Elektrische Schwingungen in Maschinenwicklungen.¹⁾

Von

J. Biermanns.

1. Einleitung. Die Erkenntnis der unter dem Einflusse normaler oder abnormaler Änderungen des jeweiligen Betriebszustandes bzw. atmosphärischer Störungen auf elektrischen Leitungen sich abspielenden Ausgleichsvorgänge hat in den letzten Jahren große Fortschritte gemacht. Auf den Untersuchungen von Thomson, Kirchhoff, Rayleigl., Riemann u. a. fußend, hat sich schon eine ganze Reihe von Autoren²⁾ mit den Problemen befaßt, die uns die aufsteigende Entwicklung der Hochspannungstechnik aufgab, und man kann sagen, daß heute schon eine ziemliche Klärung auf diesem Gebiete eingetreten ist.

Bei der mathematischen Behandlung der Ausgleichsvorgänge auf elektrischen Leitungen bedienen sich die verschiedenen Autoren fast ausschließlich einer Methode, die auf der Integration der Telegraphengleichung durch ein Paar fortschreitende Funktionen beruht. Es führt diese Art der Behandlung ohne weiteres auf Wellen, welche auf den Leitungen hin- und herlaufen, sogen. Wanderwellen, mit deren Hilfe sich die auf elektrischen Leitungen auftretenden Erscheinungen zwanglos erklären. Die erwähnte Methode besitzt somit den Vorzug, von vornherein physikalisch anschaulich zu bleiben; ein weiterer Vorzug ist der, daß man bei ihrer Anwendung, da die Abhängigkeit des Stromes von der Spannung, wie wir es vom Ohmschen Gesetze her kennen, eine lineare ist, sich auf sehr einfache mathematische Hilfsmittel beschränken kann. Es leistet die Methode somit gute Dienste, sie bleibt in ihrer Anwendung jedoch nur so lange einfach und übersichtlich, als man sich auf die Verfolgung irgendwelcher Ausgleichsvorgänge in ihren allerersten Anfängen beschränkt.

Man kann sich noch einer zweiten Methode zur Behandlung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge bedienen, die zu ihrer Anwendung zwar wesentlich umfangreichere mathematische Hilfsmittel benötigt, dafür aber den Vorzug besitzt, daß sie ohne weiteres einen Überblick über den vollständigen Verlauf der zu untersuchenden Vorgänge gewährt. Die Telegraphengleichung kann auch mit Hilfe von unendlichen trigonometrischen Reihen integriert werden, und man kann den Gang der sich hieraus ergebenden Behandlungsweise physikalisch folgendermaßen erklären. Man löst die auf der zu untersuchenden elektrischen Leitung sich abspielenden Vorgänge in eine unendliche Reihe von Einzelschwingungen, die Eigenschwingungen der Leitung, auf und macht sie so der rechnerischen Behandlung zugänglich; indem man die Einzelwellen nachträglich wieder addiert, gelangt man zu fortschreitenden Wellen, welche den zu untersuchenden Vorgang vollständig beschreiben. Man gelangt somit eigentlich erst über einen Umweg zum Ziele.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, zu welchen Ergebnissen über den Schutzwert von Drosselspulen und Kondensatoren man gelangt, wenn man sich der zuletzt erwähnten Methode zur Behandlung elektromagnetischer Ausgleichsvorgänge bedient. Hierbei werden, zumal es sich nicht um strenge Lösungen des gestellten Problems handeln soll, besondere Schwierigkeiten nicht mehr zu überwinden sein, die Untersuchungen können ohne weiteres auf den von Wagner gegebenen Grundlagen aufgebaut werden.

¹⁾ Eingesandt im Oktober 1914.

²⁾ Siehe vor Allem: K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln, Leipzig 1908.

2. Das Ersatzschema. Wir denken uns eine Freileitung mit dem Wellenwiderstand W , welche wir als sehr lang voraussetzen wollen, und an deren einem Ende über eine Drosselspule mit dem Selbstinduktionskoeffizienten λ eine Transformatorenwicklung angeschlossen ist.

Fig. 1.

Die Transformatorenwicklung, deren Länge l sei, ist an ihrem anderen Ende offen gedacht, sie besitze eine gesamte Selbstinduktion $L_1 \cdot l = L$ und eine gesamte Kapazität $C_1 \cdot l = C$. Vernachlässigen wir zunächst die Selbstinduktion L der Transformatorenwicklung, so können wir die gedachte Anordnung durch das folgende Schema (Figur 1) ersetzen: Auf diese

Anordnung treffe zur Zeit $t = 0$ eine rechtecksförmige Wanderwelle, welche die konstante Spannung E besitze, ihre Stromstärke ist dann $\frac{E}{W}$.

Bezeichnet e_1' die im Punkte $x = 0$ reflektierte Spannungswelle, die zugehörige Stromwelle ist $-\frac{e_1'}{W}$, e_2 die an der Reihenschaltung von Selbstinduktion und Kapazität herrschende Spannung und i_2 den in diese Schaltung hineinfließenden Strom, so geben uns die im Punkte $x = 0$ geltenden elektrischen Gleichgewichtsbedingungen folgende Ansätze:

$$\left. \begin{aligned} E + e_1' &= e_2 \\ \frac{1}{W} \cdot (E - e_1') &= i_2 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Nun ist:

$$e_2 = \lambda \cdot \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i_2 \cdot dt.$$

Führt man in diese Gleichung den Wert für i_2 aus der zweiten der Gl. (1) ein, desgl. den Wert für e_2 aus der ersten der Gl. (1), so gelangt man zur folgenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\lambda \cdot \frac{d^2 e_1'}{dt^2} + W \cdot \frac{de_1'}{dt} + \frac{1}{C} \cdot e_1' = \frac{1}{C} \cdot E. \quad (2)$$

Das Integral dieser Gleichung lautet:

$$e_1' = E + A_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{z_2 \cdot t},$$

und somit wird:

$$e_2 = 2 \cdot E + A_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{z_2 \cdot t}. \quad (3)$$

A_1 und A_2 sind die willkürlichen Integrationskonstanten, $z_{1,2}$ ergibt sich aus der charakteristischen Gleichung:

$$z^2 \cdot \lambda + z \cdot W + \frac{1}{C} = 0$$

zu:

$$z_{1,2} = -\frac{W}{2 \cdot \lambda} \pm \sqrt{\frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2} - \frac{1}{C \cdot \lambda}}. \quad (3a)$$

In den praktisch vorkommenden Fällen ist nun stets

$$\frac{4 \cdot \lambda}{C} < W^2,$$

so daß wir die Gleichung für die Spannung e_2 folgendermaßen schreiben können:

$$e_2 = 2 \cdot E + e^{-\frac{W}{2 \cdot \lambda} \cdot t} \cdot \left(A_1 \cdot e^{j \cdot \sqrt{\frac{1}{C \cdot \lambda} - \frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2}} \cdot t} + A_2 \cdot e^{-j \cdot \sqrt{\frac{1}{C \cdot \lambda} - \frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2}} \cdot t} \right) \quad (4)$$

Die an der Reihenschaltung der Drosselspule mit dem Kondensator herrschende Spannung e_2 besitzt somit oszillatorischen Charakter, sie verläuft nach einer einfachen, harmonischen Funktion und ist entsprechend dem Faktor

$$e^{-\frac{W}{2 \cdot \lambda} \cdot t} \quad (4a)$$

zeitlich gedämpft. Die Frequenz der auftretenden Schwingung ist:

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{C \cdot \lambda} - \frac{W^2}{4 \cdot \lambda^2}} \quad (4b)$$

Die Gl. (4) besagen nun folgendes:

Der Wellenwiderstand W derjenigen Leitung, von welcher die Wanderwelle E kommend gedacht ist, verhält sich wie ein Dämpfungswiderstand, die Gl. (4) haben die bekannte Form der Gleichungen des Thomsonschen Schwingungskreises, welcher einen Ohmschen Widerstand W besitzt, und welcher zur Zeit $t = 0$ an eine konstante Spannung $2 \cdot E$ gelegt wird.

Die eben behandelte Anordnung kann demnach durch das Schema Fig. 1a vollkommen ersetzt werden; das Schließen der in diesem Schema eingezeichneten Schalter löst im Thomsonschen Schwingungskreise genau dieselben Schwingungserscheinungen aus als in der durch die Fig. 1 dargestellten Anordnung das Auftreffen der Wanderwelle auf den Punkt $x = 0$.

Wir könnten die vorhergehenden Betrachtungen auch auf irgendwelche andere Apparateschaltungen anwenden, und wir würden so zu einem Satze gelangen, welchen Petersen folgendermaßen ausspricht¹⁾:

„Trifft eine Wanderwelle beliebiger Form am Ende einer Leitung mit dem Wellenwiderstand W_1 auf eine beliebige Kombination von Ohmschen, induktiven, kapazitiven Widerständen und weiteren Wellenwiderständen, so sind die Gleichungen dieser Anordnung gegeben durch die Gleichungen eines Stromkreises, in welchem an Stelle der Leitungen

Fig. 1a.

Fig. 2.

Bei Betrachtung der Figur 2 ist zu berücksichtigen, daß jede der vollkommen symmetrischen Wicklungshälften, auf deren eine wir uns im Folgenden beschränken werden, für sich der Anordnung Figur 1a entspricht.

beliebiger Länge mit den Wellenwiderständen $W_1, W_2, W_3 \dots$ Ohmsche Widerstände mit den Beträgen $R_1 = W_1, R_2 = W_2, R_3 = W_3 \dots$ treten, und auf welchen über den Ohmschen Widerstand $R_1 = W_1$ die doppelte Wellenspannung in dem Augenblicke geschaltet wird, in welchem die Wanderwelle auf die tatsächlich vorhandene Anordnung trifft.“

Es ist nämlich der Schluß naheliegend, daß das Ersatzschema Fig. 1a auch dann noch seine Gültigkeit behält, wenn wir die Selbstinduktion der Transformatorenwicklung nicht mehr vernachlässigen; auf diesen Fall sich beziehenden Betrachtungen wäre demnach das durch die Figur 2 gegebene Schema zugrunde zu legen.

