können noch nicht genau reducirt werden. Die Einstellung in der Mitte des Feldes gab die folgenden beiläufigen Oerter:

M. Berl. Zt.	AR. $\frac{\circ}{\prime \prime}$	Decl. $\frac{\circ}{\prime \prime}$
Nov. 5,377	268° 17'7	+52° 6'4
— 8,361	273 7,4	42 45,3
— 10,355	275 54,4	35 34,6

Am 9^{ten} Novbr. habe ich aus den Beobachtungen des 5^{ten} und 8^{ten} Novbr., verbunden mit der *Laugier*'schen Beobachtung vom 28^{ten} Octbr., die folgenden Elemente abgeleitet:

Durchgang durch das Perihel 1842 Dec. 15,930 M. Z. Berlin.

Länge des Perihels..... 327° 50'0

Länge des aufsteigenden Knotens.... 208 19,5

Neigung der Bahn..... 74 10,2

Entfernung des Perihels von der Sonne 0,50683

Bewegung retrograd.

Mit diesen Elementen stimmen die zu Grunde gelegten Beobachtungen so:

	Fehler der Elemente in AR.	in Decl.
Octbr. 28	— 2'5	— 0'2
Novbr. 5	+ 1,2	+ 0,1
— 8	+ 1,1	+ 1,0
und die spätere Beobachtung vom 10 ^{ten} Novbr. giebt die Fehler		
Novbr. 10	+ 0,6	+ 2,4.

Die AR. war von *Laugier* nur in vollen Zeitminuten angegeben, aber doch scheinen die Elemente ziemlich richtig zu seyn. Aus ihnen läßt sich folgende Ephemeride ableiten:

0 ^h M. Z. Berlin.	AR.	Decl.	Entfernung von der Sonne. der Erde.	
Novbr. 16	281° 17'5	+11° 57'2	0,8502	0,4731
— 20	285 12,5	— 2 41,5	0,7839	0,4779
— 24	287 25,7	—15 28,6	0,7200	0,5405
— 28	288 45,8	—25 21,2	0,6597	0,6232
Decbr. 2	289 12,5	—32 47,8	0,6054	0,7184
— 6	288 43,8	—38 22,2	0,5594	0,8201
— 10	287 19,2	—42 28,0	0,5264	0,9234

Der Komet wird also während einer sehr kurzen Zeit auf der nördlichen Halbkugel sichtbar seyn. Seine Bahn hat viele Aehnlichkeit mit der Bahn des Kometen von 1558, für welchen *Olbers*, aus wenigen sehr rohen Beobachtungen die Elemente fand:

Länge des Perihels	329° 49'0
Länge des Knotens	332 36,0
Neigung	73 49,0
Entfernung des Perihels	0,5773

Bewegung rückläufig.

Die Längen der Knoten sind gänzlich verschieden, während die übrigen Elemente eine grofse Uebereinstimmung zeigen.

Leiden, den 12^{ten} Novbr. 1842.

F. Kaiser.

Ueber einige merkwürdige Curventheoreme.

Von Herrn Professor Jacobi.

In Nr. 457 der A. N. hat Herr *Clausen* einige unbegründete Zweifel über die Richtigkeit eines von mir im 16^{ten} Bande des *Crelleschen Journals* bewiesenen Theorems geäußert, von welchem ein berühmter *Gaussischer Satz* ein besonderer Fall ist. Der dort gegebene rein synthetische Beweis läßt sich aber noch vereinfachen, wodurch das Theorem zu größerer Anschaulichkeit gebracht wird. Ich will hier diesen einfachen Beweis mittheilen, zumal er auf einem an sich sehr bemerkenswerthen Satze der Curvenlehre beruht.

Es sei eine räumliche Curve gegeben und eine Kugel-Fläche, deren Halbmesser = 1. Aus ihrem Mittelpuncte *K* ziehe man mit den aufeinander folgenden Tangenten der Curve Parallelen, welche die Fläche in *p*, *q*, *r*, *s* etc. treffen. Man verlängere die unendlich kleinen Bogen größter Kreise *pq*, *qr*, *rs* etc. über *q*, *r*, *s* hinaus, bis *pP* = *qQ* = *rR* etc. Quadranten werden. Die Ebenen dieser größtesten Kreise sind den aufeinander folgenden Schmiegungsebenen, und die Radien *KP*, *KQ*, *KR* etc. den aufeinander folgenden Krümmungshalbmessern der gegebenen Curve parallel. Man verlängere (Fig. I) *qP*,

