ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

N^o. 262.

Remarques sur une note de Mr. de Pontécoulant, qu'on trouve dans la *Connaissance des tems* de l'année 1836 pag. 21 et 22.

Par Mr. le Professeur Hansen, Directeur de l'Observatoire de Seeberg.

Dans un mémoire de Mr. Poisson „Sur le développement des coordonnées d'une planète etc.“ inséré dans la *connaissance des tems* de l'année 1836, on trouve une Note de Mr. de Pontécoulant dans laquelle ce géomètre a comparé la grande inégalité de Jupiter déterminée dans la Mécanique céleste, au résultat que j'ai obtenu pour la même inégalité dans mon mémoire couronné par l'Académie Royale de Berlin. En posant pour abrégé

$$5n't + 5\varepsilon' - 2nt - 2\varepsilon = z.$$

Mr. de Pontécoulant trouve en secondes centésimales

$$\begin{aligned} 3468'',741 \sin z + 203'',186 \cos z & \quad (\text{Hansen}) \\ 3888,670 \sin z + 354,716 \cos z & \quad (\text{Laplace}) \end{aligned}$$

et il ajoute: „la différence entre ces résultats est trop grande, pour qu'on puisse l'attribuer, en aucune manière, aux quantités que Laplace a négligées, puisque les quantités du cinquième ordre, dont il a tenu compte, sont déjà beaucoup moindres que cette différence.“

En effet, on ne saurait point expliquer cette différence par les quantités négligées par Laplace, si elle avait effectivement lieu, mais en jettant un coup d'œil sur le résultat cité ci-dessus et sur celui de la Mécanique céleste, je voyais déjà que Mr. de Pontécoulant en faisant cette comparaison dût nécessairement s'être trompé, car, l'inégalité citée ci-dessus étant $3888'',670 \sin z + 354'',716 \cos z$ et l'inégalité de la Mécanique céleste étant $3893'',732 \sin z + 297'',735 \cos z$, les quantités du second ordre à soustraire ici sont beaucoup plus grandes que la différence entre ces deux résultats. Aussi le calcul, que je vais exposer ici, prouva bientôt que la faute était du côté de Mr. de Pontécoulant.

Le résultat obtenu par moi dans le mémoire cité pour Jupiter, qui se rapporte à l'an 1800, est

$$+ 989'',498 \sin(5g' - 2g) + 424'',937 \cos(5g' - 2g)$$

g' et g désignant les anomalies moyennes de Saturne et de Jupiter. En y convertant les secondes sexagésimales en secondes centésimales et en y introduisant, et la même masse de Saturne dont Laplace a fait usage dans la Mé-

canique céleste, et les longitudes moyennes au lieu des anomalies moyennes, j'ai trouvé, ainsi que Mr. de Pontécoulant

$$+ 3468'',741 \sin(5\nu' - 2\nu) + 203'',186 \cos(5\nu' - 2\nu)$$

ν' et ν désignant les longitudes moyennes de Saturne et de Jupiter. On doit se rappeler ici que ces coefficients ne contiennent que les quantités du premier ordre par rapport à la masse perturbatrice, et que les longitudes moyennes y sont comptées de l'équinoxe fixe de 1800. Les diverses parties de cette inégalité, qu'on trouve dans le chapitre XII du livre VI de la seconde partie de la Mécanique céleste contiennent déjà une partie des termes du second ordre, et les longitudes y sont rapportées à l'an 1750. Ainsi pour pouvoir faire la comparaison il faut premièrement en soustraire ces parties. Pour cet effet on doit remarquer, qu'une partie de ces termes contient le carré du diviseur $5n' - 2n$, et que l'autre partie en contient seulement la première puissance. Soit

$$\begin{aligned} & (a + a't + a''t^2) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ & + (b + b't + b''t^2) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{aligned}$$

la partie de l'inégalité en question, qui contient le carré de $5n' - 2n$, et dans laquelle je suppose qu'on ait déjà réduit les coefficients à l'an 1800. On aura sa seconde différentielle par rapport au temps égale à

$$\begin{aligned} & - dt^2 (f^2 a + 2f b' - 2a'') \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \\ & - dt^2 (f^2 b - 2f a' - 2b'') \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \end{aligned}$$

en omettant dans cette différentielle les termes où se trouve le temps hors du signe de sinus et de cosinus, et en appelant f la quantité $5n' - 2n$ évaluée en parties du rayon. Cette expression ne contient que les termes du premier ordre, et en la réintégrant on trouve

$$\begin{aligned} & \left(a + 2 \frac{b'}{f} - 2 \frac{a''}{f^2} \right) \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \left\{ \dots (a) \right. \\ & + \left(b - 2 \frac{a'}{f} - 2 \frac{b''}{f^2} \right) \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon) \left. \right\} \end{aligned}$$

qui est l'inégalité exempte des termes du second ordre.