3. Die allgemeinen Gleichungen. Wir fassen für die folgenden Betrachtungen jede Maschinenwicklung als eine Leitung im weiteren Sinne des Wortes auf, das heißt, wir denken uns dieselbe mit gleichmäßig verteilten Konstanten L_1 (Selbstinduktion), C_1 (Kapazität), w_1 (Widerstand) und a_1 (Ableitung) ausgestattet²⁾.

¹⁾ W. Petersen, Wanderwellen als Überspannungserreger. Arch. f. Elektrotechn. 1912.

²⁾ Wagner kommt auf Grund von in der Wiener Z. f. E. u. M. (Heft 7 u. 8, 1915) angestellten theoretischen Betrachtungen zu dem Ergebnis, daß elektromagnetische Wellen beim

Der Spannungsabfall längs unserer Leitung setzt sich nun aus der Ohmschen Spannung sowie aus der induktiven Spannungskomponente zusammen, d. h. in Formeln ausgedrückt ist:

$$-\frac{\partial e}{\partial x} = w_1 \cdot i + L_1 \cdot \frac{\partial i}{\partial t}. \quad 5a)$$

Eine zweite Gleichung ergibt uns das Gesetz der dielektrischen Verschiebung: die Abnahme des Stromes längs unserer Leitung ist gleich dem in jedes Leiterelement hineinfließenden Kapazitätsstrom plus einem Teilstrom, welcher infolge der unvollkommenen Isolation verloren geht, d. h.

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = a_1 \cdot e + C_1 \cdot \frac{\partial e}{\partial t}. \quad 5b)$$

In diesen Gleichungen sind e und i die Variablen, x ist die in positiver Richtung gerechnete Koordinate, t die Zeit.

Die Substitution:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ i &= -C_1 \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} - a_1 \cdot \Phi \end{aligned} \right\} \quad 6)$$

befriedigt die Gl. (5b) identisch. Die Gl. (5a) geht über in:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = w_1 \cdot a_1 \Phi + (w_1 \cdot C_1 + a_1 \cdot L_1) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial t} + L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}.$$

Diese Gleichung läßt sich in eine einfachere Gleichung überführen, welche die erste Ableitung nach der Zeit nicht mehr enthält, wenn wir uns einer neuen Variablen

$$\Psi = \Phi \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \quad 7)$$

bedienen. Mit

$$\alpha_1 = \frac{w_1}{2 \cdot L_1} + \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \quad 7a)$$

ergibt sich nämlich:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -L_1 \cdot C_1 \cdot \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \right)^2 \cdot \Psi + L_1 \cdot C_1 \cdot \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}. \quad 8)$$

Setzen wir nun

$$\Psi = (A \cdot \sin n \cdot t + B \cdot \cos n \cdot t) \cdot V, \quad 9)$$

so ergibt sich für V die Bedingungsgleichung:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + L_1 \cdot C_1 \cdot \left[n^2 + \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \right)^2 \right] \cdot V = 0, \quad 10)$$

woraus:

$$V = a \cdot \sin m \cdot x + b \cdot \cos m \cdot x. \quad 11)$$

Eindringen in Wicklungen sehr erhebliche Formveränderungen erleiden, was bekanntlich nicht der Fall ist, wenn Wellen längs homogenen Leitungen verlaufen. Diese Erscheinung ist in der Hauptsache auf die Kapazität zwischen den einzelnen Windungen, sowie auf die gegenseitige induktive Beeinflussung derselben zurückzuführen, also auf Faktoren, die wir im vorliegenden Falle gänzlich vernachlässigen. Nun haben vom Verfasser angestellte Versuche ergeben, daß gerade bei Großtransformatoren eine Verzerrung eindringender Wellen sich kaum nachweisen läßt und daß ferner die Dämpfung eine überraschend geringe ist. Diese Ergebnisse stehen durchaus im Einklang mit den Erfahrungen der Praxis. Im Hinblick darauf sind unsere Vernachlässigungen, wenn wir Kleintransformatoren ausschließen, als durchaus unbedenklich zu bezeichnen. Großtransformatoren mit ihren bedeutenden Windungslängen sind ja auch weitaus am meisten durch Sprungwellen gefährdet.

Darin ist zur Abkürzung

$$m = \sqrt{L_1 \cdot C_1 \cdot \left[n^2 + \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \right)^2 \right]} \quad (11a)$$

gesetzt.

In den vorhergehenden Gleichungen sind A, B, n, a und b die willkürlichen Integrationskonstanten.

Wir gewinnen somit folgende Ausdrücke für Strom und Spannung auf unserer Leitung:

$$e = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot (A \cdot \sin n \cdot t + B \cdot \cos n \cdot t) \cdot V' \quad (12a)$$

$$i = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot C_1 \cdot \left[n \cdot (B \cdot \sin n \cdot t - A \cdot \cos n \cdot t) + \left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \right) \cdot (A \cdot \sin n \cdot t + B \cdot \cos n \cdot t) \right] \cdot V \quad (12b)$$

Mit V' ist, wie allgemein üblich, die erste Ableitung der Funktion V bezeichnet.

Wir ersehen aus den Gl. (12), daß Spannung und Strom räumlich rein periodisch nach einer einfachen harmonischen Funktion, zeitlich nach einer gedämpften, einfachen harmonischen Funktion verlaufen; $\frac{n}{2 \cdot \pi}$ ist die Frequenz, $\frac{2 \cdot \pi}{m}$ die Wellenlänge der Schwingung, α_1 ist die Dämpfungskonstante.

Die Konstanten A, B, a, b und n sind zunächst noch vollkommen willkürlich; da wir jeden beliebigen Wert für sie einsetzen können, geben uns die Gl. (12) eine unendlich große Zahl von partikulären Lösungen der Differentialgleichungen (5a) und (5b), die sich noch dadurch vermehrt, daß auch die Summe einer endlichen oder unendlichen Zahl solcher partikulären Lösungen eine Lösung unserer Differentialgleichungen darstellt; denn diese sind linear in bezug auf beide Variablen und auf ihre Ableitungen. Wir haben demnach die vollständige Lösung unserer Differentialgleichungen in Form einer unendlichen Reihe von Funktionen darzustellen, deren einzelne Glieder die partikulären Lösungen (12) sind.

Für die hier in Betracht kommenden Verhältnisse machen wir nur einen ganz unwesentlichen Fehler, wenn wir in den Gl. (11a) und (12b) die mit $\left(\frac{w_1}{2 \cdot L_1} - \frac{a_1}{2 \cdot C_1} \right)$ multiplizierten Glieder gegenüber den mit n multiplizierten Gliedern vernachlässigen¹⁾; wir können dann die vollständige Lösung der Differentialgleichungen (5) in folgender Form anschreiben:

$$e = e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} (A_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t + B_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V'_{\mu}, \quad (13a)$$

$$i = C_1 \cdot e^{-\alpha_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} (B_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t - A_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V_{\mu}. \quad (13b)$$

Die zwischen den Parametern m und n herrschende Beziehung (11a) geht über in:

$$m_{\mu} = \sqrt{L_1 \cdot C_1} \cdot n_{\mu}. \quad (13c)$$

Spannung und Strom auf unserer Leitung setzen sich demnach aus einer einfachen harmonischen Schwingung und einer unendlichen Anzahl von Oberschwingungen zusammen; über die Frequenz und damit die Wellenlänge sowie über die Amplitude und Phase dieser Schwingungen dagegen ist uns noch nichts bekannt, da die Wahl der verschiedenen

¹⁾ K. W. Wagner, Elektromagnetische Ausgleichsvorgänge in Freileitungen und Kabeln, Leipzig 1908, S. 33 ff.

Die Vernachlässigung besteht im wesentlichen darin, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\frac{n}{m}$ der Schwingungen als unabhängig von der Frequenz angesehen wird.

Konstanten noch vollständig in unserer Hand liegt. Wir werden sehen, daß die Frequenz und damit die Wellenlänge der verschiedenen Schwingungen nur von der Beschaffenheit der Leitung, auf welcher sie sich abspielen, abhängt. Denn durch die an den Leitungsenden herrschenden Grenzbedingungen werden dort gewisse Beziehungen zwischen der Funktion V und ihren Ableitungen eingeführt, die nur mit einer Reihe von besonderen Werten von m_μ in Einklang gebracht werden können. Diese Werte ergeben sich als die Wurzeln einer transzendenten Bestimmungsgleichung, die aus den eben erwähnten Beziehungen zwischen V_μ und V'_μ abgeleitet werden kann. Die Grenzbedingungen ergeben endlich noch ein Verhältnis zwischen den Konstanten a_μ und b_μ , d. h. die räumliche Phase, so daß die Funktionen V_μ bis auf einen konstanten Faktor bestimmt sind, der ohne weiteres gleich 1 gesetzt werden kann, da über die Konstanten A_μ und B_μ noch nicht verfügt ist. Die Amplitude und die zeitliche Phase der Schwingungen (gegeben durch die Konstanten A_μ und B_μ) dagegen hängen von den Strom- und Spannungswerten ab, von welchen wir bei der Behandlung irgendeines Problems auszugehen haben.

