DER PHYSIK UND CHEMIE.

NEUE FOLGE. BAND XXV.

I. *Ueber den zeitlichen Verlauf der electrischen
Rückstandsbildung im Paraffin;
von C. Dieterici.*

I. Die ersten messenden Versuche über den Verlauf der Rückstandsbildung in Leydener Flaschen hat R. Kohlrausch¹⁾ angestellt und zugleich aus denselben eine empirische Formel abgeleitet, welche mit hinreichender Genauigkeit die disponible Ladung einer geladenen Flasche zu gegebener Zeit zu berechnen gestattet. Die theoretische Begründung seiner Formel liess aber Kohlrausch unerörtert. Diese hat bald nach der Veröffentlichung jener Versuche Riemann²⁾ zu geben gesucht, indem er als Ursache der Rückstandsbildung der ponderablen Materie der Dielectrica eine antelectrische Kraft zuschrieb. Er nahm an, dass die ponderablen Körper „nicht dem Electrischwerden oder dem Aufnehmen von Spannungselectricität, sondern dem Electrischsein oder dem Enthalten von Spannungselectricität mit endlicher Kraft widerstrebten.“ Die aus dieser Hypothese sich ergebenden Formeln sind indessen, wie Hr. W. Giese³⁾ gezeigt hat, nicht im Einklang mit der Erfahrung.

Maxwell⁴⁾ hat gezeigt, dass sich die Rückstandsbildung der Dielectrica erklären lasse aus der Annahme, dass diese aus verschiedenartigen Medien zusammengesetzt seien; er gelangt zur Bestimmung der disponiblen Ladung einer geladenen Flasche bei gegebener Zeit zu einem Ausdruck, der

1) R. Kohlrausch, Pogg. Ann. 91. p. 56. 1854.

2) Riemann, Gesammelte mathematische Werke, p. 48 u. 345 u. ff.

3) W. Giese, Wied. Ann. 9. p. 161. 1880.

4) Maxwell, Lehrbuch der Electricität und des Magnetismus. 1. p. 468 u. ff.

aus einer Summe von Exponentialfunctionen gebildet ist, deren soviel verschiedene auftreten, als verschiedene Stoffe in dem Glase vorhanden sind. Dieser Ausdruck ist aber praktisch unbrauchbar, da man, um eine hinreichend genaue Annäherung an die Beobachtung zu erlangen, sehr vieler solcher Exponentialfunctionen bedarf.

Endlich hat Hr. Clausius¹⁾ eine Theorie der Dielectrica aufgestellt. Hr. Clausius verfährt in der mathematischen Behandlung der Dielectrica, ebenso wie Poisson und Green in der Theorie des Magnetismus. An diese Theorie soll hier angeknüpft werden. Ich habe mich bemüht, die aus derselben für den zeitlichen Verlauf der Rückstandsbildung sich ergebenden Folgerungen zu ziehen, und habe diese mit der Erfahrung verglichen. Es ergibt sich ein Ausdruck, der mit voller Genauigkeit den zeitlichen Verlauf der Rückstandsbildung zu berechnen gestattet. Bevor ich jedoch auf die Theorie eingehe, will ich die Beschreibung der Versuche mit ihren Resultaten voranstellen.

II. Zu den Versuchen benutzte ich ein Kirchhoff'sches Electrometer und einen Condensator, zwischen dessen horizontal übereinander liegenden Platten das rückstandbildende Dielectricum eingeführt wurde. Diese Apparate waren in folgender Weise miteinander verbunden. Das eine Quadrantenpaar des Electrometers war dauernd mit der Erde in gut leitender Verbindung; von dem anderen führte ein dünner, nicht überspannener Kupferdraht zu einem Quecksilbernaf, in welchen die Drähte zweier Wippen eintauchten. Die Wippe 1 stellte die Verbindung dieses Napfes mit einem zweiten her, von welchem ein Draht zu der oberen Platte des Condensators führte, dessen untere zur Erde abgeleitet war; die Wippe 2 gestattete den mit dem Electrometer verbundenen Napf mit einem dritten, zur Erde abgeleiteten, zu verbinden. Die beiden Wippen wurden durch Fäden regiert, deren Enden an die Speichen eines horizontal drehbaren Rades befestigt waren. Um die Radperipherie und an derselben mit seinem einen Ende befestigt, war ein Faden ge-

1) Clausius, Mech. Wärmetheorie. 2. Cap. III. p. 62.

schlungen, an dessen anderes Ende ein Gewicht gebunden war, welches durch sein Fallen das Rad in Bewegung setzte. Vor Beginn des Versuchs stand das Rad so, dass der die Wippe 1 regierende Faden angezogen, die Verbindung zwischen dem Electrometer und dem Condensator also aufgehoben war, während der zweite Faden lose herabhing, das Electrometer also mit der Erde verbunden war. Bei dieser Stellung der Wippen wurde die obere Condensatorplatte mit der ladenden Batterie in dauernder Verbindung gelassen. Zur Zeit $t = 0$ wurde diese Verbindung aufgehoben und zugleich das die Wippen regierende Rad ausgelöst. Letzteres, durch das fallende Gewicht in Bewegung gesetzt, liess den die Wippe 1 regierenden Faden nach, diese fiel und in diesem Momente der Bewegung des Rades waren beide Wippen geschlossen, d. h. Electrometer und Condensator waren mit der Erde in Verbindung.

