Ergänzung einer Untersuchung von Dirichlet.

Von

PAUL BACHMANN in Münster i/W.

1. In seiner berühmten Abhandlung über die quadratischen Formen mit complexen Coefficienten*) hat Dirichlet für die Classenanzahl H der Formen von der ersten Art einen Ausdruck gegeben, der für den Fall, in welchem die Determinante $D = A + Bi$ der Formen ein Product aus lauter ungleichen primären Primfactoren ist, folgendermassen lautet:

$$(1) \quad H = \lim \frac{8N(\sqrt{D})}{\pi \log \sigma} \cdot \sum \left[\frac{\lambda + \nu i}{D} \right] \cdot \frac{1}{(\lambda^2 + \nu^2)^{1+e}}.$$

Hierbei wird unter einer primären Zahl eine solche verstanden, in welcher der reelle Theil von der Form $4\kappa + 1$, der Coefficient von i von der Form 2μ ist; das Zeichen σ bedeutet die Norm des Ausdrucks $T + U\sqrt{D}$, aus welchem alle Lösungen der Gleichung $t^2 - Du^2 = 1$ durch die Formel

$$t + u\sqrt{D} = \pm (T + U\sqrt{D})^n$$

erhalten werden, und e eine positive Grösse, welche gegen die Null convergirt; $\left[\frac{\lambda + \nu i}{D} \right]$ ist das Jacobi'sche Symbol in der complexen

Theorie, die Summation endlich bezieht sich auf alle diejenigen primären complexen Zahlen $\lambda + \nu i$ d. i. alle diejenigen Systeme reeller ganzer Zahlen λ, ν von der Form $4\kappa + 1, 2\mu$ resp., für welche $\lambda + \nu i$ keinen Theiler mit D gemeinschaftlich hat. — Wir beabsichtigen die Formel (1) so umzugestalten, dass ihre wahre Bedeutung zu Tage tritt. Wenn man den Andeutungen, welche Dirichlet darüber gegeben hat, nachfolgt, so muss man zuerst für das Symbol $\left[\frac{\lambda + \nu i}{D} \right]$ das gleichbedeutende Symbol der reellen Zahlentheorie einführen. Wir beschränken uns dabei auf den einfachsten Fall, wo die Zahl

$$P = N(D) = A^2 + B^2$$

*) Crelle's Journal Bd. 24.

aus *ungleichen* Primtheilern von der Form $4h + 1$ besteht; dann werden die reellen Elemente A, B ohne gemeinsamen Theiler sein. Nach den von Dirichlet gegebenen Formeln ist alsdann

$$\left[\frac{\lambda + \nu i}{D} \right] = \left(\frac{A\lambda + B\nu}{P} \right),$$

die zu bestimmende Summe nimmt die Form an:

$$(2) \quad S = \lim \sum \left(\frac{A\lambda + B\nu}{P} \right) \cdot \frac{1}{(\lambda^2 + \nu^2)^{1+\varrho}},$$

und ist zu erstrecken über alle $\lambda = 4\kappa + 1$ und $\nu = 2\mu$, für welche $\lambda + \nu i$ und $A + Bi$ relative Primzahlen sind. Für jede ungerade Zahl P aber, welche aus lauter ungleichen positiven Primfactoren besteht, gilt der Gaussische Satz:

$$\sum_m \left(\frac{m}{P} \right) \cdot e^{\frac{2hm\pi i}{P}} = \left(\frac{h}{P} \right) \cdot i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{P},$$

wenn h irgend eine ganze Zahl bedeutet und die auf m bezügliche Summation sich auf irgend ein reducirtes Restsystem $(\text{mod } P)$ erstreckt; wobei nur zu beachten, dass diese Gleichung $\left(\frac{h}{P}\right) = 0$ voraussetzt, so oft h einen Theiler mit P gemeinschaftlich hat. Unter derselben Voraussetzung kann man die Summe S über *alle* ganzen Zahlen λ, ν von den Formen $4\kappa + 1, 2\mu$ resp. erstrecken; erhält nämlich $\lambda + \nu i$ für ein solches System mit $A + Bi$ einen gemeinsamen Factor $a + bi$, so folgt aus den Congruenzen

$$\lambda + \nu i \equiv 0, \quad A + Bi \equiv 0 \quad \text{mod } (a + bi)$$

auch

$$A\lambda + B\nu \equiv 0 \quad \text{mod } (a + bi) \text{ also auch mod } (a^2 + b^2),$$

welch' letzterer Modulus in $A^2 + B^2$ aufgehen muss; es verschwindet daher das Symbol $\left(\frac{A\lambda + B\nu}{P}\right)$ und das zugehörige Glied aus der Summe.