Bevor wir nun zur Behandlung besonderer Fälle übergehen, wollen wir uns darüber klar werden, inwieweit wir die Spannungen und Ströme auf unserer Leitung durch die Gl. (13) darstellen sollen. Denn wir sehen schon, daß diese Gleichungen nicht die geeignete Form besitzen, um stationäre Vorgänge durch sie darzustellen. Wir spalten deshalb Spannung und Strom in zwei Teile, deren einer den Dauerzustand angibt, während der andere die der Überleitung in diesen Dauerzustand dienenden Vorgänge darstellt, und wir schreiben nur diesen letzten Teil in Form der Gl. (13). Bezeichnen e_{s_1} und i_{s_1} den von vornherein herrschenden stationären Zustand I, e_{s_2} und i_{s_2} dagegen den Ruhezustand II, der eintritt, nachdem die durch irgendwelche Störungen hervorgerufenen Ausgleichsvorgänge abgelaufen sind, so müssen die übergelagerten Schwingungen e_f und i_f zur Zeit $t = 0$, welches der Zeitpunkt des Eintritts dieser Störungen sei, den folgenden Gleichungen genügen, um einen stetigen Anschluß des Zustandes I an den Zustand II zu ermöglichen:

$$\left. \begin{aligned} e_{s_1} &= e_{s_2} + e_f \\ i_{s_1} &= i_{s_2} + i_f \end{aligned} \right\} \text{ für } t = 0. \quad (14)$$

Uns interessieren vor allem e_f und i_f , und auf sie allein wollen wir deshalb unsere Betrachtungen beschränken.

4. Die durch eine Drosselspule geschützte Wicklung unter dem Einflusse rechteckförmiger Wanderwellen. Wenn wir uns des im 2. Abschnitt abgeleiteten Satzes bedienen, so ergibt sich, daß wir uns bei der Behandlung des vorliegenden Problems auf das durch die Fig. 2 dargestellte Ersatzschema stützen können. Wie die Gl. (4) zeigt, bewirkt der Widerstand W erstens ein Abklingen der auftretenden Schwingungen mit wachsender Zeit t und zweitens eine Verringerung der Frequenz σ dieser Schwingungen; die Gl. (4) bezieht sich zwar auf einen reinen Thomsonschen Schwingungskreis, es ist indes einleuchtend, daß der Widerstand W bei der durch die Fig. 2 dargestellten Anordnung, wo außer der Grundschwingung noch eine unendliche Anzahl von Oberschwingungen möglich ist, eine ähnliche Wirkung ausüben wird.

Bei den praktisch in Frage kommenden Verhältnissen beeinflußt nun der Widerstand W die Frequenz nicht merklich; es genügt infolgedessen, denselben dadurch zu berücksichtigen, daß man eine zusätzliche Dämpfung $e^{-\frac{W}{2\lambda} \cdot t}$ einführt.

Nehmen wir z. B. an, die Schutzdrosselspule λ besitze einen Selbstinduktionskoeffizienten von 0,001 Henry, während die zu schützende Wicklung eine Kapazität von $C = 0,001 \cdot 10^{-6}$ Farad besitze. Der Widerstand W schwankt zwischen 50 (Kabel) und 500 (Freileitung). Die Gl. (4b) ergibt für diese Verhältnisse, wenn man zunächst vom Widerstand W absieht, eine Eigenschwingungszahl von $\sigma_0 = 1,59 \cdot 10^5 \text{ sec}^{-1}$; ein Widerstand

$W = 50 \Omega$ vermag die Frequenz σ noch nicht merklich zu beeinflussen, und erst für $W = 500 \Omega$ ergibt sich eine um ca. 3% niedrigere Frequenz.

Der Einfluß des Widerstandes W auf die Frequenz der Eigenschwingungen unserer Wicklung ist demnach nur ein sehr geringfügiger, und wir berücksichtigen denselben somit genügend durch Einführung der vorerwähnten zusätzlichen Dämpfung. Die Dämpfungskonstante α_1 der im vorigen Abschnitte abgeleiteten Gleichungen für Strom und Spannung geht infolgedessen über in:

$$\alpha = \frac{w_1}{2 \cdot L_1} + \frac{a_1}{2 \cdot C_1} + \frac{W}{2 \cdot \lambda}. \quad (15)$$

Die zusätzliche Dämpfungskonstante $\frac{W}{2 \cdot \lambda}$ liegt im allgemeinen in der Größenordnung von α_1 ; wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, daß wir nur einen geringfügigen Fehler begehen, wenn wir den Einfluß des Widerstandes und der Ableitung auf den Verlauf von Strom und Spannung vernachlässigen, sofern wir nur den Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha_1 \cdot t}$ beibehalten. Dies ist uns folgerichtig auch jetzt noch gestattet, und zwar tun wir dies in der Weise, daß wir den Dämpfungsfaktor $e^{-\alpha \cdot t}$ zunächst vernachlässigen und ihn erst den Schlußformeln für Strom und Spannung auf unserer Wicklung wieder beifügen.

Fig. 3.

Wir können dann folgende Gleichungen für die freien, den Ausgleichsvorgang auf unserer Wicklung vermittelnden Schwingungen anschreiben:

$$e_f = \sum_{\mu=1}^{\infty} (A_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t + B_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V'_{\mu}, \quad (16a)$$

$$i_f = C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} (B_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t - A_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V_{\mu}, \quad (16b)$$

und unseren Untersuchungen das durch die Fig. 3 dargestellte vereinfachte Schema zugrunde legen.

Wir setzen voraus, daß wir es mit einer unter dem Einflusse atmosphärischer Störungen entstandenen Wanderwelle zu tun haben, deren Gegenladung somit in der Erde verläuft. Für diese Welle ist die Transformatorenwicklung in dem von Erde isolierten Nullpunkte offen, so daß für $x = 0$ die Grenzbedingung gilt:

$$i_f = 0 \quad \text{für } x = 0. \quad (17a)$$

Nach Ablauf der im Zeitpunkte $t = 0$ einsetzenden Ausgleichsvorgänge herrscht auf unserer Wicklung offenbar die Spannung $2 \cdot E^1$; andererseits erhält die Spannungsquelle ihre Potentialdifferenz aufrecht, so daß im Punkte $x = l$ stets die Bedingung erfüllt sein muß:

$$2 \cdot E + e_f + \lambda \cdot \frac{\partial i_f}{\partial t} = 2 \cdot E.$$

Hieraus ergibt sich eine neue Grenzbedingung, nämlich:

$$e_f = -\lambda \cdot \frac{\partial i_f}{\partial t} \quad \text{für } x = l. \quad (17b)$$

¹⁾ Da die Verhältnisse vollkommen symmetrisch liegen, betrachten wir nur die eine in Fig. 3 eingezeichnete Leitungshälfte und gehen von dem als unveränderlich betrachteten Spannungsnullpunkt aus.

Diese Grenzbedingungen müssen für alle Zeiten erfüllt sein. Aus (17a) folgt somit:

$$V_\mu(0) = 0. \quad (18)$$

Dies ist nur möglich, wenn sämtliche Konstanten b_μ verschwinden. Da ferner a_μ in der Funktion V_μ nur mehr als Faktor erscheint, und da endlich über die Konstanten A_μ und B_μ noch keine Bestimmung getroffen ist, können wir die a_μ unbedenklich gleich 1 setzen. Damit nimmt die Verteilungsfunktion V_μ die einfache Gestalt an:

$$V_\mu = \sin m_\mu \cdot x. \quad (18a)$$

Ferner wird:

$$V'_\mu = m_\mu \cdot \cos m_\mu \cdot x. \quad (18b)$$

Aus (17b) ergibt sich, wenn wir die Werte für Strom und Spannung aus den Gl. (16) einführen:

$$V'_\mu(l) = -m_\mu^2 \cdot \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(l). \quad (19)$$

Unter Beachtung der Gl. (18) und (18a) folgt hieraus weiter:

$$\operatorname{tg} m_\mu \cdot l = \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}. \quad (20)$$

Dies ist eine transzendente Bestimmungsgleichung für die auf unserer Wicklung möglichen Wellenlängen. Man übersieht dieselbe am besten, wenn man ihre beiden Seiten als Kurven über der Abszisse $m_\mu \cdot l$ aufträgt, wie dies die Fig. 4 zeigt.

Die Schnittpunkte $P_1, P_2, P_3 \dots$ dieser Kurven geben uns die Lösungen der Gl. (20); man erkennt, daß es eine unendliche Reihe positiver Wurzeln der Gl. (20) gibt, und daß diese das Gesetz befolgen:

$$m_\mu \cdot l = (\mu - 1) \cdot \pi + \varepsilon_\mu, \quad (20a)$$

wo ε_μ stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und mit wachsender Ordnungszahl μ sich der Zahl Null unbegrenzt nähert. Die Reihe der Schwingungen, aus welchen sich Strom und Spannung auf unserer Wicklung zusammensetzen, ist demnach eine unharmonische.

Wir wollen nun zur Berechnung der Konstanten A_μ und B_μ schreiten¹⁾.

Fig. 4.

Vor der Zeit $t = 0$ war unsere Wicklung offenbar strom- und spannungslos, d. h. der Anfangszustand derselben ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} e_{s_1} &= 0, \\ i_{s_1} &= 0. \end{aligned}$$

Sind sämtliche freien Schwingungen abgelaufen, so herrscht auf der Wicklung eine Spannung $2 \cdot E$, der Strom ist Null. Unsere Wicklung strebt demnach folgendem Endzustande zu:

$$\begin{aligned} e_{s_2} &= 2 \cdot E, \\ i_{s_2} &= 0. \end{aligned}$$

Nach Gl. (14) haben demnach die zur Zeit $t = 0$ einsetzenden freien Schwingungen folgende Anfangsbedingungen zu erfüllen:

$$\left. \begin{aligned} e_f &= -2 \cdot E \\ i_f &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ für } t = 0 \quad (21)$$

¹⁾ Siehe hierzu Lord Rayleigh, Theory of Sound I, Nr. 92, S. 118. London 1894.