rQ, *sR* unendlich wenig bis *qa*, *rb*, *sc* Quadranten werden, so werden die von je zwei aufeinander folgenden Tangenten der Curve *pqr*... gebildeten unendlich kleinen Winkel *q*, *r*, *s* in aller Strenge den Dreiecken *qaQ*, *rbR*, *scS* gleich, da *q*, *r*, *s* die Pole von *aQ*, *bR*, *cS* sind. Vernachlässigt man die Dreiecke *PaQ*, *QbR*, *RcS* etc., welche unendlich kleine Größen der 2^{ten} Ordnung sind, so sieht man, daß die Summe der unendlich kleinen Tangentenwinkel der Curve

$p q r s \dots z$ gleich ist dem zwischen ihr und der Curve $P Q R S \dots Z$ enthaltenen Raume, wenn man denselben durch die Quadranten $p P$ und $z Z$ begränzt, welche die Curve $p q r s \dots z$ in ihren Endpunkten berühren. Die Ebenen dieser grössten Kreise $p P$ und $z Z$ sind den an den Endpunkten der im Raum gegebenen Curve gelegten Schmiegungebenen parallel.

Man verlängere $Z z$ über z hinaus, bis es $p P$ in einem Punkte A schneidet. Der betrachtete Raum setzt sich dann aus den beiden, $q A z$ und $A Z P$, zusammen, es ist also, wenn man die Summe der Tangentenwinkel der Curve $p q r s \dots z$ mit T bezeichnet, $q A z + Z A P = T$. Der Raum $q A z$, welcher von der Curve $q r s \dots z$ und den Bogen grösster Kreise $q A$ und $A z$ begränzt wird, ist nach den über den Inhalt sphärischer Figuren bekannten Sätzen gleich $L q A Z + T - 180^\circ$, da die Winkel bei q und z unendlich klein sind, weil die Curve $p q r s \dots z$ von $q A$ und $z A$ berührt wird. Substituiert man die Formel $q A z = L q A Z + T - 180^\circ$ in die obige Gleichung $q A z + Z A P = T$, so erhält man,

$$Z A P = 180^\circ - L q A Z = L Z A P.$$

Diese Formel giebt folgendes Theorem:

Theorem I.

„Aus dem Mittelpunkte einer Kugel ziehe man mit den Krümmungshalbmessern einer im Raum gegebenen Curve $\pi \zeta$ parallele Linien, welche die Kugelfläche in den Punkten der Curve $P Z$ schneiden, und gleichzeitig, mit den an π und ζ gelegten Schmiegungebenen der gegebenen Curve parallele Ebenen, welche die Kugelfläche in den grössten Kreisen $P A$ und $Z A$ schneiden, so ist der sphärische Inhalt des von der Curve $P Z$ und den Bogen grösster Kreise $P A$ und $Z A$ gebildeten Dreiecks $P A Z$ gleich dem der Curve $P Z$ gegenüberliegenden Winkel $P A Z$ oder dem Supplement des Winkels der an π und ζ gelegten Schmiegungebenen.“

Wenn z. B. die Curve $\pi \zeta$ eben ist, so verschwinden der Raum und der Winkel. Ist die Curve $\pi \zeta$ so beschaffen, daß alle ihre Tangenten mit einer festen Ebene einen constanten Winkel bilden, oder eine kürzeste Linie auf einer cylindrischen Fläche, so sind die Krümmungshalbmesser der Curve alle der festen Ebene parallel. Man kann daher den Winkel einer Tangente mit der festen Ebene auch als den Neigungswinkel der Schmiegungeebene zu derselben bezeichnen, oder es bilden auch alle Schmiegungebenen der Curve $\pi \zeta$ mit der festen Ebene einen constanten Winkel. Für diesen Fall wird die Curve $p q r s \dots z$ ein kleiner, die Curve $P Q R S \dots Z$ ein großer Kreis der Kugel, die Winkel $A P Z$ und $A Z P$ werden Supplemente zu einander und daher der Inhalt des sphärischen Dreiecks $P A Z$ gleich dem Winkel $P A Z$.