Für den Fall $P = 4h + 1$, welchen wir hier haben, wird die rechte Seite der Gaussischen Gleichung reell gleich $\left(\frac{h}{P}\right) \sqrt{P}$. Setzt man also $h = A\lambda + B\nu$, so lässt sich die Formel (2) folgendermassen schreiben:

$$S = \text{dem reellen Theile von } \frac{1}{\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P} \right) \cdot \lim \sum_{\lambda, \nu} \frac{e^{2\pi(\alpha\lambda + \beta\nu)i}}{(\lambda^2 + \nu^2)^{1+\varrho}},$$

wo zur Abkürzung $\frac{mA}{P} = \alpha, \quad \frac{mB}{P} = \beta$ gesetzt ist, oder auch

$$S = \text{r. Th. v. } \frac{1}{\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P} \right) \cdot \lim \sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi(\alpha\lambda + 2\beta\mu)i}}{(\lambda^2 + 4\mu^2)^{1+\varrho}}.$$

Hier ist bezüglich μ über alle ganzen Zahlen, bezüglich λ über alle Zahlen von der Form $4x + 1$ zu summiren. Diese zerfallen in die positiven λ' und die negativen $-\lambda''$, wo λ'' die Form $4x + 3$ hat. Man kann daher die Doppelsumme in die beiden entsprechenden Theile sondern und gleich

$$\sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi(\alpha\lambda' + 2\beta\mu)i}}{(\lambda'^2 + 4\mu^2)^{1+q}} + \sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{-2\pi(\alpha\lambda'' + 2\beta\mu)i}}{(\lambda''^2 + 4\mu^2)^{1+q}}$$

setzen; da es sich aber nur um den reellen Theil der Summen handelt, erhält man

$$S = \text{r. Th. v. } \frac{1}{VP} \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \lim \sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi(\alpha\lambda + 2\beta\mu)i}}{(\lambda^2 + 4\mu^2)^{1+q}},$$

wo nun die Summation nach λ über alle positiven ungeraden Zahlen, oder auch

$$(3) \quad S = \text{r. Th. v. } \frac{1}{2VP} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \lim \sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi(\alpha\lambda + 2\beta\mu)i}}{(\lambda^2 + 4\mu^2)^{1+q}},$$

wo sie jetzt über *alle* ungeraden Zahlen zu erstrecken ist.

Die Doppelsumme ist gleich der Differenz zweier anderen:

$$\sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi(\alpha\lambda + 2\beta\mu)i}}{(\lambda^2 + 4\mu^2)^{1+q}} - \frac{1}{4^{1+q}} \cdot \sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi(2\alpha\lambda + 2\beta\mu)i}}{(\lambda^2 + \mu^2)^{1+q}},$$

welche auf *alle* ganzen Zahlen λ, μ mit Ausschluss der Combination $\lambda = \mu = 0$ sich erstrecken; ihr Grenzwert für $q = 0$ kann daher nach einer Formel von Kronecker *) berechnet werden. Bezeichnen nämlich f, g, h, s, t irgend welche reelle Grössen, für welche $\Delta = fh - g^2$ positiv ist, und setzt man mit Koenigsberger

$$\vartheta(z, \tau)_1 = \frac{1}{i} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \cdot e^{(n + \frac{1}{2})^2 \pi i + (2n+1)z\pi i},$$

$\vartheta'(z, \tau)_1$ gleich dem nach z genommenen Differentialquotienten dieser Reihe, endlich

$$\tau_1 = \frac{-g + i\sqrt{\Delta}}{f}, \quad \tau_2 = \frac{g + i\sqrt{\Delta}}{f},$$

so ist bei gleichem Umfange der Summation

$$\begin{aligned} & \lim \sum_{\lambda, \mu} \frac{e^{2\pi i(s\lambda + t\mu)}}{(f\lambda^2 + 2g\lambda\mu + h\mu^2)^{1+q}} = \frac{2s^2\pi^2}{f} \\ & + \frac{\pi}{3\sqrt{\Delta}} \cdot \log \frac{1}{4\pi^2} \cdot \vartheta'(0, \tau_1)_1 \cdot \vartheta'(0, \tau_2)_1 \\ & - \frac{\pi}{\sqrt{\Delta}} \cdot \log [\vartheta(t + s\tau_1, \tau_1)_1 \cdot \vartheta(-t + s\tau_2, \tau_2)_1]. \end{aligned}$$

*) Monatsberichte der Berl. Akad. Jahrg. 1863 p. 46.