Die Gl. (16) stellen, sofern wir ihre Konstanten richtig bestimmen, die zu jeder beliebigen Zeit $t > 0$ auf unserer Wicklung herrschende Strom- und Spannungsverteilung dar. Gelingt es uns also, die Konstanten dieser Gleichungen so zu bestimmen, daß die letzteren den uns für irgendeinen Zeitpunkt bekannten elektrischen Schwingungszustand unserer Wicklung richtig beschreiben, so geben die Gl. (16) zweifellos auch für jeden späteren Zeitpunkt den Verlauf des Ausgleichsvorganges an, der sich bei den vorliegenden Grenzbedingungen aus der vorausgegangenen Strom- und Spannungsverteilung entwickelt. Nun sind uns für den Zeitpunkt $t = 0$ die Strom- und Spannungsverhältnisse, welchen sich die Gleichungen für e_t und i_t anzupassen haben, bekannt, und wir bedienen uns deshalb der Gl. (21) zur Bestimmung der uns noch fehlenden Konstanten A_μ und B_μ . Führen wir in diese Gleichung die Werte für e_t und i_t aus den Gl. (16) ein, wobei wir zu beobachten haben, daß $t = 0$ ist, so ergibt sich:

$$-2 \cdot E = B_1 \cdot V_1' + B_2 \cdot V_2' + B_3 \cdot V_3' + \dots + B_\nu \cdot V_\nu + \dots \quad (22a)$$

$$0 = -C_1 \cdot n_1 \cdot A_1 \cdot V_1 - C_1 \cdot n_2 \cdot A_2 \cdot V_2 - \dots - C_1 \cdot n_\nu \cdot A_\nu \cdot V_\nu - \dots \quad (22b)$$

Wir haben also die Aufgabe, die Konstanten einer unendlichen Reihe der Funktionen V_μ bzw. deren Ableitungen so zu bestimmen, daß dieselben eine vorgegebene Funktion richtig darstellen. Das Verfahren hierzu wurde zuerst von Fourier angegeben.

Soll etwa der Koeffizient B_μ des μ -ten Gliedes der Reihe 22a) bestimmt werden, so ist dieselbe beiderseits mit $V_\mu' \cdot dx$ zu multiplizieren und zwischen den Grenzen 0 und 1 zu integrieren. Dies ergibt:

$$-2 \cdot E \cdot \int_0^1 V_\mu' \cdot dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cdot \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx. \quad (23)$$

Zur Auswertung der auf der rechten Seite stehenden Reihe bedienen wir uns gewisser Eigenschaften der den Wurzeln der Gl. (20) zugeordneten Funktionen V , die wir im folgenden ableiten wollen.

Die Differentialgleichung zur Bestimmung der Funktionen V lautet etwa für den ν -ten Oberton:

$$V_\nu'' + m_\nu^2 \cdot V_\nu = 0.$$

Durch Multiplikation mit $V_\mu \cdot dx$ und Integration zwischen 0 und 1 folgt:

$$\int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu'' \cdot dx = -m_\nu^2 \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx.$$

Auf der linken Seite der Gleichung läßt sich die Integration partiell ausführen, man erhält dann weiter:

$$-m_\nu^2 \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx + \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx = (V_\mu \cdot V_\nu)_1 - (V_\mu \cdot V_\nu)_0.$$

Durch ganz analoge Betrachtungen, bei welchen wir jedoch diesmal vom μ -ten Oberton ausgehen wollen, ergibt sich ferner:

$$-m_\mu^2 \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx + \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx = (V_\nu \cdot V_\mu)_1 - (V_\nu \cdot V_\mu)_0.$$

Aus diesen beiden letzten Gleichungen erhält man nun:

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx = (V_\mu \cdot V_\nu' - V_\nu \cdot V_\mu')_1 - (V_\mu \cdot V_\nu' - V_\nu \cdot V_\mu')_0 \quad (24a)$$

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V_\mu' \cdot V_\nu' \cdot dx = (m_\mu^2 \cdot V_\mu \cdot V_\nu' - m_\nu^2 \cdot V_\nu \cdot V_\mu')_1 - (m_\mu^2 \cdot V_\mu \cdot V_\nu' - m_\nu^2 \cdot V_\nu \cdot V_\mu')_0 \quad (24b)$$

Wir können aus diesen Gleichungen nun folgendes entnehmen: Um das bestimmte Integral des Produkts zweier Verteilungsfunktionen V oder dasjenige des Produktes ihrer ersten Ableitungen berechnen zu können, braucht man lediglich die Werte der Verteilungsfunktionen und ihrer ersten Ableitungen an den Integrationsgrenzen zu kennen. Dort sind uns nämlich durch die Gl. (18) und (19) gewisse, für diese letzteren Funktionen gültige Beziehungen gegeben, und aus diesem Grunde hatten wir gerade die Wicklungsenden $x = 0$ und $x = 1$ als Integrationsgrenzen angenommen.

Führen wir die Gl. (18) und (19) in die Gl. (24b) ein, so folgt:

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V'_\mu \cdot V'_\nu \cdot dx = 0.$$

Hieraus kann, solange μ und ν verschieden sind, die weitere Folgerung gezogen werden:

$$\int_0^1 V'_\mu \cdot V'_\nu \cdot dx = 0. \quad (25)$$

In Gl. (23) verschwinden also sämtliche Glieder der rechten Seite¹⁾ mit Ausnahme des-

¹⁾ Es liegt der Fall nicht immer so einfach, daß die rechte Seite der Gl. (24b) verschwindet. Je nach den vorhandenen Grenzbedingungen kann Gl. (24b) nach Einführung derselben folgende Gestalt annehmen:

$$\int_0^1 V'_\mu \cdot V'_\nu \cdot dx = b_1 \cdot V'_\mu(1) \cdot V'_\nu(1) + b_2 \cdot V'_\mu(0) \cdot V'_\nu(0). \quad (25a)$$

Hierin sind b_1 und b_2 konstante Größen, welche von den gegebenen Grenzbedingungen abhängen.

Wir dürfen nun in Gl. (23) für alle Werte $\nu \neq \mu$ die auf der rechten Seite stehenden bestimmten Integrale durch deren Werte aus Gl. (25a) ersetzen, nur für $\nu = \mu$ besteht die Gl. (25a) nicht. Wir erhalten somit, wenn wir außerdem noch einen allgemeinen Ausdruck $\varphi(x)$ für die zur Zeit $t = 0$ vorhandene Spannungsverteilung einführen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi(x) \cdot V'_\mu \cdot dx &= b_1 \cdot V'_\mu(1) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cdot V'_\nu(1) + b_2 \cdot V'_\mu(0) \cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cdot V'_\nu(0) \\ &+ B_\mu \cdot \left[\int_0^1 V'^2_\mu \cdot dx - b_1 \cdot V'^2_\mu(1) - b_2 \cdot V'^2_\mu(0) \right]. \end{aligned} \quad (25b)$$

Nun ist nach Gl. (22a):

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cdot V'_\nu(1) = \varphi(1),$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu \cdot V'_\nu(0) = \varphi(0).$$

Damit erhält man nun aus Gl. (25b):

$$B_\mu = \frac{\int_0^1 \varphi(x) \cdot V'_\mu \cdot dx - b_1 \cdot \varphi(1) \cdot V'_\mu(1) - b_2 \cdot \varphi(0) \cdot V'_\mu(0)}{\int_0^1 V'^2_\mu \cdot dx - b_1 \cdot V'^2_\mu(1) - b_2 \cdot V'^2_\mu(0)}. \quad (25c)$$

Indem man b_1 und b_2 gleich Null setzt, nimmt diese Gleichung die einfachere Gestalt der Gl. (26a) an; man sieht also, die speziellen Voraussetzungen unseres Beispiels sind in der allgemeinen Lösung enthalten.

Auf ganz ähnlichem Wege ergeben sich übrigens die Konstanten A_μ zu:

$$A_\mu = -\frac{1}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\int_0^1 \psi(x) \cdot V_\mu \cdot dx - a_1 \cdot \psi(1) \cdot V_\mu(1) - a_2 \cdot \psi(0) \cdot V_\mu(0)}{\int_0^1 V^2_\mu \cdot dx - a_1 \cdot V^2_\mu(1) - a_2 \cdot V^2_\mu(0)}. \quad (25d)$$

Hierin sind a_1 und a_2 konstante Größen, welche auf der rechten Seite der Gl. (24a) nach Einführung der Grenzbedingungen auftreten, $\psi(x)$ bedeutet die Stromverteilung zur Zeit $t = 0$.

jenigen, bei welchem $v = \mu$ ist; die Konstante B_μ ergibt sich somit zu:

$$B_\mu = -2 \cdot E \cdot \frac{\int_0^1 V'_\mu \cdot dx}{\int_0^1 V'^2_\mu \cdot dx}. \quad (26a)$$

Aus (22b) ersieht man ohne weiteres, daß

$$A_\mu = 0. \quad (26b)$$

Ersetzen wir in (26a) die V'_μ durch ihren Wert aus Gl. (18b), so erhalten wir, wenn wir die Integration ausführen, folgende Gleichung für die Konstanten B_μ :

$$B_\mu = -\frac{4 \cdot E}{m_\mu} \cdot \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l}.$$

Durch Einführung dieses Wertes in die Gl. (16) ergeben sich, wenn wir noch den Dämpfungsfaktor hinzunehmen, die Gleichungen für Strom und Spannung auf unserer Wicklung endlich in folgender Gestalt:

$$e_t = -e^{-a \cdot t} \cdot 4 \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot x \cdot \cos n_\mu \cdot t. \quad (27a)$$

$$i_t = -e^{-a \cdot t} \cdot 4 \cdot E \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot \sin n_\mu \cdot t. \quad (27b)$$

Diese Gleichungen lassen sich indes bedeutend übersichtlicher schreiben, wenn wir uns der folgenden trigonometrischen Regeln erinnern, wobei wir

$$n_\mu = \frac{m_\mu}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}} = m_\mu \cdot v$$

setzen:

$$\cos m_\mu \cdot x \cdot \cos m_\mu \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x - v \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x + v \cdot t)$$

$$\sin m_\mu \cdot x \cdot \sin m_\mu \cdot v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x - v \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \cos m_\mu \cdot (x + v \cdot t).$$

Es ergibt sich nämlich:

$$\left. \begin{aligned} e_t &= e^{-a \cdot t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \\ i_t &= e^{-a \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Hierin ist das Funktionszeichen F nur eine Abkürzung; es ist:

$$F(\xi) = -2 \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot l} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi. \quad (28a)$$

ξ bedeutet entweder das Argument $x - v \cdot t$ oder das Argument $x + v \cdot t$.