Gleich danach wurde aber durch die weitere Bewegung des Rades der die zweite Wippe regierende Faden angespannt, diese aufgezogen, d. h. die Verbindung des Electrometers und Condensators mit der Erde aufgehoben, während die erstere Verbindung bestehen blieb. Hiernach schlug das Rad an einen Ausschlag an, und es wurde nun mit Fernrohr und Scala das Potential, zu welchem nach der Entladung der wieder aufgetretene Rückstand das Electrometer und die obere Condensatorplatte mit den verbindenden Drähten lud, von Minute zu Minute am ersteren abgelesen.

Die ganze Zeitdauer, während welcher das Rad in Bewegung war, betrug etwa $\frac{1}{3}$ Secunde, und von dieser Zeit wurde etwa der zehnte Theil für die Dauer der Entladung in Anspruch genommen.

Sämmtliche Drahtführungen, Wippen etc. waren durch umgebende, gut zur Erde abgeleitete Hüllen sorgfältig vor äusseren Influenzwirkungen geschützt.

Zur Ladung des Condensators benutzte ich eine Batterie von trockenen Daniell'schen Elementen, wie sie Hr. v. Beetz¹⁾ neuerdings vorgeschlagen hat. Eine etwa 10 cm

1) W. v. Beetz, Wied. Ann. 22 p. 402. 1884.

lange Glasröhre wird zur einen Hälfte mit Gyps gefüllt, welcher mit concentrirter Zinkvitriollösung, zur anderen Hälfte mit Gyps, welcher mit concentrirter Kupfervitriollösung angerührt ist. In die beiden Hälften wird resp. eine Zink- oder Kupferelectrode eingesenkt und dann der Gyps erstarren gelassen. Die so hergestellten trockenen Daniell'schen Elemente haben sich bei meinen Versuchen als dauernd constant erwiesen, wie ein von Zeit zu Zeit vorgenommener Vergleich mit einem Normalelement zeigte. Allerdings wurde sie auch nie geschlossen gebraucht.

Als rückstandbildendes Dielectricum habe ich Paraffin benutzt. Es lässt sich dasselbe, wie Hr. Boltzmann¹⁾ angibt, leicht zwischen plane Glasplatten giessen und nach dem Erstarren ohne Schwierigkeit von denselben ablösen, wenn diese vorher leicht eingeölt waren. Ich benutzte zwei Platten von 1,722 und 2,358 mm Dicke. Dieselben lagen bei den Versuchen auf der unteren, stets mit der Erde verbundenen Condensatorplatte, und diese wurde so weit gesenkt, dass die obere Grenzfläche der Paraffinplatte und die obere isolirte Condensatorplatte sich nicht berührten.

Wie man aus der Beschreibung der Versuchsanordnung ersieht, habe ich den nach der Entladung wieder auftretenden Rückstand gemessen. R. Kohlrausch²⁾ und Hr. Giese³⁾ verfahren umgekehrt. Ersterer gab der inneren isolirten Belegung einer Leydener Flasche eine gewisse Ladung und bestimmte die nach gegebener Zeit noch vorhandene disponible Ladung; letzterer verband die äussere Belegung einer Leydener Flasche mit einer ladenden Batterie, während die innere mit einem Electrometer und durch dieses zur Erde abgeleitet war. In einem gegebenen Zeitmoment wird das aus Electrometer und innerer Belegung gebildete System isolirt und nun die während einer Minute infolge der Rückstandsbildung veranlasste Aenderung des

1) Boltzmann, Wien. Ber. 68, p. 81. 1873.

2) R. Kohlrausch, l. c.

3) Giese, l. c.

Potentials gemessen. Dadurch wird diejenige Electricitätsmenge bestimmt, welche zur inneren Belegung in einer Minute zuströmen muss, um auf ihr das Potential Null zu erhalten. Im ersten Falle wird der Electricitätsverlust auf der isolirten Belegung gemessen, der sowohl von der Rückstandsbildung, wie auch von dem Electricitätsverlust an die Luft herrührt. Der letztere ist aber bei der hohen Ladung der inneren Belegung eine ins Gewicht fallende Fehlerquelle welche sich nur unsicher bestimmen lässt und auch sehr veränderlich ist. Im zweiten Falle wird die Beobachtung infolge der uncontrolirbaren Schwankungen des Potentials der ladenden Batterie unsicher.