Hiernach gewinnt die Formel (3) zunächst folgende Gestalt:

$$S = \text{r. Th. v. } \frac{\pi}{24\sqrt{P}} \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \log \frac{\vartheta(0, 2i)_4^4 \cdot \vartheta(2\beta + 2\alpha i, i)_4^3 \vartheta(-2\beta + 2\alpha i, i)_4^3}{4\pi^2 \cdot \vartheta(0, i)_4^4 \cdot \vartheta(2\beta + 2\alpha i, 2i)_4^6 \vartheta(-2\beta + 2\alpha i, 2i)_4^6},$$

oder wenn man sich der Relation $\sum_m \left(\frac{m}{P}\right) = 0$ erinnert, noch einfacher:

$$S = \text{r. Th. v. } \frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \log \frac{\vartheta(2\beta + 2\alpha i, i)_4 \cdot \vartheta(-2\beta + 2\alpha i, i)_4}{\vartheta(2\beta + 2\alpha i, 2i)_4^2 \cdot \vartheta(-2\beta + 2\alpha i, 2i)_4^2}.$$

Hier ist nun $\pm\beta + \alpha i = \frac{mi}{A \pm Bi}$. Mittelst der Beziehungen zwischen den Theta's, welche der Transformation zweiter Ordnung entspringen, und indem man die Thetafunctionen mit dem Argumente $\frac{mi}{A \pm Bi}$ durch solche mit dem Argumente $\frac{m}{A \pm Bi}$ ersetzt, lässt sich also der Ausdruck zur Rechten der letzten Gleichung in den folgenden verwandeln:

$$\frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \log \frac{\vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_2 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_3 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_2 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_3}{\vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_0 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_1 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_0 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_1}.$$

2. Zur weiteren Vereinfachung bemerken wir, dass nach einer allgemeinen Dirichlet'schen Formel, wenn die reelle Zahl m relativ prim ist zu $A \pm Bi$, die Gleichung

$$\left[\frac{m}{A \pm Bi}\right] = \left(\frac{mA}{P}\right) = \left(\frac{m}{P}\right) \cdot \left(\frac{A}{P}\right)$$

besteht. Hier, wo der Gleichung $P = A^2 + B^2$ zu Folge das Symbol $\left(\frac{P}{A}\right) = +1$, und da $P = 4k + 1$, nach dem verallgemeinerten Reciprocitätsgesetze auch das Symbol $\left(\frac{A}{P}\right) = +1$ ist, nimmt sie die Gestalt

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left[\frac{m}{A \pm Bi}\right]$$

an, und gestattet, dem obigen Ausdrucke folgende Form zu geben:

$$\begin{aligned} & \frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left[\frac{m}{A+Bi}\right] \cdot \log \frac{\vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_2 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_3}{\vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_0 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A+Bi}\right)_1} \\ & + \frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \sum_m \left[\frac{m}{A-Bi}\right] \cdot \log \frac{\vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_2 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_3}{\vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_0 \cdot \vartheta\left(\frac{m}{A-Bi}\right)_1}, \end{aligned}$$

in welcher man die erste Summe auch über *irgend ein* reducirtes Restsystem mod $(A + Bi)$, die zweite über *irgend ein* solches mod $(A - Bi)$ erstrecken darf, da, wie leicht ersichtlich, die logarithmischen Argumente, ebenso wie die Jacobi'schen Symbole, ungeändert bleiben, wenn man m durch eine mod $(A + Bi)$ resp. mod $(A - Bi)$ congruente Zahl ersetzt. Wir dürfen das reducirte Restsystem mod. $(A + Bi)$ aber so wählen, dass es in Gruppen von je vier associirten Zahlen

$$(4) \quad m', im', -m', -im'$$

zerfällt. Andererseits giebt es in demselben ebensoviel Zahlen r , für welche

$$(5) \quad \begin{cases} \left[\frac{r}{A + Bi} \right] = +1 \\ \text{als Zahlen } n, \text{ für welche} \\ \left[\frac{n}{A + Bi} \right] = -1 \end{cases}$$

ist; und zwar gehören in dem Falle, wo $P = 8h + 1$ also $\left[\frac{i}{A + Bi} \right] = 1$ ist, die vier Zahlen einer Gruppe gleichzeitig entweder zu den r oder zu den n , während im Falle $P = 8h + 5$, wo $\left[\frac{i}{A + Bi} \right] = -1$ ist, die Zahlen $m', -m'$ als die Zahlen r , $im', -im'$ aber als die Zahlen n aufgefasst werden dürfen. Schreibt man daher die auf $A + Bi$ bezügliche Summe folgendermassen:

$$\begin{aligned} & \sum \left[\frac{m}{A + Bi} \right] \cdot \log \frac{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_2}{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_1} \\ & + \sum \left[\frac{m}{A + Bi} \right] \cdot \log \frac{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_2}{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_0} \end{aligned}$$

und bemerkt die Relationen

$$\frac{\vartheta \left(\frac{mi}{A + Bi} \right)_2}{\vartheta \left(\frac{mi}{A + Bi} \right)_0} = \frac{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_0}{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_2}, \quad \frac{\vartheta \left(\frac{mi}{A + Bi} \right)_1}{\vartheta \left(\frac{mi}{A + Bi} \right)_3} = i \cdot \frac{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_1}{\vartheta \left(\frac{m}{A + Bi} \right)_3},$$