Wir können der Gl. (28) folgendes entnehmen:

Spannung und Strom setzen sich aus je zwei Wellenzügen zusammen, deren Form durch die Gl. (28a) gegeben ist. Die Spannungswellen liegen so zueinander, daß sie sich zur Zeit $t = 0$ gerade decken, während die Stromwellen, welche sich von den Spannungs-

wellen nur durch den Proportionalitätsfaktor $\pm \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ unterscheiden, sich zur Zeit $t = 0$ vollkommen vernichten, wie dies denn auch die Anfangsbedingungen (21) erfordern. Das Argument $x - v \cdot t$ ändert sich nicht, wenn t etwa um t_1 und x gleichzeitig um $v \cdot t_1$ wächst; d. h. ein Funktionswert, der zur Zeit t im Punkte x vorhanden war, erscheint t_1 Sekunden später wieder in einem Punkte mit der Abszisse $x + v \cdot t_1$. Dies gilt natürlich für alle Funktionswerte, und wir sehen somit, daß sich die Funktion $F(x - v \cdot t)$ mit der Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ im Sinne wachsender x längs unserer Wicklung hin bewegt. Ebenso findet man, daß die Funktion $F(x + v \cdot t)$ sich mit derselben Geschwindigkeit, jedoch in entgegengesetzter Richtung fortbewegt. Die Wellenzüge, aus welchen sich Spannung und Strom zusammensetzen, eilen demnach mit der Geschwindigkeit v in entgegengesetzten Richtungen längs unserer Wicklung hin, wobei sie, abgesehen von der durch den Faktor $e^{-\alpha \cdot t}$ gegebenen zeitlichen Dämpfung ihre Gestalt unverändert beibehalten.

Zur Darstellung der zu irgendeiner beliebigen Zeit auf unserer Wicklung herrschenden Strom- und Spannungsverteilung erübrigt sich nur noch die Bestimmung der Wellenform ($F \xi$). Dieselbe hängt, wie aus Gl. (28a) ersichtlich ist, nur von der Reihe der m_μ ab, und diese sind ihrerseits durch das Verhältnis L/λ völlig bestimmt.

Der Versuch, die Wellenform $F(\xi)$ auf direktem Wege durch Ausrechnung nach Gl. (28a) ermitteln zu wollen, würde wegen der im allgemeinen schlechten Konvergenz dieser Reihe nicht zum Ziele führen. Wir müssen vielmehr einen Umweg beschreiten und wollen uns zu diesem Zwecke des folgenden Kunstgriffes bedienen.

Wir ersahen aus der Fig. 4, daß die $m_\mu \cdot l$ sich für wachsende Ordnungszahlen μ ganzen Vielfachen der Zahl π nähern, und zwar tritt diese Erscheinung um so früher ein, je schneller die Hyperbel $\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}$ der Abszissenachse zustrebt, d. h. je kleiner der Parameter $\frac{L}{\lambda}$ ist. So kann bei $\frac{L}{\lambda} < 1$ schon von $\mu = 2$ ab der Winkel ε_μ vernachlässigt werden, ohne daß man dadurch einen beträchtlichen Fehler begeht. Wir wollen nun im folgenden eine Näherungsformel für die Funktion $F(\xi)$ ableiten und werden dabei von der Voraussetzung ausgehen, daß die ε_μ für höhere Ordnungszahlen μ kleine Winkel sind.

Wir spalten zu diesem Zwecke die Funktion $F(\xi)$ in eine Grundwelle

$$G(\xi) = -2 \cdot E \cdot \frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_0 \cdot l} \cdot \cos m_0 \cdot \xi \quad (29a)$$

und in eine Funktion

$$H(\xi) = -2 \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\sin m_k \cdot l}{m_k \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_k \cdot l} \cdot \cos m_k \cdot \xi, \quad (29b)$$

welche die Gesamtheit der Oberschwingungen enthält. Es ist in (29b)

$$k = \mu - 1$$

gesetzt; wir haben nach Gl. (20a)

$$m_k \cdot l = k \cdot \pi + \varepsilon_k,$$

und zwar kann hierin laut Voraussetzung ε_k als kleiner Winkel behandelt werden. In diesem Falle ergibt sich der Winkel ε_k aus Gl. (20) zu:

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \frac{L}{\lambda},$$

und damit wird:

$$m_k = \frac{k \cdot \pi}{1} + \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \frac{L}{1 \cdot \lambda}. \quad (30a)$$

Nun ergibt sich, da ε_k doch ein kleiner Winkel ist:

$$\cos m_k \cdot \xi = \cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1} - \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi} \cdot \frac{\xi}{1} \cdot \sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}. \quad (30b)$$

Da ferner:

$$\sin m_k \cdot 1 = (-1)^k \cdot \sin \varepsilon_k = (-1)^k \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{1}{k \cdot \pi}$$

und

$$m_k \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_k \cdot 1 = m_k \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot \varepsilon_k = \sim k \cdot \pi$$

erhalten wir noch:

$$\frac{\sin m_k \cdot 1}{m_k \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_k \cdot 1} = \frac{(-1)^k}{k^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{L}{\lambda}. \quad (30c)$$

Nun können wir die Funktion $H(\xi)$ folgendermaßen anschreiben:

$$\bar{H}(\xi) = -2 \cdot E \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^2} - \frac{L \cdot \xi}{\lambda \cdot \pi \cdot 1} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^3} \right] \cdot \frac{1}{\pi^2}. \quad (31)$$

Die auf der rechten Seite dieser Gleichung stehende Klammer enthält die Differenz zweier Fourierscher Reihen, die ohne weiteres summiert werden können. Es ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^2} = \frac{\left(\pi \cdot \frac{\xi}{1}\right)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}$$

gültig im Bereiche:

$$-\pi \leq \pi \cdot \frac{\xi}{1} \leq +\pi$$

bzw.

$$-1 \leq \xi \leq +1.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch Integration:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^3} = \frac{\left(\pi \cdot \frac{\xi}{1}\right)^3}{12} - \frac{\xi}{1} \cdot \frac{\pi^3}{12},$$

ebenfalls gültig im Intervall:

$$-1 \leq \xi \leq +1.$$

Mit diesen Summenformeln geht die Gl. (31) über in:

$$\begin{aligned} \bar{H}(\xi) &= \frac{E}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{\xi}{1}\right)^2 + \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{1} \cdot \left\{ \left(\frac{\xi}{1}\right)^3 - \frac{\xi}{1} \right\} \right] \\ &= \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(\xi) + \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{1} \cdot H_2(\xi) \right). \end{aligned} \quad (31a)$$

Diese Gleichung ist nun verhältnismäßig einfach auszuwerten; die Funktion $H_1(\xi)$ ergibt im Bereiche $-1 \leq \xi \leq +1$ einen symmetrisch zu $x = 0$ liegenden Parabelbogen,

¹⁾ Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, § 33, Gl. 6. (Braunschweig 1910.)

und zu diesem addiert sich die durch die Funktion $\frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\xi}{1} \cdot H_2(\xi)$ dargestellte Wellenlinie. $H_2(\xi)$ ist uns ebenfalls nur im Bereiche $-1 \leq \xi \leq +1$ gegeben. Außerhalb des angegebenen Bereiches findet man den Wert der Funktionen $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ durch die Überlegung, daß der Wert der unendlichen Reihen

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^2} \quad \text{bzw.} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^3}$$

sich nicht ändert, wenn das Argument $\pi \cdot \frac{\xi}{1}$ um ganzzahlige Vielfache von 2π vermehrt oder vermindert wird. Um also die Funktionen $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ über das Intervall $-1 \leq \xi \leq +1$ hinaus fortzusetzen, braucht man nur die für dieses Intervall gefundenen Kurven aneinanderzureihen, wie dies die Figuren 6b und 6c zeigen.

Wir haben nun in

$$\bar{F}(\xi) = G(\xi) + \bar{H}(\xi) \quad (32)$$

zunächst eine Näherungsformel für die Form der Funktion $F(\xi)$ abgeleitet, welche diese, solange der Parameter $\frac{\lambda}{L}$ nicht sehr beträchtlich wird, mit genügender Genauigkeit abbildet.