La partie de l'inégalité de la Mécanique céleste qui contient la première puissance de $5n' - 2n$ doit être traitée de la même manière, seulement on ne doit différentier et réintégrer qu'une seule fois. Cependant, comme il paraît que *Laplace* ait négligé dans cette partie les termes du second ordre, qui ne sont pas multipliés par le temps même, on peut se contenter à y réduire les coefficients à 1800. Outre cela, il faut remarquer, que les longitudes $n't + s'$ et $nt + s$ sont comptées de l'équinoxe de 1750, tandis que les longitudes désignées par ν' et ν se rapportent à l'équinoxe de 1800, ainsi pour faire la comparaison, il faut réduire les expressions à ne contenir que des longitudes de la même espèce.

Après avoir exposé les principes sur lesquels doit s'appuyer cette comparaison, je prends l'inégalité de la Mécanique céleste. En se rappelant que les signes des quantités du cinquième ordre par rapport aux excentricités et aux inclinaisons y doivent être renversés, on a

$$(3900,616 - t.0,02598 - t^2.0,0000594) \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \\ + (368,910 - t.1,46199 + t^2.0,0002425) \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s)$$

$$\begin{array}{rcl} \log 2 & = & 0,3010300 \quad 0,30103 \\ \log b' & = & 0,1531011n \quad \log a'' = 5,77379n \\ \log f & = & 7,8531891 \quad 2\log f = 5,70638 \\ & & 2,6009420n \quad 0,36844n \end{array}$$

$$\text{Nombres} = -398,972 \dots \dots \dots - 2,336 \dots \dots \dots - 7,432 \dots \dots \dots + 9,536$$

ainsi le résultat de ce calcul est

$$(b) \dots \dots \dots \left\{ +3464,110 \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \right. \\ \left. + 320,131 \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \right\}$$

Les autres parties de la grande inégalité de Jupiter, excepté celles qui ne contiennent que des termes du second ordre sont, d'après la Mécanique céleste,

$$\left\{ \begin{array}{l} -53,176 + t.0,006050 \\ + 2,532 - t.0,001831 \end{array} \right\} \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \\ + \left\{ \begin{array}{l} 16,543 + t.0,016818 \\ -5,673 - t.0,000046 \end{array} \right\} \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s)$$

en prenant leur somme et en la réduisant à 1800, on trouve

$$-50,433 \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \\ + 11,709 \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s)$$

Si l'on ajoute cette quantité à la quantité (b), il vient

$$(c) \dots \dots \dots \left\{ +3413,677 \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \right. \\ \left. + 331,840 \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \right\}$$

pour les termes du premier ordre, que *Laplace* a considérés dans la grande inégalité de Jupiter. Or, en désignant la précession générale annuelle par ψ , on a

$$nt + s = \nu - 50\psi \quad \text{et} \quad n't + s' = \nu' - 50\psi$$

et

$$- (38,693 - t.0,00542) \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \\ + (25,065 + t.0,01508) \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s)$$

dont la somme est

$$(3861,923 - t.0,02056 - t^2.0,0000594) \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \\ + (393,975 - t.1,44691 + t^2.0,0002425) \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s)$$

pour la partie qui contient le carré du diviseur $5n' - 2n$. En y réduisant les coefficients à 1800, on trouve facilement

$$(3860,746 - t.0,02650 - t^2.0,0000594) \sin(5n't - 2nt + 5s' - 2s) \\ + (322,235 - t.1,42266 + t^2.0,0002425) \cos(5n't - 2nt + 5s' - 2s)$$