so wird für $P = 8h + 1$ die zweite Summe verschwinden, für $P = 8h + 5$ dagegen die erste Summe sich auf $\frac{1}{2} \varphi(P) \cdot \log i$ reduciren. Aehnliches gilt von der auf $A - Bi$ bezüglichen Summe. Man erhält also, da die Ausdrücke zur Rechten der nachstehenden Gleichungen, in denen r', n' die zu r, n conjugirten Zahlen bedeuten, offenbar reell sind,

für $P = 8h + 1$

$$S = \frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \log \prod_r \frac{\vartheta\left(\frac{r}{A+Bi}\right)_3 \cdot \vartheta\left(\frac{r'}{A-Bi}\right)_3}{\vartheta\left(\frac{r}{A+Bi}\right)_1 \cdot \vartheta\left(\frac{r'}{A-Bi}\right)_1} \cdot \prod_n \frac{\vartheta\left(\frac{n}{A+Bi}\right)_1 \cdot \vartheta\left(\frac{n'}{A-Bi}\right)_1}{\vartheta\left(\frac{n}{A+Bi}\right)_3 \cdot \vartheta\left(\frac{n'}{A-Bi}\right)_3},$$

für $P = 8h + 5$

$$S = \frac{\pi}{4\sqrt{P}} \cdot \log \prod_r \frac{\vartheta\left(\frac{r}{A+Bi}\right)_2 \cdot \vartheta\left(\frac{r'}{A-Bi}\right)_2}{\vartheta\left(\frac{r}{A+Bi}\right)_0 \cdot \vartheta\left(\frac{r'}{A-Bi}\right)_0}.$$

Bei allen diesen Formeln ist immer i als Modulus der Thetafunctionen hinzuzudenken. Nun entspricht diesem Modulus der Integralmodulus $k = k' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, für welchen

$$K = K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \varphi}}$$

ist. Beschränken wir uns zunächst auf den Fall, in welchem P von der Form $8h + 1$ ist! Mit Beachtung des Umstandes, dass die Menge der Zahlen r gleich derjenigen der Zahlen n ist, darf man dann den vorhergehenden Ausdruck für S auch so schreiben:

$$S = \frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \log \prod_r \frac{\frac{dn}{sn} \frac{2Kr}{A+Bi} \cdot \frac{dn}{sn} \frac{2Kr'}{A-Bi}}{\frac{2Kr}{A+Bi} \cdot \frac{2Kr'}{A-Bi}} \cdot \prod_n \frac{\frac{sn}{dn} \frac{2Kn}{A+Bi} \cdot \frac{sn}{dn} \frac{2Kn'}{A-Bi}}{\frac{2Kn}{A+Bi} \cdot \frac{2Kn'}{A-Bi}}.$$

Setzt man jetzt aber

$$z = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

und nennt $\lambda(z) = x$ die umgekehrte Function, so findet sich

$$\lambda(z) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{sn z \sqrt{2}}{dn z \sqrt{2}},$$

ebenso $\omega = K\sqrt{2}$, wenn

$$\omega = 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

gesetzt wird. Hiernach geht die Formel für S über in

$$(6) \quad S = \frac{\pi}{8\sqrt{P}} \cdot \log \frac{\prod_n \lambda\left(\frac{n\omega}{A+Bi}\right) \cdot \lambda\left(\frac{n'\omega}{A-Bi}\right)}{\prod_r \lambda\left(\frac{r\omega}{A+Bi}\right) \cdot \lambda\left(\frac{r'\omega}{A-Bi}\right)}.$$

Nun hat bekanntlich die Function $\lambda(z)$ eine eigenthümliche Periodicität, insofern sie ungeändert bleibt, wenn das Argument um irgend ein complexus Vielfaches von $\Omega = (1+i)\omega$ verändert wird. In der Formel (6) beziehen sich aber die Multiplicationen auf irgend ein reducirtes Restsystem von der Form (4), welches man den Gleichungen (5) gemäss in die beiden Hälften r, n getheilt hat; wir dürfen daher r, n auch ersetzen durch die Zahlen $r(1+i), n(1+i)$ in derselben oder in verkehrter Reihenfolge, je nachdem der Werth der einander gleichen Symbole $\left[\frac{1+i}{A+Bi}\right]$ und $\left[\frac{1-i}{A-Bi}\right]$ gleich $+1$ oder -1 ist. Nennen wir ihn allgemein ε , so kommt demnach für $P = 8h + 1$

$$(7) \quad S = \frac{\pi\varepsilon}{8\sqrt{P}} \cdot \log \frac{\prod_n \lambda\left(\frac{n\Omega}{A+Bi}\right) \lambda\left(\frac{n'\Omega}{A-Bi}\right)}{\prod_r \lambda\left(\frac{r\Omega}{A+Bi}\right) \lambda\left(\frac{r'\Omega}{A-Bi}\right)},$$

worin, wegen der Periodicität der Function $\lambda(z)$, unter r, n jetzt auch wieder diejenigen Glieder *irgend eines* reducirten Restsystems mod $(A+Bi)$ verstanden werden dürfen, welche den Gleichungen

$$\left[\frac{r}{A+Bi}\right] = +1, \quad \left[\frac{n}{A+Bi}\right] = -1$$

entsprechen.