Aus dem Theorem I ergibt sich unmittelbar der von mir im 16ten Bande des *Crelleschen Journals* aufgestellte Satz. Es sei $A B C$ ein räumliches Dreieck, von beliebigen Curven gebildet, welche nur der Bedingung unterworfen sind, daß in jeder Ecke die Krümmungshalbmesser der beiden dort zusammenstossenden Curven dieselbe Richtung haben. Mit den Krümmungshalbmessern der drei Curven $B C$, $C A$, $A B$, ziehe man wieder aus dem Mittelpunkte der Kugel Parallelen, welche die Kugelfläche in den Punkten der Curven $b c$, $c a$, $a b$ treffen mögen. Ferner ziehe man aus dem Mittelpunkte der Kugel mit den an den Endpunkten der drei Curven $B C$, $C A$, $A B$ gelegten Schmiegungebenen parallele Ebene, welche die Kugelfläche in den grössten Kreisen $b \alpha$, $c \alpha$; $c \beta$, $a \beta$; $a \gamma$, $b \gamma$ schneiden, so daß z. B. die Ebene des grössten Kreises $b \alpha$ parallel der an B gelegten Schmiegungeebene der Curve $B C$ ist. Nach dem Theorem I hat man die drei Gleichungen:

$$b \alpha c = L b \alpha c; c \beta a = L c \beta a; a \gamma b = L a \gamma b.$$

Es mögen sich (Fig. 2) die Kreise $b \gamma$ und $c \alpha$ in dem Punkte e , die Kreise $c \alpha$ und $a \beta$ in dem Punkte f , die Kreise $a \beta$ und $b \gamma$ in dem Punkte g schneiden, so wird, wie aus der beigelegten Figur erhellt, wenn man die sich gegenseitig aufhebenden Räume fortläßt,

$$b \alpha c + c \beta a + a \gamma b - a b c \\ = b \alpha e + c \beta f + a \gamma g - e f g.$$

Setzt man für den Inhalt der 4 sphärischen Dreiecke $b \alpha e$, $c \beta f$, $a \gamma g$, $e f g$ ihre durch die Winkel derselben ausgedrückten Werthe, so wird der Ausdruck rechts vom Gleichheitszeichen, wenn man die Winkel bei e , f , g als sich aufhebend fortläßt,

$$L b \alpha c + L c \beta a + L a \gamma b \\ + L a b \gamma + L b c \alpha + L c a \beta - 360^\circ.$$

Das Theorem I gab aber für den Ausdruck links vom Gleichheitszeichen,

$$L b \alpha c + L c \beta a + L a \gamma b - L a b c.$$

Die Vergleichung beider Ausdrücke ergiebt für den Inhalt des von den Curven $b c$, $c a$, $a b$ umschlossenen Theils der Kugelfläche die einfache Formel,

$$a b c = 360^\circ - L a b \gamma - L b c \alpha - L c a \beta.$$

In dieser Formel sind $L a b \gamma$, $L b c \alpha$, $L c a \beta$ gleich den Supplementen der Winkel, welche an jeder Ecke des gegebenen

Curvendreiecks ABC die Schmiegungebenen der beiden in derselben zusammenstossenden Curven mit einander bilden. Solche zwei Schmiegungebenen schneiden sich in dem den beiden Curven gemeinschaftlichen Krümmungshalbmesser; ihr Neigungswinkel ist daher dem Winkel gleich, welchen die Curven selber mit einander bilden. Die vorstehende Formel, welche man so schreiben kann,

$abc = 180^\circ - \beta\alpha\gamma + 180^\circ - \gamma b\alpha + 180^\circ - \alpha c\beta - 180^\circ$,
gibt daher das folgende Theorem.

Theorem II.

„Es sei ein räumliches Dreieck gegeben, von beliebigen Curven gebildet, welche nur der Bedingung unterworfen sind, daß in jeder Ecke die Krümmungshalbmesser der beiden dort zusammenstossenden Curven dieselbe Richtung haben; aus dem Mittelpunkte einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$, ziehe man mit den Krümmungshalbmessern der drei Curven Parallelen, welche die Kugelfläche in den Punkten dreier andern Curven treffen werden: so ist der von diesen Curven umschlossene Raum der Kugelfläche gleich dem Ueberschusse der Summe der drei Winkel des gegebenen räumlichen Curvenwinkels über zweien Rechten.“

Dieses ist das im 16^{ten} Bande des *Crelleschen Journals* von mir auf anderm Wege bewiesene Theorem.

Wenn die drei gegebenen Curven kürzeste Linien derselben Fläche sind, so wird die Bedingung erfüllt, daß in jeder Ecke die Krümmungshalbmesser der beiden daselbst zusammentreffenden Curven dieselbe Richtung haben, da die Krümmungshalbmesser der kürzesten Linien einer Fläche zugleich ihre Normalen sind. Man erhält auf diese Weise das bekannte *Gaussische Theorem*. Das Theorem II ist aber allgemeiner, weil, wie Herr *Clausen* in Nr. 457 der *A. N.* gezeigt hat, nicht durch jede zwei in einem Punkte zusammenstossende Curven, in welchem ihre Krümmungshalbmesser dieselbe Richtung haben, sich eine Fläche legen läßt, auf welcher die beiden Curven kürzeste Linien sind.