Bei der von mir benutzten Versuchsanordnung fällt die letzte Fehlerquelle ganz fort, die erstere ist auf ein Minimum beschränkt, weil der wieder auftretende Rückstand den Condensator und das Electrometer nur bis zu einem Potential von höchstens 6 Daniell lud, und bei dieser Ladung der Electricitätsverlust an die Luft und durch etwaige mangelhafte Isolation verschwindend gering ist. Er betrug bei meinen Versuchen bei 5 Daniell Ladung nach 10 Minuten etwa 1,2 Proc. Allerdings führt die benutzte Versuchsanordnung eine andere Unsicherheit mit sich. Das Electrometer blieb nämlich nach der Entladung des Condensators während der ganzen Zeit, während welcher die Rückstandsbildung beobachtet wurde, mit diesem verbunden, ohne dass der Nullpunkt controlirt wurde. Zahlreiche Messungsreihen mussten auch wegen der Unsicherheit des Nullpunktes verworfen werden. Indessen gelang es, namentlich in den ruhigeren Abendstunden, in denen das Haus und damit das Electrometer nicht den sonst häufigen Erschütterungen ausgesetzt war, Messungsreihen zu erlangen, bei denen diese Unsicherheit nicht vorhanden war.

Ich theile im Folgenden vier Beobachtungsreihen mit, welche an derselben Paraffinplatte unmittelbar nacheinander ausgeführt sind. Bei diesen Reihen war die dünnere Paraffinplatte von 1,722 mm Dicke benutzt, der Abstand der beiden Condensatorplatten voneinander 2,646 mm; ihr Durchmesser 148,09 mm. Die Beobachtungsreihen sind angestellt,

nachdem die obere Condensatorplatte, resp. 2 Minuten, 10 Minuten, 1 Stunde und 24 Stunden mit dem einen Pol einer Batterie von 66 der beschriebenen Daniell'schen Elemente geladen war, deren anderer Pol mit der Erde verbunden war. Die erste Columnne enthält die Zeit, gerechnet in Minuten vom Momente der Entladung an, die anderen enthalten das Potential, zu welchem der wieder aufgetretene Rückstand zu der gegebenen Zeit das aus Electrometer und oberer Condensatorplatte mit den verbindenden Drähten zusammengesetzte isolirte System lud, ausgedrückt in der Einheit eines Normaldaniells, welches ich stets zum Vergleich benutzte. Letzteres bestand aus zwei mit gesättigter Zink-, resp. Kupfervitriollösung gefüllten Reagensgläsern, in welche bez. amalgamirtes reines Zink und Kupfer eintauchte. Die Verbindung beider Gläsern geschah nur während des Vergleichs mit Hülfe eines U-förmig gebogenen kleinen Capillarrohres, welches mit Wasser gefüllt war. Die Capacität des Electrometers c ist bei jeder Versuchsreihe angegeben, ausgedrückt in der Einheit der Capacität k des Condensators von den angegebenen Dimensionen. Der Electricitätsverlust an die Luft ist berücksichtigt.

Tabelle I. Ladung 66 Daniell.

t	I.	II.	III.	III.
	Ladungszeit 2 Minuten $c = 2,60 k$ Rückstand	Ladungszeit 10 Minuten $c = 2,60 k$ Rückstand	Ladungszeit 1 Stunde $c = 2,55 k$ Rückstand	Ladungszeit 24 Stunden $c = 2,42 k$ Rückstand
1	1,23 D.	1,83 D.	1,96 D.	1,96 D.
2	1,52 "	2,37 "	2,63 "	2,65 "
3	1,65 "	2,66 "	3,07 "	3,12 "
4	1,79 "	2,90 "	3,41 "	3,50 "
5	1,86 "	3,09 "	3,70 "	3,81 "
6	1,92 "	3,25 "	3,93 "	4,06 "
7	1,96 "	3,37 "	4,13 "	4,28 "
8	2,00 "	3,49 "	4,30 "	4,48 "
9	—	3,59 "	4,45 "	4,66 "
10	—	3,68 "	4,59 "	4,82 "
11	—	3,76 "	4,71 "	4,96 "
12	—	3,82 "	4,82 "	5,10 "
13	—	—	4,92 "	5,22 "
14	—	—	5,02 "	5,33 "
15	—	—	5,11 "	5,43 "

Die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen sind in der Figur in der Gestalt von Curven wiedergegeben; die Abscissenaxe gibt die Zeit, die Ordinatenaxe den in der betreffenden Zeit ausgebildeten Rückstand.