Die Abweichung des Näherungswertes $\bar{F}(\xi)$ von dem genauen Werte der Funktion $F(\xi)$ ergibt sich aus der Gleichung:

$$F(\xi) = \bar{F}(\xi) + D(\xi)$$

zu:

$$D(\xi) = -2 \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{\sin m_k \cdot l}{m_k \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_k \cdot l} \cdot \cos m_k \cdot \xi - \frac{L}{\lambda} \cdot (-1)^k \cdot \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^2 \cdot \pi^2} + \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \cdot \frac{\xi}{1} \cdot (-1)^k \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{1}}{k^3 \cdot \pi^3} \right] \quad (33)$$

Diese Reihe konvergiert nun unvergleichlich viel besser als die durch die Gl. (28a) dargestellte unendliche Reihe. Dies hat seinen Grund darin, daß die Glieder der Reihe für $H(\xi)$ sich dem Werte entsprechender Glieder der Reihe (28a) um so mehr nähern, je höher man in der Ordnungszahl dieser Glieder geht; das heißt aber nichts anderes, als daß die Glieder der Reihe für $D(\xi)$ mit wachsender Ordnungszahl k sehr schnell abnehmen und bald verschwindend klein werden.

Wir haben somit die Funktion $F(\xi)$ gemäß der Gleichung:

$$F(\xi) = G(\xi) + \bar{H}(\xi) + D(\xi) \quad (34)$$

in eine Summe einzelner Funktionen zerlegt, deren Glieder, solange das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ nicht extrem groß wird, verhältnismäßig leicht berechnet werden können.

5. Der Einfluß des Verhältnisses $\frac{L}{\lambda}$ auf die Form der Funktion $F(\xi)$. Im Vorhergehenden wurde gezeigt, daß die Form der Funktion $F(\xi)$ und damit der Verlauf des zur Zeit $t = 0$ einsetzenden, auf unserer Wicklung sich abspielenden Ausgleichsvorganges nur durch die Größe des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ bestimmt wird. Wir gewinnen einen schnellen

Überblick über die Änderungen der Form der Funktion $F(\xi)$, welche diese mit wechselnden Werten des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ erleidet, wenn wir zunächst den Verlauf von $F(\xi)$ für die beiden Extremfälle $\frac{L}{\lambda} = 0$ und $\frac{L}{\lambda} = \infty$ betrachten.

Man kann leicht zeigen, daß die unendliche Reihe.

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot l} \cdot \cos m_{\mu} \cdot \xi$$

für $\frac{L}{\lambda} = 0$ den konstanten Wert $+\frac{1}{2}$ annimmt, d. h. es wird:

$$F(\xi) = -E \quad \text{für} \quad \frac{L}{\lambda} = 0. \quad (35)$$

Nimmt $\frac{L}{\lambda}$ dagegen den Wert unendlich an, so rückt die in der Fig. 4 eingezeichnete Hyperbel nach oben, sie geht in eine gerade Linie mit dem Abstände $+\infty$ von der Abszissenachse über, und die Schnittpunkte $P_1, P_2, P_3 \dots$ fallen in die durch die Punkte $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2} \cdot \pi, \frac{5}{2} \cdot \pi \dots$ gezogenen Senkrechten. Die Gl. (20a) geht somit über in:

$$m_{\mu} \cdot l = \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi$$

und damit nimmt die unendliche Reihe

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot l} \cdot \cos m_{\mu} \cdot \xi$$

den Wert

$$\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{2 \cdot \mu - 1} \cdot \cos m_{\mu} \cdot \xi$$

an. Wir gewinnen somit folgenden Ausdruck für die Funktion $F(\xi)$:

$$F(\xi) = -\frac{4}{\pi} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{1}{2 \cdot \mu - 1} \cdot \cos m_{\mu} \cdot \xi \quad \text{für} \quad \frac{L}{\lambda} = \infty. \quad (36)$$

Dies ist der Ausdruck für eine symmetrisch zu $\xi = 0$ liegende Rechteckswelle mit dem Scheitelwerte E und der Länge $4 \cdot l$.

Die Fig. 5 veranschaulicht die beiden Grenzformen, zwischen welchen sich die Funktion $F(\xi)$ äußerstenfalls bewegen kann. Man erkennt sofort, daß beide Kurvenzüge die Anfangsbedingung, nämlich

$$F(\xi) = -E \quad \text{für} \quad -1 < \xi < +1$$

Fig. 5.

erfüllen. Die eben gewonnenen Ergebnisse werden sich überhaupt am besten überblicken lassen, wenn wir uns die physikalische Bedeutung derselben klarmachen.

Die Funktion $F(\xi)$ ist nach Gl. (28a) eine gerade Funktion, d. h. es ist stets

$$F(\xi) = F(-\xi).$$

Wenn wir vom Dämpfungsfaktor absehen, ergibt sich demnach aus Gl. (28):

$$e_{ix=0} = F(-v \cdot t) + F(+v \cdot t) = 2 \cdot F(v \cdot t).$$

Im Punkte $x = 0$ herrscht somit jederzeit eine Spannung:

$$e_{x=0} = 2 \cdot E + 2 \cdot F(v \cdot t). \quad (37)$$

Das heißt: Die Funktion $F(\xi)$ ergibt, wenn man von der zeitlichen Dämpfung abieht, im doppelten Maßstabe aufgetragen und um den Betrag $+2 \cdot E$ in Richtung der Ordinatennachse verschoben, die jederzeit am Ende unserer Wicklung herrschende Spannung.

Im Falle $\frac{L}{\lambda} = 0$ bleibt

demnach der Punkt $x = 0$ dauernd spannungslos, d. h. eine unendlich große Selbstinduktion λ würde unsere Wicklung von der Freileitung elektrisch vollkommen trennen. Die dem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = \infty$ (d. h. $\lambda = 0$)

zugeordnete Funktion $F(\xi)$ hingegen ist mit der charakteristischen Einschalterschwingung einer Leitung (Schaltspannung $= 2 \cdot E$) identisch¹⁾.

Fig. 6 veranschaulicht den Gang der Berechnung der Funktion $F(\xi)$ auf Grund des im vorigen Abschnitte entwickelten Näherungsverfahrens, und zwar

Fig. 6.

¹⁾ In diesem letzteren Falle wird $\frac{W}{2 \cdot \lambda} = \infty$, d. h. der Dämpfungsfaktor $e^{-a \cdot t}$

nimmt dauernd den Wert Null an, so daß also eine physikalische Deutung der Gl. (36) eigentlich keinen rechten Sinn hat. Es ist indes zu bedenken, daß wir bei der Ableitung des Ersatzschemas die Transformatorenwicklung uns im Punkte $x = 0$ konzentriert dachten, so daß also der Dämpfungsfaktor

$$e^{-\frac{W}{2 \cdot \lambda} \cdot t}$$

streng genommen nur im Punkte $x = 0$ Berechtigung hat. Nur solange $\frac{W}{2 \cdot \lambda}$ keine große Zahl wird, begehen wir durch Hinzunahme des eben angeschriebenen Dämpfungsfaktors zu den Gl. (28) keinen allzu großen Fehler.

wurde ein Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 1$ zugrunde gelegt. Für die Grundwelle ergibt sich, am einfachsten auf graphischem Wege, eine Amplitude von $-1,12 \cdot E$. Die Funktion $\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$, welche bei Vernachlässigung der Winkel ε_μ (derselbe beträgt im vorliegenden Falle für $\mu = 2$ immerhin noch $\varepsilon_\mu = 0,16$) die Gesamtheit der Oberwellen enthält, ergibt eine Reihe von Parabelbögen, deren Ordinaten zwischen $+0,167 \cdot E$ und $-0,333 \cdot E$ schwanken. Die Summe

$$G(\xi) + \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$$

weicht im Bereiche $-1 < \frac{\xi}{1} < +1$ von dem Werte $-E$, welchen die Anfangsbedingung erfordert, nirgends um mehr als ca. 6% ab, sie kommt also der Funktion $F(\xi)$ schon ziemlich nahe. Das Korrektionsglied

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\xi}{1} \cdot H_2(\xi)$$

nimmt mit wachsender Abszisse $\frac{\xi}{1}$ verhältnismäßig bedeutende Werte an, man sieht aber auch, daß es den Löwenanteil zur Funktion $D(\xi)$, welche die Abweichung der Näherungsfunktion $\bar{F}(\xi)$ von der wahren Funktion $F(\xi)$ angibt, beisteuert. Es ist somit, sobald man die Funktion $F(\xi)$ für höhere Werte von $\frac{\xi}{1}$ zu bilden hat und man sich mit der durch die Funktion

$$G(\xi) + \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$$

gegebenen Näherung nicht begnügen will, stets ratsam, die Funktion $D(\xi)$ zu berechnen; da die einzelnen Glieder dieser Reihe sehr schnell konvergieren, wird es häufig genügen, nur das erste Glied derselben zu berücksichtigen.

Bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 0,2$ können, da die Winkel ε_μ gemäß nachstehender Tabelle für $\mu > 1$ sehr klein werden, die Teilfunktionen

$$\frac{1}{6} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \frac{\xi}{1} \cdot H_2(\xi) \text{ und } D(\xi)$$

bereits ohne weiteres vernachlässigt werden.

μ	ε_μ		μ	ε_μ
1	0,433		4	0,021
2	0,062		5	0,016
3	0,032		6	0,013

Selbst die Funktion $\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$ spielt gegenüber der Grundwelle nur mehr die Rolle eines Korrektionsgliedes. Es ergibt sich nämlich die Amplitude der Grundwelle $G(\xi)$ zu $-1,032 \cdot E$, während die Funktion $\frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$ zwischen den Grenzen

$$+0,0334 \cdot E \left(\frac{\xi}{1} = 0\right) \text{ und } -0,0667 \cdot E \left(\frac{\xi}{1} = 1\right)$$

eingeschlossen ist. Die Summe

$$G(\xi) + \frac{1}{6} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot H_1(\xi)$$

weicht innerhalb des Intervalls $-1 < \frac{\xi}{l} < +1$ von dem konstanten Betrage $-E$ nirgends mehr als etwa $1/1000$ ab, sie bildet also die Funktion $F(\xi)$ bereits mit großer Genauigkeit nach.