Or, d'après la Mécanique céleste, on a $n' = 135792,34$, $n = 337210,78$, ainsi

$$\begin{array}{rcl} 5n' & = & 678961,70 \\ 2n & = & 674421,56 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 5n' - 2n & = & +4540,14 \dots \log = 3,6570692 \\ \log. \text{ de l'arc égal au rayon } \dots & = & 5,8038801 \\ \log f & = & 7,8531891 \end{array}$$

partant le calcul d'après la formule (a) ci-dessus donne

$$\begin{array}{rcl} & 0,30103 & 0,30103 \\ \log a' & = & 8,42325n \quad \log b'' = 6,38471 \\ & 7,85319 & 5,70638 \\ & 0,87109n & 0,97936 \end{array}$$

partant

$$5n't - 2nt + 5s' - 2s = 5\nu' - 2\nu - 150\psi$$

et l'expression précédente devient

$$3413,677 \sin(5\nu' - 2\nu - 150\psi) + 331,840 \cos(5\nu' - 2\nu - 150\psi)$$

ou

$$\left\{ 3413,677 \cos(150\psi) + 331,840 \sin(150\psi) \right\} \sin(5\nu' - 2\nu) \\ + \left\{ 331,840 \cos(150\psi) - 3413,677 \sin(150\psi) \right\} \cos(5\nu' - 2\nu)$$

En prenant $\psi = 50,2238$, ce qui donne $150\psi = 2^\circ 5' 33,6$, on trouve

$$\begin{array}{rcl} \log \cos(150\psi) & = & 9,9997103 \quad \log \sin(150\psi) = 8,5624809 \\ \log 3413,677 & = & 3,5332224 \quad \log 331,840 = 2,5209287 \\ \log \sin(150\psi) & = & 8,5624809 \quad \log \cos(150\psi) = 9,9997103 \end{array}$$

$$\text{Sommes} \left\{ \begin{array}{l} 3,5329327 \dots \dots \dots 1,0834096 \\ 2,0957033 \dots \dots \dots 2,5206390 \end{array} \right.$$

$$\text{Nombres} \left\{ \begin{array}{l} +3411,401 \quad \quad \quad + 124,653 \\ \quad \quad \quad + 12,117 \quad \quad \quad + 331,619 \end{array} \right.$$

partant l'expression (c) est convertie en

$$3423,518 \sin(5\nu' - 2\nu) + 206,966 \cos(5\nu' - 2\nu)$$

qui étant comparée à mon résultat cité plus haut donne pour différence entre *Laplace* et moi

$$+ 45,223 \sin(5\nu' - 2\nu) - 3,778 \cos(5\nu' - 2\nu) \text{ (centésimales)}$$

différence qui est beaucoup plus petite que celle que *Mr. de Pontécoulant* avait trouvée. Elle vient en partie de quelques termes que *Laplace* a négligés, et en partie de ce que nous avons fondé le calcul numérique des perturbations sur des élémens elliptiques de Jupiter et de Saturne, qui diffèrent sensiblement les uns des autres.

Tous les calculs numériques de mon mémoire sur les perturbations de Jupiter et de Saturne ont été tellement institués, qu'ils portent en eux-mêmes, et indépendamment de tout calcul étranger, les preuves de leur justesse, et par conséquent, il n'est pas nécessaire pour prouver l'exactitude de mes coefficients, que je les calcule de nouveau par une méthode différente. Cependant pour satisfaire le mieux possible à mes lecteurs, je vais exposer ici le calcul de cette partie de la grande inégalité de Jupiter qui, suivant la théorie de la variation des constantes arbitraires, affecte le moyen mouvement de cette planète, et je me servirai dans ce calcul de la méthode de développement de la

fonction perturbatrice, que *Laplace* a donnée dans la Mécanique céleste.

Les expressions analytiques des termes du troisième ordre par rapport aux excentricités et à l'inclinaison [réciproque de cette inégalité se trouvent dans le tome III de la Méc. cél. à la page 23, et la plupart des termes du cinquième ordre est donnée avec des signes contraires à la page 27 et 28. Je néglige les termes du septième ordre et des ordres supérieurs, mais j'ajoute aux termes mentionnés les suivans, qui sont aussi du cinquième ordre,

$$\text{à } N^{(10)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \omega' - 4\Pi)$$

$$\text{à } N^{(11)} \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon + \omega - 4\Pi)$$

où l'on a

$$\text{à } N^{(10)} = -\frac{e'\gamma^4}{256} \left[3\alpha^3 \frac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 27\alpha^2 b^{(4)}_{\frac{3}{2}} \right]$$

$$\text{à } N^{(11)} = +\frac{e\gamma^4}{256} \cdot 3\alpha^3 \frac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha}$$

et au lieu des valeurs de $\text{à } N^{(7)}$ et de $\text{à } N^{(8)}$ de la Méc. cél., je fais usage des suivantes