Ähnlicherweise findet sich für $P = 8h + 5$ die Formel

$$(7a) \quad S = \frac{\pi\varepsilon}{8\sqrt{P}} \cdot \log \prod_r \frac{1 - \lambda^2\left(\frac{r\Omega}{A+Bi}\right)}{1 + \lambda^2\left(\frac{r\Omega}{A+Bi}\right)} \cdot \frac{1 - \lambda^2\left(\frac{r'\Omega}{A-Bi}\right)}{1 + \lambda^2\left(\frac{r'\Omega}{A-Bi}\right)}.$$

3. Um den so gewonnenen Ausdruck für S noch weiter zu verwandeln, haben wir einige Resultate zu verallgemeinern, welche für den Fall eines Primzahlmodulus $A + Bi$ von Eisenstein in seiner Abhandlung über die Lemniscatentheilung (Crelle's Journal Bd. 39) gegeben worden sind. Bezeichnet man mit $a + bi$ eine complexe zweigliedrige Primzahl mit der Norm p , und werden $a = 2\alpha + 1$, $b = 2\beta$ gesetzt, so besteht folgende Relation:

$$\lambda((a+bi)z) = \lambda(z) \cdot (-1)^{\alpha+\beta} \cdot \frac{\lambda(z)^{p-1} + m_1 \lambda(z)^{p-5} + \dots + (-1)^{\alpha+\beta} (a+bi)}{1 + n_1 \lambda(z)^4 + \dots + n_{\frac{p-1}{4}} \lambda(z)^{p-1}},$$

in welcher die Coefficienten m, n complexen ganzen Zahlen gleich sind. Hieraus gewinnt man für eine Zahl

$$A + Bi = (a + bi)(a' + b'i)(a'' + b''i) \dots,$$

welche aus beliebig vielen complexen zweigliedrigen Primzahlen mit den (von einander verschiedenen) Normen $p, p', p'', \dots$ besteht, leicht die allgemeinere Gleichung

$$\lambda((A + Bi)z) = \varepsilon \cdot \lambda(z) \frac{\lambda(z)^{P-1} + M_1 \lambda(z)^{P-5} + \dots + \varepsilon \cdot (A + Bi)}{1 + N_1 \lambda(z)^4 + \dots + N_{\frac{P-1}{4}} \lambda(z)^{P-1}},$$

in welcher wieder die Coefficienten M, N complexe ganze Zahlen sind, während $pp'p'' \dots = P$, $(-1)^{\Sigma(\alpha+\beta)} = \varepsilon$ gesetzt ist.

Was zunächst ε betrifft, so ist, je nachdem $a^2 + b^2 \equiv 1$ oder $a^2 + b^2 \equiv 5 \pmod{8}$ ist, b von der Form $4h, 4h + 2$ resp. und folglich entsprechend $\alpha + \beta \equiv \frac{a-1}{2}$ oder $\equiv 1 + \frac{a-1}{2} \pmod{2}$. Da aber P , je nachdem es congruent 1 oder 5 $\pmod{8}$ ist, eine gerade oder ungerade Anzahl solcher Primfactoren enthält, welche die Form $8h + 5$ haben, so wird je nach diesen beiden Fällen

$$\Sigma(\alpha + \beta) \equiv \Sigma \frac{a-1}{2} \text{ oder } \equiv +1 \Sigma \frac{a-1}{2} \pmod{2}.$$

Werden daher, wie hier, $a + bi, a' + b'i, \dots$ als primär vorausgesetzt, so ergibt sich allgemein

$$\Sigma(\alpha + \beta) \equiv 0 \text{ oder } \equiv 1 \pmod{2},$$

je nachdem $P \equiv 1$ oder $P \equiv 5 \pmod{8}$ ist, und folglich $\varepsilon = (-1)^{\frac{P-1}{4}}$.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$W = x^{P-1} + M_1 x^{P-5} + \dots + (-1)^{\frac{P-1}{4}} \cdot (A + Bi) = 0.$$

Wenn man bemerkt, dass $\lambda(z)$ verschwindet, so oft $z = (k + k'i)\omega$, k, k' aber irgend welche ganze Zahlen sind, so findet man leicht die Wurzeln dieser Gleichung durch die Formel

$$x = \lambda \left(\frac{\mu \Omega}{A + Bi} \right),$$

wenn man darin μ irgend ein Restsystem $\text{mod } (A + Bi)$ mit Ausschluss des durch $A + Bi$ theilbaren Gliedes durchlaufen lässt. Man hat also

$$W = \prod \left(x - \lambda \left(\frac{\mu \Omega}{A + Bi} \right) \right)$$

und hieraus

$$(8) \quad \prod \lambda \left(\frac{\mu \Omega}{A + Bi} \right) = (-1)^{\frac{P-1}{4}} \cdot (A + Bi).$$