Die Fig. 7, 8 und 9 zeigen in interessanter Weise die Veränderungen, welche die

Fig. 7.

Fig. 8.

Fig. 9.

Veränderungen, welche die Funktion $F(\xi)$ mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ erleidet. Während die Höhe der Grundschwingung durch das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ wenig beeinflusst wird (sie schwankt zwischen $-E$ für $\frac{L}{\lambda} = 0$ und $-\frac{4}{\pi} \cdot E$ für $\frac{L}{\lambda} = \infty$), ist die Wellenlänge derselben großen Veränderungen unterworfen; bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 0$ ergibt sich nämlich eine unendlich große Wellenlänge, während diese mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ kleiner wird und im Grenzfalle $\frac{L}{\lambda} = \infty$

auf $4 \cdot l$ zusammenschrumpft. Die höheren Harmonischen verhalten sich gerade entgegengesetzt. Ihre Wellenlänge wird durch die Größe des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ wenig beeinflusst,

um so mehr dagegen ihre Amplitude; diese nimmt, wie ein Blick auf die Fig. 4 zeigt, mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ ebenfalls stark zu. So kommt es, daß bei niedrigen Werten von $\frac{L}{\lambda}$ die Grundwelle $G(\xi)$ von ausschlaggebender Bedeutung für die Form der Funktion $F(\xi)$ wird, während ihr Einfluß mit wachsendem $\frac{L}{\lambda}$ mehr zurücktritt. Die durch die Fig. 7 gezeigte Kurve weicht verhältnismäßig wenig von der Sinusform ab, dagegen zeigt die Kurve Fig. 8 schon starke Deformationen, auch sieht man deutlich, wie die Wellenlänge der Grundwelle schon abgenommen hat. In der Fig. 9 ist schlechterdings die Grundschwingung $G(\xi)$ nicht mehr zu erkennen, ihre Amplitude beträgt hier $-1,25 \cdot E$, ihre Wellenlänge hat von $14,5 \cdot l$ bei $\frac{L}{\lambda} = 0,2$ bereits auf $4,5 \cdot l$ abgenommen. Die Funktion

$F(\xi)$ zeigt im letzten Falle ($\frac{L}{\lambda} = 5$) bereits große Ähnlichkeit mit der in der Fig. 5 dargestellten Rechtecksschwingung, von der sie sich in der Hauptsache nur mehr durch die abgerundeten Ecken unterscheidet. Man erkennt somit deutlich den Einfluß der Selbstinduktion, welche unstetige Strom- und Spannungssprünge unterdrückt.

6. Räumlicher und zeitlicher Verlauf von Strom und Spannung an verschiedenen Stellen der zu schützenden Wicklung. Die Intensität der Spannung und des Stromes auf unserer Wicklung erleidet im Verlaufe des auf derselben sich abspielenden Ausgleichsvorganges aus verschiedenen Gründen eine allmähliche Abnahme. Dies kommt in den Gl. (28) durch das Auftreten eines Dämpfungsfaktors

$$e^{-\alpha \cdot t}$$

zum Ausdruck, mit diesem ist die Funktion $F(\xi)$ zu multiplizieren. Durch die Substitution

$$t = \pm \frac{\xi \mp 1}{v}$$

gelingt es, den Dämpfungsfaktor in eine Ortsfunktion zu verwandeln, so daß die Multiplikation nun ohne weiteres ausgeführt werden kann. Es ergibt sich nämlich

$$e^{-\alpha \cdot t} = e^{\mp \alpha \cdot L \cdot \frac{1}{Z} \cdot \left(\frac{\xi}{1} \mp 1\right)} \quad (38)$$

oder, wenn man von den Verlusten absieht, einfacher

$$e^{-\alpha \cdot t} = e^{\mp \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{W}{Z} \cdot \left(\frac{\xi}{1} \mp 1\right)} \quad (38a)$$

Hierin bedeutet Z den Wellenwiderstand der zu schützenden Wicklung. Will man also bei irgendwelchen Untersuchungen den Einfluß der zeitlichen Dämpfung mit berücksichtigen, so braucht man nur statt der Funktion $F(\xi)$ eine neue Funktion

$$\bar{F}(\xi) = F(\xi) \cdot e^{\mp \alpha \cdot L \cdot \frac{1}{Z} \cdot \left(\frac{\xi}{1} \mp 1\right)} \quad (39)$$

in die Rechnung einzuführen.

Strom und Spannung auf unserer Wicklung setzen sich, wie wir gesehen, aus zwei Wellenzügen $F(\xi)$ zusammen, welche sich mit der Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ in entgegengesetzter Richtung längs derselben hinbewegen und welche zur Zeit $t = 0$ so liegen, daß sie die Anfangsbedingungen erfüllen, d. h. die Stromwellen, welche sich übrigens von den Spannungswellen noch durch einen Proportionalitätsfaktor $\left(\pm \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}\right)$ unterscheiden, heben sich gerade auf, während sich die Spannungswellen gerade decken; da wir nicht nur die übergelagerten, sondern die tatsächlich vorhandenen Ströme und Spannungen betrachten wollen, haben wir zu den beiden, die Spannung darstellenden Wellenzügen noch einen konstanten Betrag $+2 \cdot E$ zu addieren. Aus vorstehendem ergibt sich nun ohne weiteres der Weg zur Darstellung des räumlichen Verlaufs von Strom und Spannung auf unserer Wicklung. Um die zu irgendeinem Zeitpunkt T längs unserer Wicklung herrschende Spannungsverteilung zu ermitteln, hat man nur die Funktion $F(\xi)$ über der um den Betrag E in Richtung wachsender Ordinaten verschobenen Abszissenachse zweimal aufzutragen, die eine Funktion längs der Abszissenachse um den Betrag $+v \cdot T$, die andere um den Betrag $-v \cdot T$ zu verschieben und die Ordinaten zu addieren. Die so entstehende Kurve ergibt im Bereiche $0 \leq x \leq 1$ die vorhandene Spannungsverteilung. Ähnlich hat man zur Darstellung des Stromverlaufes zu verfahren, nur fällt hier die Verschiebung der Abszissenachse weg, ferner hat man die eine

Funktion mit dem Faktor $+\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$, die andere Funktion mit dem Faktor $-\sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ zu multiplizieren.

Nach dieser Vorschrift wurde bei Anfertigung der Fig. 10 verfahren, welche das Eindringen einer ursprünglich rechtecksförmigen Wanderwelle von der Höhe E in die durch eine Drosselspule geschützte Wicklung veranschaulicht; es wurde vorausgesetzt, daß sich die gesamte Selbstinduktion der zu schützenden Wicklung zu der der Schutzdrosselspule wie 5 : 1 verhalte, die Selbstinduktion der letzteren betrage 0,001 Henry, der Wellenwiderstand der vor der Wicklung liegenden Leitung 50 Ω , die Wicklung besitze außerdem noch eine gesamte Kapazität von $0,001 \cdot 10^{-6}$ Farad. Die Verlustdämpfung wurde nicht berücksichtigt.

Man sieht, wie eine Welle mit der Höhe $2 \cdot E$ und abgeflachter Stirn in die Wicklung wandert; die Schutzdrosselspule hat die steile Stirn der ankommenden Wanderwelle gebrochen, sie konnte aber nicht verhindern, daß infolge von Reflexionserscheinungen

Fig. 10.

die Spannung der Wicklung auf den Betrag von $2 \cdot E$ ansteigt. Diese in die Wicklung eindringende Welle wird nun am offenen Ende derselben unter Beibehaltung des Vorzeichens vollkommen reflektiert, so daß eine weitere Erhöhung der Spannung auf $4 \cdot E$ eintritt, die Stirn der reflektierten Welle behält ihre ursprüngliche Form unverändert bei. Die Reflexion der Stromwelle erfolgt hingegen unter Umkehrung des Vorzeichens. Vom Zeitpunkte $v \cdot t = 2 \cdot l$ an, in welchem fast die ganze Wicklung stromlos ist und unter einer Spannung $4 \cdot E$ steht, setzt, von der Leitung ausgehend, eine Entladung derselben ein, welche zur Zeit $v \cdot t = 4 \cdot l$ vollendet ist; in diesem Augenblicke hat die Wicklung fast die ganze zu Anfang des betrachteten Ausgleichsvorganges in sie hineingeflossene Energie wieder an die Leitung abgegeben. Nun erfolgt ein neuer Vorstoß der Wanderwelle in die Wicklung, und das eben geschilderte Spiel wiederholt sich; man erkennt jedoch, daß die Abflachung der Wellenstirn stark zugenommen hat. Der betrachtete Vorgang ist demnach kein rein periodischer.

Das wichtigste Ergebnis unserer Betrachtungen ist folgendes: Die vor eine Wicklung geschaltete Schutzinduktivität verflacht die steile Stirn ankommender Wanderwellen und mildert so die zwischen den einzelnen Windungen der Wicklung auftretende Spannungsbeanspruchung, sie kann indes einen Anstieg der Spannung der Wicklung gegen Erde auf den vierfachen Betrag der Wanderwellenspannung nicht verhindern. Eine selbst weitgehende Vergrößerung der Induktivität der Schutzdrosselspule kann hieran nichts ändern, wenn wir an der Voraussetzung einer sehr langen Wanderwelle festhalten.

Die Fig. 11, welche unter Zugrundelegung einer gegen vorher 25-fachen Induktivität λ gezeichnet wurde, und bei welcher die im Verlaufe des Ausgleichsvorganges auftretende höchste Spannung noch nicht erreicht ist, zeigt dies deutlich; eine Zunahme der Größe der Schutzinduktivität bewirkt lediglich eine zunehmende Verflachung der Wellenstirn.