$$\begin{aligned} \text{à } N^{(7)} &= -\frac{e^3\gamma^2}{128} \left[\alpha^4 \frac{d^3b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + 18\alpha^3 \frac{d^2b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - 23\alpha^2 \frac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 810\alpha b^{(3)}_{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{e^2e'\gamma^2}{64} \left[\alpha^4 \frac{d^3b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + 16\alpha^3 \frac{d^2b^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + 30\alpha^2 \frac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 140\alpha b^{(3)}_{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{e'\gamma^4}{128} \left[3 \left\{ \alpha^3 \frac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \alpha^3 \frac{db^{(2)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} \right\} + 33 \left\{ \alpha^2 b^{(4)}_{\frac{3}{2}} + \alpha^2 b^{(2)}_{\frac{3}{2}} \right\} \right] \\ \text{à } N^{(8)} &= +\frac{e^3\gamma^2}{128} \left[\alpha^4 \frac{d^3b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + 11\alpha^3 \frac{d^2b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} - 2\alpha^2 \frac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 150\alpha b^{(4)}_{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad + \frac{ee^2\gamma^2}{64} \left[\alpha^4 \frac{d^3b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^3} + 13\alpha^3 \frac{d^2b^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha^2} + 66\alpha^2 \frac{db^{(4)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} - 686\alpha b^{(4)}_{\frac{3}{2}} \right] \\ &\quad - \frac{e\gamma^4}{128} \left[3 \left\{ \alpha^3 \frac{db^{(5)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} + \alpha^3 \frac{db^{(3)}_{\frac{3}{2}}}{d\alpha} \right\} + 24 \left\{ \alpha^2 b^{(5)}_{\frac{3}{2}} + \alpha^2 b^{(3)}_{\frac{3}{2}} \right\} \right] \end{aligned}$$

que j'ai obtenues par un développement exécuté par moi-même. La signification des lettres est ici la même que dans la Méc. cél., seulement on doit entendre sous γ le double du sinus de la demie inclinaison des orbites de Jupiter et de Saturne, et on doit étendre cette signification aux formules de la Méc. cél.

J'ai fondé les calculs numériques sur les mêmes élémens elliptiques de Jupiter et de Saturne, dont je me suis servi dans mon mémoire sur les perturbations de ces planètes, et c'est ainsi que j'ai trouvé les valeurs numériques suivantes, à qui j'ai donné par-tout les signes contraires,

$$\begin{aligned}
\text{à } M^{(0)} e'^3 \cos 3\pi' &= -0,0000421911 \\
\text{à } M^{(1)} e'^2 e \cos(2\pi' + \pi) &= +0,0014404616 \\
\text{à } M^{(2)} e' e^2 \cos(\pi' + 2\pi) &= -0,0002760790 \\
\text{à } M^{(3)} e^3 \cos 3\pi &= -0,0001085386 \\
\text{à } M^{(4)} e' \gamma^2 \cos(\pi' + 2\Pi) &= +0,0000162719 \\
\text{à } M^{(5)} e \gamma^2 \cos(\pi + 2\Pi) &= +0,0000008896
\end{aligned}$$

$$\text{Sommes.....} + 0,0010308144 \dots \dots \dots - 0,0000541232$$

$$\begin{aligned}
\text{à } N^{(0)} \cos(4\pi' + \pi) &= -0,00000131757 \\
\text{à } N^{(1)} \cos 3\pi' &= +0,00000035654 \\
\text{à } N^{(2)} \cos(2\pi' + \pi) &= -0,00001953659 \\
\text{à } N^{(3)} \cos(\pi' + 2\pi) &= +0,00000639011 \\
\text{à } N^{(4)} \cos 3\pi &= +0,00000562727 \\
\text{à } N^{(5)} \cos(-\pi' + 4\pi) &= -0,00000066408 \\
\text{à } N^{(6)} \cos(2\pi' - \pi + 2\Pi) &= -0,00000018247 \\
\text{à } N^{(7)} \cos(\pi' + 2\Pi) &= +0,00000003994 \\
\text{à } N^{(8)} \cos(\pi + 2\pi) &= -0,00000002318 \\
\text{à } N^{(9)} \cos(-\pi' + 2\pi + 2\Pi) &= +0,00000007250 \\
\text{à } N^{(10)} \cos(-\pi' + 4\Pi) &= -0,00000000028 \\
\text{à } N^{(11)} \cos(-\pi + 4\Pi) &= +0,00000000117
\end{aligned}$$

$$\text{Sommes.....} - 0,00000923664 \dots \dots \dots - 0,00000751480$$

*) J'ai déjà ajouté aux nombres de cette ligne le terme, qui provient de l'attraction de Saturne sur le Soleil.