Der Ausdruck W kann aber auch in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$W = \prod_d W_d(x),$$

wenn die hier angedeutete Multiplication auf alle von $A + Bi$ verschiedenen Theiler d von $A + Bi$ ausgedehnt und unter $W_d(x)$ der Ausdruck

$$W_d(x) = \prod \left(x - \lambda \left(\frac{m' \Omega}{A' + B'i} \right) \right)$$

verstanden wird, der über irgend ein reducirtes Restsystem m' für den Modulus $A' + B'i = \frac{A + Bi}{d}$ erstreckt gedacht wird. Da die Function W für einen Primzahlmodulus $A + Bi = a + bi$ mit der Norm p die Gestalt

$$x^{p-1} + m_1 x^{p-5} + \dots + (-1)^{\frac{p-1}{4}} \cdot (a + bi)$$

mit ganzzahligen complexen Coefficienten hat, schliesst man vermittelst der einfachsten Induction, dass auch im Falle eines zusammengesetzten Modulus $A + Bi$ der Ausdruck

$$W_1(x) = \prod \left(x - \lambda \left(\frac{m \Omega}{A + B'i} \right) \right),$$

ausgedehnt über irgend ein reducirtes Restsystem $m \bmod (A + Bi)$, ganzzahlige complexe Coefficienten hat, deren letzter gleich Eins ist. Man findet daher, bei gleicher Ausdehnung der Multiplication, für eine zusammengesetzte Zahl $A + Bi$ statt der Gleichung (8) die nachstehende Relation:

$$(9) \quad \prod \lambda \left(\frac{m \Omega}{A + B'i} \right) = 1.$$

Wir beweisen nun, dass die Coefficienten der beiden Gleichungen

$$(10) \quad W_r = 0, \quad W_n = 0,$$

deren Wurzeln resp. die Werthe $\lambda \left(\frac{r \Omega}{A + B'i} \right)$, $\lambda \left(\frac{n \Omega}{A + B'i} \right)$ sind, die Form

$$\frac{\xi \pm \zeta \sqrt{A + B'i}}{2}$$

haben, worin ξ, ζ ganze complexe Zahlen sind.

Zu diesem Zwecke betrachten wir irgend eine ganze symmetrische Function F_r von den Grössen $\lambda \left(\frac{r \Omega}{A + B'i} \right)$ mit complex-ganzzahligen Coefficienten (die Coefficienten der Gleichungen (10) sind solche Functionen), und nennen F_n dieselbe Function der Grössen $\lambda \left(\frac{n \Omega}{A + B'i} \right)$.

Denken wir uns ferner, was erlaubt ist, die Zahlen r, n für einen Augenblick als reell und ungerade. Da die Function $\lambda(z)$ die Eigenschaft besitzt, dass $\lambda(mz)$ für ein ungerades m rational mit complex-

ganzzahligen Coefficienten durch $\lambda(z)$ ausdrückbar ist, so können die Ausdrücke

$$F_r + F_n, (F_r - F_n)^2$$

als rationale Functionen von $\lambda\left(\frac{\Omega}{A+Bi}\right)$ aufgefasst werden, die sich nicht verändern, wenn $\lambda\left(\frac{\Omega}{A+Bi}\right)$ durch eine andere Wurzel $\lambda\left(\frac{m\Omega}{A+Bi}\right)$ der Gleichung $W_1 = 0$ ersetzt wird. Denn für jede Zahl m eines reducirten Restsystemes mod $(A+Bi)$ stimmen die Zahlen rm, nm in ihrer Gesamtheit nach diesem Modulus mit den Zahlen r, n oder n, r resp. überein, je nachdem $\left[\frac{m}{A+Bi}\right]$ gleich $+1$ oder -1 ist; je nach diesen beiden Fällen werden also F_r, F_n entweder ungeändert bleiben, oder doch nur unter einander vertauscht werden. Demnach sind die obigen Ausdrücke rationalen complexen Zahlen gleich und müssen sogar *ganzen* complexen Zahlen gleich sein, weil sie auch als *ganze* und *ganzzahlige* Functionen von den Wurzeln der Gleichung $W_1 = 0$ aufgefasst werden können. Nennt man diese ihre ganzzahligen Werthe ξ' und $\xi'^2 (\alpha + \beta i)$, sodass $\alpha + \beta i$ keine quadratischen Theiler mehr enthalte, so ergeben sich die Gleichungen

$$F_r = \frac{1}{2}(\xi' + \xi' \sqrt{\alpha + \beta i}), \quad F_n = \frac{1}{2}(\xi' - \xi' \sqrt{\alpha + \beta i}).$$