Ein Blick auf die Tabelle lehrt, dass, wenn man die Quotienten, aus den zu gleichen Zeiten in zwei Messungsreihen ausgebildeten Rückständen bildet, diese nicht constant sind, oder dass die Curven bei langer Ladungszeit nicht zur Deckung gebracht werden können mit den bei kurzer Ladungszeit erhaltenen durch blosses Verschieben; d. h. der qualitative Verlauf der Rückstandsbildung ist abhängig von der vorangegangenen Ladungszeit.

Beobachtet man jedoch die Rückstandsbildung bei verschiedener Höhe der Ladung, aber gleicher Ladungszeit, so ergibt sich, dass die so erhaltenen Curven einander proportional sind, d. h. der qualitative Verlauf der Rückstandsbildung ist unabhängig von der Grösse der vorhergegangenen Ladung.

Dies sind zwei Sätze, die lediglich aus der Erfahrung gefolgert sind, und über die uns die Theorie, zu der wir jetzt übergehen wollen, Aufschluss geben muss.

III. Wie schon eingangs erwähnt, soll von derjenigen Behandlungsweise der Theorie der Dielectrica ausgegangen werden, durch welche Poisson das Verhalten magnetischer Körper unter dem Einflusse magnetischer Kräfte abzuleiten gesucht hat. Diese Theorie der dielectrischen Polarisation ist hinreichend bekannt¹⁾, um ein nur kurzes Anführen der hauptsächlichsten hier in Betracht kommenden Gleichungen zu rechtfertigen.

Ich bezeichne mit V das Potential der äusseren Electricität, mit U die Potentialfunction der durch deren Wirkung im Inneren des Dielectricums vertheilten Electricität, so sind die in der Volumeneinheit des Dielectricums parallel den Axen der xyz erzeugten electricischen Momente:

$$\alpha = -\varepsilon \frac{\partial(U+V)}{\partial x}, \quad \beta = -\varepsilon \frac{\partial(U+V)}{\partial y}, \quad \gamma = -\varepsilon \frac{\partial(U+V)}{\partial z},$$

wo ε eine von der Natur der Substanz abhängige Constante ist. Es ist dann die Potentialfunction des polarisirten Dielectricums:

$$U' = \int \left(\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + \beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) d\tau,$$

wo die Integration auszuführen ist über den ganzen vom Dielectricum eingenommenen Raum. Wendet man auf dieses Integral den Green'schen Satz an, so erhält man das Potential U' des polarisirten Dielectricums in Bezug auf einen äusseren Punkt:

$$U' = \varepsilon \int (U+V) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} dw,$$

wo die Integration auszuführen ist über die Oberfläche des Dielectricums. Führt man dieses Integral aus für eine Franklin'sche Tafel mit kreisförmigen Belegungen, so erhält²⁾ man, wenn man die Dicke der dielectrischen Schicht als unend-

1) Vgl. Clausius, Mech. Wärmetheorie. 2. Abschn. III.; v. Helmholtz, Borchardt's Journ. 72. p. 57. 1870 und gesammelte Abhandlungen; Kirchhoff, Crelle's Journ. 48. p. 348. 1853 und gesammelte Abhandlungen.

2) Vgl. Clausius, l. c.

lich klein im Vergleich zum Durchmesser der Platte ansieht, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Glieder, die durch die Polarisirung des Dielectricums hervorgebrachte Potentialdifferenz $U_1 - U_2$ ausgedrückt durch die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ der äusseren Electricität durch die Gleichung:

$$(1) \quad U_1 - U_2 = -\frac{4\pi\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon} (V_1 - V_2).$$

Ist also ein Condensator in Luft geladen zur Potentialdifferenz $(V_1 - V_2)$, also mit einer Electricitätsmenge:

$$Q = k(V_1 - V_2),$$

wo k die Capacität des Condensators bedeutet, und wird nun ein Dielectricum, auf welches sich die Constante ϵ bezieht, zwischen die Platten gebracht, so ist die nun noch auf den Platten bestehende Potentialdifferenz:

$$V_1 - V_2 + U_1 - U_2 = \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon} (V_1 - V_2).$$

Die Menge der freien Electricität auf den Platten ist:

$$Q' = k \frac{1}{1 + 4\pi\epsilon} (V_1 - V_2).$$

Es ist also durch die Polarisirung des Dielectricums gebunden die Electricitätsmenge:

$$Q'' = Q - Q' = \frac{4\pi\epsilon}{1 + 4\pi\epsilon} Q.$$

Wird der Condensator entladen, während die Polarisirung des Dielectricums noch bestehen bleibt, so wird die Electricitätsmenge Q' fortgenommen, während die Menge Q'' noch auf den Platten gebunden bleibt.