Man kann das Theorem II noch wesentlich erweitern, indem man auch die in den Ecken des gegebenen Curvendreiecks Statt findende Bedingung fortläßt, und ein ganz beliebiges Curvendreieck ABC betrachtet. In der That giebt das Theorem I sogleich auch das folgende Theorem:

Theorem III.

„Es sei ein räumliches Dreieck ABC gegeben, von beliebigen Curven BC , CA , AB gebildet; aus dem Mittelpunkte einer Kugel, deren Halbmesser $= 1$, ziehe man mit den Krümmungshalbmessern dieser drei Curven Parallelen, welche die Kugelfläche in drei andern Curven bc' , ca' , ab' schnei-

den; an den beiden Endpunkten jedes dieser Curven lege man grösste Kreise, $b\beta$ und $c'\gamma$, $c\gamma$ und $a'\alpha$, $a\alpha$ und $b'\beta$, deren Ebenen mit den Schmiegungebenen parallel sind, welche an den Endpunkten B und C , C und A , A und B der gegebenen Curven BC , CA , AB gelegt werden, so daß z. B. die Ebene von $b\beta$ parallel der an BC in b gelegten Schmiegungeebene ist: so ist der sphärische Inhalt des auf der Kugeloberfläche gebildeten Neunecks $ab'\beta b c'\gamma c a'\alpha a$, dessen drei Seiten bc' , ca' , ab' im Allgemeinen Curven doppelter Krümmung, die sechs andern $a\alpha$, $a'\alpha$, $b\beta$, $b'\beta$, $c\gamma$, $c'\gamma$ Bogen grösster Kreise sind, gleich dem Ueberschusse der Summe der Winkel, welche in den Ecken des Dreiecks ABC die Schmiegungebenen mit einander bilden, über 180° oder gleich der Grösse $\angle a\alpha a'$, $b\beta b'$, $\angle c\gamma c' - 180^\circ$.“

Sind die drei gegebenen Curven eben (ohne in derselben Ebene zu liegen), so fallen die Schmiegungebenen jeder von ihnen in einer Ebene zusammen, in welcher auch alle ihre Krümmungshalbmesser liegen, die Curven bc' , ca' , ab' werden dann ebenfalls Bogen grösster Kreise, und zwar werden immer drei Bogen βb , $b c'$, $c'\gamma$; γc , ca' , $a'\alpha$; αa , ab' , $b'\beta$ denselben grössten Kreisen angehören, oder das Neuneck sich in das sphärische Dreieck $\alpha\beta\gamma$ verwandeln. Das Theorem III giebt dann den bekannten Ausdruck des Inhaltes eines sphärischen Dreiecks.

Untersuchungen über die hier behandelten Gegenstände hat vor einigen Jahren Herr Professor *Steiner* der Berliner Akademie vorgelegt *). Als eine der fruchtbarsten Quellen muß hiebei das Theorem I erscheinen. So ergibt sich z. B. aus demselben unmittelbar auch folgender schöne Satz:

„Wenn eine beliebige stetig gekrümmte und in sich zurücklaufende Curve im Raume gegeben ist und man aus dem Mittelpunkte einer Kugel mit den Krümmungshalbmessern dieser Curve parallele Radien zieht, so bilden ihre Endpunkte immer eine Curve, welche die Kugelfläche in zwei gleiche Theile theilt.“

*) Monatsschrift der Berl. Ak. 1839. 25^{ten} April: „Sodann wendet sich die Betrachtung zu dem berühmten *Gaussischen Satze* über das Dreieck, welches auf einer krummen Oberfläche durch drei kürzeste Linien gebildet wird. Den Beweis dieses Satzes hat *Jacobi* (im *Crelleschen Journal* S. 16) bereits bedeutend vereinfacht und ihn auf ein anderes Theorem zurückgeführt, das der geometrischen Betrachtung anheimfällt. Hier wird eine noch weitere Vereinfachung gegeben, wodurch die Beweisgründe aus einer fast unmittelbaren geometrischen Anschauung hervorgehen.“

Königsberg, den 16^{ten} Octbr. 1842.

C. G. J. Jacobi.