Wird demnach F_r so gewählt, dass es von F_n verschieden ist, so lassen sich die Coefficienten der Gleichungen (10), als ähnliche Functionen von den Wurzeln der Gleichung $W_1 = 0$, rational durch F_r ausdrücken, und je zwei entsprechende Coefficienten derselben erhalten die Form

$$\frac{\xi \pm \xi \sqrt{\alpha + \beta i}}{2},$$

worin ξ, ξ nach dem Obigen *ganze* complexe Zahlen sein müssen. Zur näheren Bestimmung der Zahl $\alpha + \beta i$ setzen wir

$$A + Bi = (a + bi)(A' + B'i);$$

es seien ferner $W_r = 0, W_n = 0$ die Gleichungen (10), wenn $A + Bi$ durch die Primzahl $a + bi$, $W_r = 0, W_n = 0$ dieselben Gleichungen, wenn es durch die Zahl $A' + B'i$ ersetzt wird. Von den ersteren Gleichungen weiss man nach Eisenstein, dass ihre Coefficienten rational sind in $\sqrt{\alpha + \beta i}$; wir setzen als bereits bewiesen voraus, dass ähnlicherweise die Coefficienten der letztern rational sind in $\sqrt{A' + B'i}$. Ist dann zunächst $P = 8h + 1$, so wählen wir

$$F_r = \prod_r \lambda\left(\frac{r\Omega}{A+Bi}\right), \quad F_n = \prod_n \lambda\left(\frac{n\Omega}{A+Bi}\right),$$

welche Werthe von einander verschieden und irrational sein müssen, da sonst aus den Formeln (1) und (7) sich $H = 0$ ergäbe.

Bemerken wir nun, dass, indem

$$m \equiv m^0 (A' + B'i) + m' (a + bi) \pmod{A + Bi}$$

gesetzt wird, die Wurzeln der Gleichung $W_1 = 0$ auch so geschrieben werden können:

$$\lambda \left(\frac{m^0 \Omega}{a + bi} + \frac{m \Omega}{A' + B'i} \right),$$

wenn m^0, m' reducirte Restsysteme resp. $\pmod{a + bi}$ und $\pmod{A' + B'i}$ durchlaufen. Nach einer Formel von Dirichlet ist ferner

$$\left[\frac{a + bi}{A' + B'i} \right] = \left[\frac{A' + B'i}{a + bi} \right];$$

daher folgt leicht aus der Congruenz für m die Beziehung

$$\left[\frac{m}{A + Bi} \right] = \left[\frac{m^0}{a + bi} \right] \cdot \left[\frac{m'}{A' + B'i} \right]$$

und folglich gehört m zu den Zahlen r , wenn entweder m^0, m' zu den Zahlen r^0, r' oder zu den Zahlen n^0, n' resp. gehören; dagegen gehört m zu den Zahlen n , wenn entweder m^0, m' zu den Zahlen r^0 und n' , oder zu den Zahlen n^0 und r' resp. gehören. Man findet also

$$\prod_r = \prod \lambda \left(\frac{r^0 \Omega}{a + bi} + \frac{r' \Omega}{A' + B'i} \right) \prod \lambda \left(\frac{n^0 \Omega}{a + bi} + \frac{n' \Omega}{A' + B'i} \right).$$

Nun ist die Anzahl der Zahlen r' gerade und -1 quadratischer Rest $\pmod{A' + B'i}$, also zerfallen die Zahlen r' in zwei Gruppen, die einander $\pmod{A' + B'i}$ gleich und entgegengesetzt sind. Daher ist, wie leicht ersichtlich,

$$\prod \lambda \left(\frac{r^0 \Omega}{a + bi} + \frac{r' \Omega}{A' + B'i} \right) = \prod \frac{\lambda \left(\frac{r^0 \Omega}{a + bi} \right) + \lambda \left(\frac{r' \Omega}{A' + B'i} \right)}{1 + i \lambda \left(\frac{r^0 \Omega}{a + bi} \right) \lambda \left(\frac{r' \Omega}{A' + B'i} \right)}$$

und das letzte Product eine symmetrische rationale Function sowohl von den Wurzeln der Gleichung $W_r = 0$ als von denjenigen der Gleichung $W_r' = 0$, also rational in $\sqrt{a + bi}$ und $\sqrt{A' + B'i}$ ausdrückbar. Von dem zweiten Factor des Ausdruckes Π_r gilt aber dasselbe, und demnach erhalten Π_r, Π_n die allgemeine Form

$$\eta + \eta' \sqrt{a + bi} + \eta'' \sqrt{A' + B'i} + \eta''' \sqrt{A + Bi},$$

in welcher $\eta, \eta', \eta'', \eta'''$ rationale complexe Zahlen bezeichnen. Weil aber bereits gezeigt ist, dass dieselben Ausdrücke von einer einzigen Quadratwurzel rational abhängen, und ihre Werthe offenbar un-

