diejenige eines entsprechenden neutralen Gasmolecüls. Die inneren Kräfte im Gase wirken bei der Bewegung eines Ions unter einer elektrischen Triebkraft gerade so, wie wenn das Ion durch fremde Massen belastet wäre. Aus alledem folgt, dass die Geschwindigkeit eines Ions in einem Gas unter einer bestimmten elektrischen Triebkraft kleiner ist als die Geschwindigkeit eines neutralen Gasmolecüles unter der gleichen Kraft.

Da wir also die Ionengeschwindigkeiten in Gasen nicht berechnen können, müssen wir für unseren Zweck die Werte benutzen, die bei Untersuchung der elektrischen Strömung in Gasen mehr oder weniger direct gefunden wurden. Diese Werte sind zwar kaum sehr genau, sie geben aber doch wohl die Grössenordnung. Für Wasserstoff von atmosphärischem Druck ergab sich im Durchschnitt (Rutherford, Townsend, Chattock) für das negative Ion $6,07 \text{ cm sec}^{-1}$ für 1 Volt auf 1 cm; ϵ/μ sei wieder $1,94 \cdot 10^4$; X sei gleich dem Spannungsgefälle und gleich 10, was für Gase wenig ist.

Damit dann für Wasserstoff von Atmosphärendruck das Ohm'sche Gesetz noch gilt, muss sein:

$$\frac{\Delta X}{\Delta x} < - \frac{1}{100} \cdot \frac{1,94 \cdot 10^4}{2 \cdot 6,07^2 \cdot 10} = - 0,26,$$

oder es darf auf 1 cm das Spannungsgefälle nicht um 0,26 von 10 sinken, oder auf 1 mm nicht um 0,026. Für die positiven Ionen und für andere Gase als Wasserstoff ergibt sich der Grenzwert von $\Delta X/\Delta x$ von derselben Grössenordnung.

Nun aber lassen sich in durchströmten Gasen unmittelbar an den Elektroden weit grössere räumliche Aenderungen des Spannungsgefälles nachweisen. Wir kommen darum zu folgendem Schluss. Es ist möglich, dass in Gasen an Stellen grosser

räumlicher Variation der elektrischen Triebkraft schon bei Atmosphärendruck das Ohm'sche Gesetz nicht mehr gilt. Dies ist noch mehr der Fall in verdünnten Gasen; denn hier ist die freie Weglänge grösser; demgemäss wird nach der Formel:

$$l \cdot \frac{\Delta X}{\Delta x} < - \frac{1}{100}$$

der höchst zulässige Wert von $\Delta X / \Delta x$ noch kleiner.

Verdünnte Gase bieten in dieser Beziehung noch in einer anderen Hinsicht Interesse. Die Grenzformel (9) gilt sowohl für den Strom der positiven wie für den Strom der negativen Ionen. Bezeichnen wir die dem einen bez. dem anderen zugehörigen Grössen mit p bez. mit n , so gilt:

$$\frac{\Delta X_p}{\Delta x} < - \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)_p \cdot \frac{1}{2 v_p^2 X_p}$$

bez.

$$\frac{\Delta X_n}{\Delta x} < - \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{\epsilon}{\mu} \right)_n \cdot \frac{1}{2 v_n^2 X_n}$$

Zu beachten ist, dass v die Grösse ϵ/μ als Factor enthält, sodass ϵ/μ in den vorstehenden Formeln in Wirklichkeit im Nenner auftritt. Nun hat sich in verdünnten Gasen $(\epsilon/\mu)_p$ von der Grössenordnung 10^4 ergeben, $(\epsilon/\mu)_n$ von der Ordnung 10^7 . Demgemäss können in einem durchströmten verdünnten Gase die positiven Ionen dem Ohm'schen Gesetz noch folgen, während dies unter gleichen Umständen die negativen Ionen nicht mehr thun.

4. *Folgen der Abweichung.* — In mehreren Veröffentlichungen habe ich bereits auf wichtige Folgen des elektrischen Convectionsstromes oder Ionenschusses, wie ich mich auch ausdrückte, hingewiesen. Der Ionenschuss hat einmal eine Verschiebung zwischen dem Ort der elektrischen Arbeit und dem Ort der Joule'schen Wärme zur Folge; sodann bedingt er den Gangunterschied zwischen Kraft und Ionisirung. Weiter verursacht die Ansammlung von Ionen, die aus Stellen grosser Kraft in Stellen kleiner Kraft schiessen, das Auftreten innerer Ladungen. Ferner veranlasst er unter Umständen eine Abweichung der Stromlinien von der Richtung der Kraftlinien. Endlich ist die Abweichung vom Ohm'schen Gesetz oder der elektrische Convectionsstrom im Falle grösseren Betrages der wichtigste Factor für das Zustandekommen der Schichtung.

Was die inneren Ladungen infolge des Ionenschusses betrifft, so sei hier lediglich darauf aufmerksam gemacht, dass sie durch ihre rückstauende Wirkung die Aufrechterhaltung des stationären Zustandes mitbedingen. Was die Schichtung betrifft, so sei an der Hand der Grenzformel:

$$l \cdot \frac{\Delta X}{\Delta x} < -k$$

folgendes über ihre Abhängigkeit bemerkt.

Schichtenbildung ist bei jedem Gasdruck möglich, sofern nur für grosse Ionengeschwindigkeiten und schnelle räumliche Variation der Triebkraft (z. B. durch Einschnürung der Strombahn) gesorgt wird. Da die Abweichung vom Ohm'schen Gesetze von den Werten von X und $\Delta X/\Delta x$ abhängt, so kann je nach der Grösse dieser Werte an verschiedenen Orten der Strömung ein Teil von dieser bereits geschichtet, der übrige noch ungeschichtet sein.

In verdünnten Gasen wird die Schichtung wesentlich durch die negativen Ionen bedingt, da diese wegen ihres grossen ϵ/μ stärker und früher als die positiven Ionen vom Ohm'schen Gesetz abweichen. Die Schichtenlänge hängt in diesem Falle von l ab; sie ist um so grösser, je grösser l ist. l wächst mit X und mit abnehmendem Druck; es wird wegen der Wirkung der inneren Kräfte zwischen den Gasteilchen kleiner, wenn die Zahl der freien Ionen grösser wird, wenn also die Stromdichte wächst.

Göttingen, April 1901.

(Eingegangen 1. Mai 1901.)