Ainsi, après avoir ajouté ces sommes respectives, on trouve
 — à $R = +m'.0,0010215778 \cos(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$
 — $m'.0,0000616380 \sin(5n't - 2nt + 5\varepsilon' - 2\varepsilon)$

En y introduisant les anomalies moyennes au lieu des longitudes moyennes, et en se rappelant, que la fonction perturbatrice, que j'ai appelée Ω d'après *Lagrange*, est égale à $-R$, on trouve facilement

$$\begin{aligned}
\Omega &= +m'.0,0004021973 \cos(5g' - 2g) \\
&\quad - m'.0,0009410936 \sin(5g' - 2g)
\end{aligned}$$

g' et g étant les anomalies moyennes de Saturne et de Jupiter. En appelant f le facteur par lequel on doit multiplier le premier terme de cette expression pour en déduire le coefficient de l'inégalité correspondante du mouvement moyen, le facteur du second terme sera $-f$, et l'on trouve au moyen des données de mon mémoire.

$$\log f = 6,0272731$$

$$\begin{aligned}
\text{à } M^{(0)} e'^3 \sin 3\pi' &= -0,0009279281 \\
\text{à } M^{(1)} e'^2 e \sin(2\pi' + \pi) &= +0,0002382517 \\
4 M^{(2)} e' e^2 \sin(\pi' + 2\pi) &= +0,0007049532 \\
\text{à } M^{(3)} e^3 \sin 3\pi &= -0,0000715182 \\
\text{à } M^{(4)} e' \gamma^2 \sin(\pi' + 2\Pi) &= -0,0000054951 \\
\text{à } M^{(5)} e \gamma^2 \sin(\pi + 2\Pi) &= +0,0000076133
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{à } N^{(0)} \sin(4\pi' - \pi) &= +0,00000034316 *) \\
\text{à } N^{(1)} \sin 3\pi' &= +0,00000784134 \\
\text{à } N^{(2)} \sin(2\pi' + \pi) &= -0,00000323134 \\
\text{à } N^{(3)} \sin(\pi' + 2\pi) &= -0,00001631677 \\
\text{à } N^{(4)} \sin 3\pi &= +0,00000370792 \\
\text{à } N^{(5)} \sin(-\pi' + 4\pi) &= +0,00000065540 \\
\text{à } N^{(6)} \sin(2\pi' - \pi + 2\Pi) &= -0,00000030786 \\
\text{à } N^{(7)} \sin(\pi' + 2\Pi) &= -0,00000001349 \\
\text{à } N^{(8)} \sin(\pi + 2\Pi) &= -0,00000019828 \\
\text{à } N^{(9)} \sin(-\pi' + 2\pi + 2\Pi) &= +0,00000000676 \\
\text{à } N^{(10)} \sin(-\pi' + 4\Pi) &= -0,00000000040 \\
\text{à } N^{(11)} \sin(-\pi + 4\Pi) &= -0,00000000124
\end{aligned}$$

et par conséquent l'inégalité cherchée égale à

$$+428'',265 \sin(5g' - 2g) + 1002'',088 \cos(5g' - 2g)$$

Or, la table V de mon mémoire mentionné donne

$$\begin{aligned}
\Omega &= +m'(6,6044167) \cos(5g' - 2g) \\
&\quad - m'(6,9736110) \sin(5g' - 2g)
\end{aligned}$$

où les nombres en parenthèses sont les logarithmes des coefficients, que j'ai obtenus, comme on sait, par une méthode tout à fait différente de celle-ci, par laquelle j'ai calculé les coefficients ci-dessus. En multipliant les coefficients de la dernière expression de Ω par f et par $-f$, on aura l'inégalité cherchée égale à

$$+428'',243 \sin(5g' - 2g) + 1002'',038 \cos(5g' - 2g)$$

La différence entre ces deux résultats est

$$-0'',022 \sin(5g' - 2g) - 0'',050 \cos(5g' - 2g)$$

Voici donc un accord aussi bon, qu'on peut le désirer.

Obs. de Seeberg le 2 Juin 1834.

Hansen.