abhängig sind von der Art, wie man $A + Bi$ zerlegt denken kann, so ergibt sich

$$(11) \quad \alpha + \beta i = \pm (A + Bi).$$

Ist zweitens $P = 8h + 5$, so wähle man für F_r den Ausdruck

$$\prod_r \left(1 - \lambda^2 \left(\frac{r\Omega}{A + Bi} \right) \right),$$

für welchen

$$F_n = \prod_r \left(1 + \lambda^2 \left(\frac{r\Omega}{A + Bi} \right) \right)$$

ist, da hier die Zahlen n mit den $ir \bmod (A + Bi)$ übereinstimmen und $\lambda(iz) = i\lambda(z)$ ist. Da die Gleichungen (1) und (7a) erweisen, dass F_r, F_n ungleich und irrational sind, so führen ähnliche Betrachtungen auch hier zu der Gleichung (11) und damit zum vollständigen Beweise der Behauptung.

Insbesondere heben wir für den Fall $P = 8h + 1$ die beiden Relationen hervor:

$$(12) \quad \begin{aligned} \prod_r \lambda \left(\frac{r\Omega}{A + Bi} \right) &= \frac{1}{2} (\xi + \xi \sqrt{A + Bi}), \\ \prod_n \lambda \left(\frac{n\Omega}{A + Bi} \right) &= \frac{1}{2} (\xi - \xi \sqrt{A + Bi}), \end{aligned}$$

in welchen ξ, ξ zwei ganze complexe Zahlen bedeuten. Ist $A + Bi$ eine Primzahl, so leisten diese ganzen Zahlen nach (8) der Gleichung

$$(13) \quad \xi^2 - (A + Bi) \xi^2 = 4(A + Bi),$$

wenn $A + Bi$ aber eine zusammengesetzte Zahl ist, nach (9) der Gleichung

$$(14) \quad \xi^2 - (A + Bi) \xi^2 = 4$$

Genüge.

4. Nachdem dies festgestellt ist, kehren wir zur Gleichung (7) wieder zurück. Ist $A + Bi$ eine zusammengesetzte Zahl, so ergeben die Gleichungen (12) und (14) sofort

$$S = \frac{\pi \varepsilon}{8 \sqrt{P}} \cdot \log N \left(\frac{\xi - \xi \sqrt{A + Bi}}{\xi + \xi \sqrt{A + Bi}} \right) = \frac{\pi \varepsilon}{8 \sqrt{P}} \cdot \log N \left(\frac{\xi - \xi \sqrt{A + Bi}}{2} \right)^2.$$

Für die Classenanzahl H der quadratischen Formen mit der Determinante $D = A + Bi$, deren Norm von der Form $8h + 1$ ist, erschliesst man hiernach wegen (1)

$$H = \frac{\varepsilon}{\log \sigma} \cdot \log N \left(\frac{\xi - \xi \sqrt{A + Bi}}{2} \right)^2$$

und folglich

$$(15) \quad N(T + U\sqrt{A + Bi})^H = N\left(\frac{\xi - \varepsilon\xi\sqrt{A + Bi}}{2}\right)^2,$$

eine Gleichung, welche das Analogon derjenigen ist, die Dirichlet für quadratische Formen mit reellen Elementen und positiver Determinante im 21. Band des Crelle'schen Journals abgeleitet hat.

Dieselbe Gleichung (15) gilt auch in dem Falle, wo $A + Bi$ eine Primzahl ist; nur bedeuten dann ξ, ε darin nicht diejenigen Zahlen, welche in den Gleichungen (12) und (13) enthalten sind, sondern zwei andere, der Gleichung

$$\xi_1^2 - (A + Bi)\xi_1^2 = 4$$

genügende complexe ganze Zahlen ξ_1, ε_1 , die mit jenen durch die Relationen

$$\xi_1 = \xi i, \quad \varepsilon_1 (A + Bi) = \varepsilon i$$

verbunden sind.

Für den Fall $P = 8h + 5$ finden analoge Betrachtungen statt, und das demselben entsprechende Resultat kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Setzt man W , für $x = 1$ gleich $\frac{1}{2}(\xi - \varepsilon\xi\sqrt{A + Bi})$, sodass ξ, ε zwei complexe ganze Zahlen bezeichnen, so findet man die Classenanzahl H der quadratischen Formen mit der Determinante $D = A + Bi$, deren Norm von der Form $8h + 5$ ist, aus der Gleichung:

$$(16) \quad N(T + U\sqrt{A + Bi})^H = N\left(\frac{\xi - \varepsilon\xi\sqrt{A + Bi}}{\xi + \varepsilon\xi\sqrt{A + Bi}}\right)^2.$$