Ich nehme an, dass bei den rückstandbildenden Dielectricis ein Theil jener Polarisirung nach der Entladung noch bestehen bleibt, und bezeichne das Potential des polarisirten Dielectricums mit φ . Die Dichtigkeit ρ der freien Electricität im Inneren des Dielectricums ist dann in bekannter Bezeichnung:

$$(1) \quad \rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta\varphi.$$

Diese Dichtigkeit der geschiedenen Electricität im Inneren des Dielectricums nimmt mit der Zeit ab, weil die

äussere Ladung, welche die Polarisation hervorgebracht und aufrecht erhalten hat, nicht mehr vorhanden ist, und es ist diese Abnahme an einem jeden Punkte im Inneren proportional der Strömung. Legen wir die x -Axe des Coordinatensystems senkrecht zu den Platten des Condensators, so findet letztere nur in der Richtung der x -Axe statt, und es ist nach der phoronomischen Gleichung:

$$(2) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = - \frac{\partial u}{\partial x},$$

wo u die Strömung in Richtung der x -Axe bezeichnet.

Die Strömung u ist nun weiter proportional der an jedem Orte herrschenden electromotorischen Kraft, also proportional mit $-\partial \varphi / \partial x$. Durch die Abnahme der Polarisation der Substanz wird aber auf den Platten des Condensators ein Theil der dort gebundenen Electricitätsmenge wieder frei. Bezeichnen wir mit E_0 die zur Zeit $t = 0$ dort gebunden gewesene Electricitätsmenge, mit E die zur Zeit t noch gebundene Menge, so ist $E_0 - E$ die zur Zeit t frei gewordene Electricitätsmenge. Diese frei gewordene Electricitätsmenge strebt aber in jedem Volumenelemente ein gewisses Moment aufrecht zu erhalten, es ist demnach die Strömungskomponente u proportional $-\partial (\varphi - \varphi') / \partial x$, wo φ' das Potential der Electricitätsmenge $E_0 - E$ bedeutet. Da nun E , d. i. die zur Zeit t noch gebundene Electricitätsmenge, der noch vorhandenen Polarisation oder der Dichtigkeit ρ proportional ist, so ist die Strömungskomponente u proportional mit $-\partial \varphi / \partial x$ und mit $-\partial \rho / \partial x$. Demnach wird:

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \text{ oder:}$$

$$(3) \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} - \nu \rho.$$

Dieses ist dieselbe Differentialgleichung, zu welcher auch Riemann gelangt, sie ist hier nur aus der Anschauung der dielectricischen Polarisation interpretirt.

Man wird bemerken, dass die abgeleitete Differentialgleichung dieselbe ist, auf welche man in der Theorie der Wärmeleitung unter Berücksichtigung der Strahlung geführt wird. Es ist dies eine bekannte Analogie; die Strahlung

wird in unserem Probleme ersetzt durch den Umstand, dass von der auf den Condensatorplatten frei werdende Electricitätsmenge ein Theil der Polarisirung im Inneren des Dielectricums aufrecht erhalten wird.

Unsere Differentialgleichung gilt sowohl für das Vergehen, wie auch für das Entstehen der Polarität. Hat nun das Dielectricum vor der Entladung lange Zeit hindurch unter dem Einflusse der äusseren Ladung gestanden, so wird man annehmen können, dass die Polarisirung vollendet sei, also $\partial \rho / \partial t = 0$. Dann folgt:

$$\mu^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} = \nu \rho,$$

woraus sich ergibt, dass die Dichtigkeit der freien Electricität im Inneren des Dielectricums längs der x -Axe wie eine Exponentialfunction sich ändert. Es gilt dasselbe also auch für q ; demnach haben wir unsere Differentialgleichung, die wir in der Form:

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = \mu^2 \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} - \nu \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}$$

schreiben wollen, zu lösen unter der Nebenbedingung:

$$(5) \quad t = 0 \quad q = q_0 e^{-\nu x},$$

wo q_0 das Potential zur Zeit $t = 0$ bedeutet, am Orte $x = 0$, als welchen wir die obere Fläche des Dielectricums annehmen wollen.

Ferner haben wir noch die Nebenbedingung:

$$(6) \quad x = 0 \quad \frac{\partial q}{\partial x} = 0$$

zu erfüllen, welche aussagt, dass durch die Oberfläche des Dielectricums, welche bei der benutzten Versuchsanordnung durch eine Luftschicht von der oberen Condensatorplatte getrennt war, Electricität weder ein- noch austritt.

Um die vorliegende Gleichung zu lösen, setzt man ¹⁾:

$$(7) \quad q = e^{-\nu t} u \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Die allgemeine Lösung der letzteren Differentialgleichung ist:

1) Fourier, Theorie der Wärme, deutsch v. B. Weinstein 1884. § 363 u. ff.

$$(8) \quad u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-q^2} dq \cdot F(x + 2q\mu\sqrt{t}),$$

worin q eine willkürliche Variable und $F(x + 2q\mu\sqrt{t})$ eine Function bedeutet, die von ihrem Argument ebenso abhängt, wie die Function, welche den Anfangszustand darstellt, von x abhängig ist.

Die allgemeine Lösung (8) haben wir nun so umzuformen, dass den Nebenbedingungen (5) und (6) genügt wird. Um dies zu thun, wollen wir uns das Dielectricum als unendlich ausgedehnt denken, dasselbe sei durchsetzt von einer Ebene am Orte $x = 0$, welche lange Zeit hindurch vor der Entladung zu einem gewissen Potential geladen war; wird nun diese Ebene plötzlich entladen, so ist nach Gleichung (5) der Anfangszustand gegeben durch:

$$\begin{aligned} t = 0 \quad x = 0 \dots + \infty \quad F(x) &= \varphi_0 e^{-px}, \\ x = 0 \dots - \infty \quad F(x) &= \varphi_0 e^{+px}. \end{aligned}$$

Demnach wird:

$$F(x + 2q\mu\sqrt{t}) = \varphi_0 e^{-p(x+2\mu q\sqrt{t})} \quad q = -\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} \dots \dots \infty,$$

$$F(x + 2q\mu\sqrt{t}) = \varphi_0 e^{+p(x+2\mu q\sqrt{t})} \quad q = -\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} \dots \dots \infty.$$

Führt man diese Ausdrücke in die Gleichung (8) für u ein, so wird:

$$u = \varphi_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{px} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-q^2 - 2p\mu q\sqrt{t}} dq + \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-px} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-q^2 + 2p\mu q\sqrt{t}} dq \right\},$$

oder indem man jedes Integral mit $e^{-\mu^2 p^2 t}$ multiplicirt und dividirt:

$$\begin{aligned} u &= \varphi_0 \left\{ e^{px + \mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-q^2 + 2\mu p q\sqrt{t} - \mu^2 p^2 t} dq \right. \\ &\quad \left. + e^{-px + \mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-q^2 - 2\mu p q\sqrt{t} - \mu^2 p^2 t} dq \right\}, \end{aligned}$$

oder, indem man $r = q - \mu p \sqrt{t}$
 $s = q + \mu p \sqrt{t}$
 setzt:

$$u = q_0 \left\{ e^{\mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}}^{\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} - \mu p \sqrt{t}} e^{-r^2} dr + e^{-\mu^2 p^2 t} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\mu\sqrt{t}} + \mu p \sqrt{t}}^{+\frac{x}{2\mu\sqrt{t}}} e^{-s^2} ds \right\}.$$

Wenn man in diesem Ausdruck $+x$ in $-x$ überführt, so ändert er sich nicht, d. h. der Ausdruck gilt auch für einen Körper, der sich nach einer Seite hin in die Unendlichkeit erstreckt und an der Grenzfläche $x=0$ begrenzt ist durch eine Ebene, durch welche Electricität weder ein- noch austritt. Wir haben demnach durch diesen Ausdruck unsere Aufgabe mit den Nebenbedingungen (5) und (6) erfüllt, wenn wir die Dicke der Paraffinplatte als unendlich gross ansehen.

Bilden wir nun den obigen Ausdruck u für den Punkt $x=0$, so erhalten wir:

$$u = q_0 e^{\mu^2 p^2 t} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{-\mu p \sqrt{t}} e^{-r^2} dr + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mu p \sqrt{t}}^{+\infty} e^{-s^2} ds \right\}.$$

Nun ist:
$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-s^2} ds = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-r^2} dr = \frac{1}{2}.$$

und sehen wir ferner:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(R)} e^{-r^2} dr = \psi(R)$$

als Function der oberen Grenze R an, so folgt:

$$u = q_0 e^{\mu^2 p^2 t} (1 - 2\psi(\mu p \sqrt{t})).$$

Folglich wird:

$$q = q_0 e^{(\mu^2 p^2 - v)t} (1 - 2\psi(\mu p \sqrt{t})).$$

Setzen wir noch zur Abkürzung:

$$\mu^2 p^2 - v = \beta, \quad \mu p = \alpha,$$

so folgt:

$$(9) \quad \varphi = \varphi_0 e^{\beta t} (1 - 2\psi(\alpha \sqrt{t})).$$

Wir haben also das Potential des in polarem Zustande befindlichen Dielectricums in Bezug auf einen Punkt der oberen Grenzfläche dargestellt als Function der Zeit. Dieselbe Abhängigkeit von der Zeit hat also auch das Potential des Dielectricums in Bezug auf die obere Condensatorplatte, und demnach ist auf dieser die frei gewordene Electricitätsmenge $E_0 - E$ oder der Rückstand gegeben durch:

$$R = k(\varphi_0 - \varphi) = k\varphi_0 - k\varphi_0 e^{\beta t} (1 - 2\psi(\alpha \sqrt{t})),$$

wobei k die Capacität der oberen Condensatorplatte bedeutet. Folglich muss sich auch das Potential, zu welchem der wieder aufgetretene Rückstand das Electrometer und die obere Condensatorplatte ladet, darstellen lassen in der Form:

$$(1) \quad P_t = P_0 - P_0 e^{\beta t} (1 - 2\psi(\alpha \sqrt{t})).$$

IV. Ich wende mich nun zum Vergleich dieses Ausdruckes mit der Erfahrung.

Zur Berechnung der in der Tabelle mitgetheilten Beobachtungsreihen konnten die von Kramp berechneten Tafeln für die Function ψ benutzt werden. Man hat dann zunächst aus den zu drei verschiedenen Zeiten beobachteten Rückständen — ich benutzte hierzu stets die zu den Zeiten $t = 1, 4, 9$ beobachteten Potentiale — die drei Constanten P_0 , β und α zu bestimmen und mit diesen die übrigen Beobachtungen zu berechnen. Unsere Formel (10) gilt zunächst nur für diejenigen Messungsreihen, bei denen man die Polarisirung des Dielectricums als vollkommen oder doch nahezu vollkommen betrachten kann, also für die nach langer Ladungszeit erhaltenen Beobachtungen. Ich habe sie jedoch auch auf die nach kurzer Ladungszeit beobachtete Rückstandsbildung angewendet. Auf die angegebene Weise berechnet, ergeben sich die Constanten der vier mitgetheilten Beobachtungsreihen wie folgt:

Tabelle II.

Beobachtungsreihe	P_0	α	β	$\nu = \alpha^2 - \beta$
von 2 Minuten Ladungszeit	2,10	0,765	0,3966	0,1886
„ 10 „ „	4,40	0,486	0,1718	0,0644
„ 1 Stunde „	6,00	0,334	0,05572	0,0599
„ 24 Stunden „	6,50	0,296	0,03362	0,0540

Um eine Anschauung zu geben, mit welcher Genauigkeit der gefundene Ausdruck die Beobachtung zu berechnen gestattet, sind in der folgenden Tabelle III die Beobachtung und Berechnung zweier Messungsreihen, die eine von kurzer, die andere von langer Ladungsdauer, miteinander verglichen. Ich wähle hierzu die erste und dritte Beobachtungsreihe:

Tabelle III.

l	Messungsreihe I.			Messungsreihe III.		
	Beobachtet	Berechnet	Differenz	Beobachtet	Berechnet	Differenz
1	1,23 D.	1,23 D.	0,00	1,96 D.	1,96 D.	0,00
2	1,52 „	1,51 „	-0,01	2,63 „	2,62 „	-0,01
3	1,68 „	1,68 „	0,00	3,07 „	3,07 „	0,00
4	1,79 „	1,79 „	0,00	3,41 „	3,41 „	0,00
5	1,86 „	1,86 „	0,00	3,70 „	3,69 „	-0,01
6	1,92 „	1,92 „	0,00	3,98 „	3,92 „	-0,01
7	1,96 „	1,95 „	-0,01	4,13 „	4,13 „	0,00
8	2,00 „	2,00 „	0,00	4,30 „	4,28 „	-0,02
9	—	—	—	4,45 „	4,45 „	0,00
10	—	—	—	4,59 „	4,58 „	-0,01
11	—	—	—	4,71 „	4,71 „	0,00
12	—	—	—	4,82 „	4,81 „	-0,01
13	—	—	—	4,92 „	4,91 „	-0,01
14	—	—	—	5,02 „	5,00 „	-0,02
15	—	—	—	5,11 „	5,09 „	-0,02

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung eine vollkommene. Unsere Formel eignet sich also zur Darstellung des zeitlichen Verlaufes der Rückstandsbildung, sie ergibt ferner, dass der bei gleicher Ladungsdauer, aber verschiedener Grösse der vorangegangenen Ladung ausgebildete Rückstand dieser Ladung proportional ist, da P_0 derselben proportional ist.

Um den anderen aus der Erfahrung abgeleiteten Satz über den Zusammenhang des qualitativen Verlaufes der

Rückstandsbildung mit der vorangegangenen Ladungszeit als in Uebereinstimmung mit unserer Formel zu erkennen, betrachten wir die Werthe, welche die Constante α bei den verschiedenen Messungsreihen hat. Es war nun:

$$\alpha = \mu p.$$

μ ist nach unseren theoretischen Anschauungen eine Constante der Substanz. Setzen wir also voraus, dass μ bei den verschiedenen Messungsreihen constant sei, so wird p sich ebenso ändern, wie α , also von den Beobachtungen nach kurzer Ladungsdauer zu denen bei langer, vorangegangener Ladung hin abnehmen, und daraus folgt, dass die Curve:

$$Q = e^{-px},$$

welche die Dichtigkeit der freien Electricität im Inneren des Dielectricums darstellt, bei kurzer vorangegangener Ladungszeit von der Grenzfläche an schnell abfällt, während bei langer Ladungszeit sie immer flacher wird. Der zweite, erfahrungsmässig gefolgerte Satz findet also aus den verschiedenen Anfangszuständen seine theoretische Erklärung.

Hr. Hopkinson¹⁾ hat zur Berechnung seiner Beobachtungen über die Rückstandsbildung denselben Weg eingeschlagen, den Hr. Boltzmann zur theoretischen Erklärung der elastischen Nachwirkung angegeben hat. Boltzmann²⁾ nimmt an, dass das Kräftepaar, welches einen tordirten Draht in seine Gleichgewichtslage zurückzudrehen strebt, nicht nur abhängt von der Grösse des Ablenkungswinkels, sondern auch von der Dauer der Ablenkung, welche der beobachteten elastischen Nachwirkung vorhergeht. In ähnlicher Weise verfährt Hopkinson, indem er den electrischen Rückstand auffasst als bedingt durch die Superposition zweier Functionen, deren eine abhängt von der Zeit, die seit der der Entladung verflossen ist, während die andere von der vorangegangenen Ladungsdauer abhängt. Das von Hrn. Hopkinson und auch von Hrn. Giese³⁾ angewendete Princip der Superposition ist bei der in dieser Arbeit ver-

1) Hopkinson, Phil. Trans. Roy. Soc. of London. 167. p. 599. 1877.

2) Boltzmann, Wien. Ber. 80. p. 275. 1875.

3) Giese, l. c.

folgten Anschauung implicite enthalten in der Aenderung der mit p bezeichneten Grösse.

Bei unserer Erklärung des zweiten empirischen Satzes liegt es nahe, die Beobachtungen bei kurzer Ladungszeit zu berechnen unter der Annahme, dass die Dichtigkeit der freien Electricität nur auf der Oberfläche des Dielectricums einen von Null verschiedenen Werth habe. In der That gelingt dies auch; die Formel, zu der man unter dieser Annahme auf dem eingeschlagenen Wege gelangt, ist:

$$P = P_0 - 2P_0 e^{-\nu t} \left[\psi \left(\frac{c}{2\sqrt{t}} \right) - \frac{\sqrt{t}}{c\sqrt{\pi}} \left(1 - e^{-\frac{c^2}{4t}} \right) \right],$$

worin e wiederum eine Constante bedeutet. Diese Formel gestattet ebenfalls, die Rückstandsbeobachtungen zu berechnen bei kurzer vorangegangener Ladung. Die Abweichungen gehen aber über die Beobachtungsfehler hinaus, sobald man sie auf die nach langer Ladungszeit erhaltenen Curven anzuwenden versucht.

Es erübrigt noch ein Wort über die Constanten μ und ν . Wenn unsere theoretischen Voraussetzungen sämmtlich richtig wären, so müssten diese für sämmtliche Beobachtungen als constant sich ergeben, und es müsste gelingen, aus denselben, den Dimensionen des Condensators und den in Betracht kommenden Capacitäten etc. einen Werth für die Dielectricitätsconstante und der Leitungsfähigkeit der Substanz in absolutem Maasssystem abzuleiten.

Wie man aus Tabelle II ersieht, ist ν nicht für alle Beobachtungsreihen constant. Der Grund dieser Inconstanz liegt in der vereinfachenden Annahme, die wir gemacht haben, dass wir das Dielectricum als unendlich ausgedehnt betrachtet haben. Führt man die Dicke der dielectricischen Schicht in die Betrachtungen ein, so wird man, ebenso wie beim Durchgang der Wärme durch eine planparallele Platte, auf Thetafunctionen geführt. Es ist mir indessen nicht gelungen, die sich so ergebenden Reihen — es sind dies dieselben, zu denen auch Riemann gelangt — in Uebereinstimmung mit der Erfahrung zu bringen.

Phys. Inst. der Univ. Berlin.