Man könnte den Fig. 10 und 11 auch den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung an irgendeiner Stelle der Wicklung entnehmen, doch ist es einfacher und übersichtlicher, zu diesem Zwecke direkt auf die abgeleiteten Gleichungen zurückzugreifen. Wir wollen uns auch hier wieder des für die Funktion $F(\xi)$ gefundenen Näherungsausdruckes (32) bedienen.

Am Wicklungsanfang, d. h. im Punkte $x = 1$ gilt:

$$\left. \begin{aligned} e &= 2 \cdot E + F(1 - v \cdot t) + F(1 + v \cdot t) \\ i &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(1 - v \cdot t) - F(1 + v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Hierin bedeuten e und i die totalen Spannungen und Ströme; von der zeitlichen Dämpfung wurde zunächst abgesehen, bezüglich Berücksichtigung derselben sei auf die Gl. (39)

Fig. 11.

verwiesen. Gl. (39) kann natürlich sinngemäß auch auf irgendwelche Teilfunktionen $G(\xi)$, $H(\xi)$ usw. übertragen werden.

Die Funktion $H_1(\xi)$ ist, wie ein Blick auf die Fig. 6 lehrt, bezüglich des Punktes $x = 1$ eine gerade Funktion, d. h. es gilt stets die Beziehung:

$$H_1(1 + v \cdot t) = H_1(1 - v \cdot t).$$

Im Gegensatz hierzu ist die Funktion $H_2(\xi)$ hinsichtlich des Punktes $x = 1$ eine ungerade Funktion, so daß wir anschreiben können:

$$H_2(1 + v \cdot t) = -H_2(1 - v \cdot t)$$

Damit ergibt sich nun:

$$\begin{aligned} e_{x=1} &= 2 \cdot E + G(1 - v \cdot t) + G(1 + v \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(1 + v \cdot t) + \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{v \cdot t}{1} \cdot H_2(1 + v \cdot t) \right) \\ i_{x=1} &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \left[G(1 - v \cdot t) - G(1 + v \cdot t) + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \cdot H_2(1 + v \cdot t) \right] \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} e_{x=1} &= 2 \cdot E + 2 \cdot G_0 \cdot \cos m_0 \cdot 1 \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(1 + v \cdot t) + t \cdot \frac{Z}{\lambda} \cdot H_2(1 + v \cdot t) \right) \\ i_{x=1} &= - \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \left[2 \cdot G_0 \cdot \sin m_0 \cdot 1 \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \cdot H_2(1 + v \cdot t) \right] \end{aligned} \quad (41)$$

Hierin bedeutet:

$$G_0 = -2 \cdot E \cdot \frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{l}{2} \cdot \sin 2 m_0 \cdot l} \quad (41a)$$

die Amplitude der Grundschiwingung.

Die Grundgleichungen für Strom und Spannung im Punkte $x = 0$ schreiben sich folgendermaßen:

$$\left. \begin{aligned} e &= 2 \cdot E + F(-v \cdot t) + F(+v \cdot t) \\ i &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(-v \cdot t) - F(+v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Die Funktionen $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ verhalten sich hinsichtlich des Punktes $x = 0$ genau so wie früher, es gilt somit:

$$\begin{aligned} H_1(+v \cdot t) &= H_1(-v \cdot t), \\ H_2(+v \cdot t) &= -H_2(-v \cdot t). \end{aligned}$$

Damit können wir die Gl. (42) umformen in:

$$\left. \begin{aligned} e &= 2 \cdot E + 2 \cdot G_0 \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{l}{3} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(H_1(+v \cdot t) + t \cdot \frac{Z}{\lambda} \cdot H_2(+v \cdot t) \right) \\ i &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Man sieht, die Gl. (41) und (43) für den zeitlichen Verlauf der Spannung am Anfang und Ende der Wicklung haben dieselbe Form. In der Gl. (41) für den in die Wicklung hineinfließenden Strom spielt das zweite Glied neben der Sinusschwingung nur eine unbedeutende Rolle, selbst noch, was sich bei Berücksichtigung der Funktion $D(\xi)$ ergibt, bei höheren Werten des Verhältnisses $\frac{L}{\lambda}$.

Wir hatten bereits früher gefunden und dies durch die Gl. (37) ausgedrückt, daß die Zeitkurve der am Wicklungsende herrschenden Spannung die Form der Funktion $F(\xi)$ besitzt; die Zeitkurve der Spannung am Wicklungsanfang unterscheidet sich von dieser Funktion in der Hauptsache nur dadurch, daß die Amplitude der Grundschiwingung $G(\xi)$ nach Maßgabe des Faktors $\cos m_0 \cdot l$ verkleinert erscheint. Der zeitliche Verlauf des in die Wicklung hineinfließenden Stromes ist bei nicht zu großen Werten von $\frac{L}{\lambda}$ fast rein sinusförmig.

7. Das Spannungsgefälle in der Wicklung. Handelt es sich um die Dimensionierung der zum ausreichenden Schutze einer Wicklung gegen Sprungwellen erforderlichen Drosselspule, so ist es wichtig, das jeweilig in der Wicklung auftretende maximale Spannungsgefälle zu kennen. Wir wissen von vornherein nicht, an welcher Stelle der Wicklung und in welchem Zeitpunkte dieses Maximum erreicht wird; wollen wir uns also Klarheit über die Größe des maximalen Spannungsgefälles verschaffen, so wäre es eigentlich notwendig, den vollständigen räumlichen und zeitlichen Verlauf desselben zu bestimmen. Wir können jedoch schon den Fig. 10 und 11 entnehmen, daß, wenn wir den zeitlichen Verlauf des Spannungsgefälles für die Punkte $x = 0$, $x = \frac{l}{2}$ und $x = l$ berechnen, wir sicher sein können, daß diese Berechnungen das maximal auftretende Spannungsgefälle einschließen; wir gewinnen so außerdem einen schnelleren Überblick über die auftretenden Erscheinungen.

Aus Gl. (27a) ergibt sich durch Differentiation nach x bei Vernachlässigung der zeitlichen Dämpfung:

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} m_{\mu} \cdot l \cdot \frac{\sin m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot l} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x \cdot \cos m_{\mu} \cdot v \cdot t. \quad (44)$$

Für Wicklungsanfang, Wicklungsmittle und Wicklungsende folgt somit:

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} m_{\mu} \cdot l \cdot \frac{\sin^2 m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot l} \cdot \cos m_{\mu} \cdot v \cdot t, \quad (44a)$$

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} m_{\mu} \cdot l \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot m_{\mu} \cdot l \cdot \frac{\sin m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot l} \cdot \cos m_{\mu} \cdot v \cdot t, \quad (44b)$$

$x = \frac{1}{2}$

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = 0. \quad (44c)$$

$x = 0$

Das Spannungsgefälle am Ende der Wicklung ist also stets Null. Es ergeben sich interessante Beziehungen, wenn man die Gl. (44a) und (44b) für die beiden Grenzfälle $\frac{L}{\lambda} = 0$ und $\frac{L}{\lambda} = \infty$ auswertet. Im ersteren Falle ergibt sich, wie man leicht zeigen kann:

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad \frac{L}{\lambda} = 0, \quad (45a)$$

$x = 1$

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad \frac{L}{\lambda} = 0. \quad (45b)$$

$x = \frac{1}{2}$

Diese beiden Gleichungen decken sich vollkommen mit der Erfahrung, daß eine unendlich große Selbstinduktion λ die zu schützende Wicklung gegen ankommende Wanderwellen vollkommen absperrt.

Für den zweiten der angeführten Grenzfälle ergibt sich ferner:

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1} \quad \text{für} \quad \frac{L}{\lambda} = \infty, \quad (46a)$$

$x = 1$

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (\pm 1) \cdot \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1} \quad \text{für} \quad \frac{L}{\lambda} = \infty. \quad (46b)$$

$x = \frac{1}{2}$

$$(\pm 1 = +1, -1, -1, +1, +1, -1, \dots)$$

Nun hat die unendliche Reihe:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}$$

den Wert Null im Bereiche $0 < v \cdot t < 2 \cdot 1$, mit Ausnahme jedoch der Punkte 0 und $2 \cdot 1$; im Punkte $v \cdot t = 0$ springt nämlich die durch diese Reihe dargestellte Funktion plötzlich auf den Wert $+\infty$, im Punkte $v \cdot t = 2 \cdot 1$ auf $-\infty$. Einen ähnlichen Verlauf zeigt die durch die Reihe:

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (\pm 1) \cdot \cos \frac{2 \cdot \mu - 1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}, \quad (\pm 1 = +1, -1, -1, +1, +1, -1, \dots)$$

dargestellte Funktion. Sie hat im Bereiche $0 \leq v \cdot t \leq 2 \cdot 1$ den Wert Null, mit Ausnahme der Unstetigkeitsstellen $v \cdot t = \frac{1}{2} \cdot 1$ und $v \cdot t = \frac{3}{2} \cdot 1$; im ersten Punkte springt sie plötzlich auf $+\infty$, um jedoch sofort wieder auf Null zu fallen, in letzterem Punkte nimmt sie den Wert $-\infty$ an.

Durch Aneinanderreihen der für das angegebene Intervall gefundenen Funktionswerte ergeben sich die durch die Fig. (12a) und (12b) gezeigten Bilder für den zeitlichen Verlauf des Spannungsgefälles in den Punkten $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$; dieselben erklären sich physikalisch ohne weiteres aus der Form der durch die Fig. 5b dargestellten Funktion,

Fig. 12a.

Fig. 12b.

während sie mathematisch wegen der Divergenz der beiden, eben angeschriebenen Reihen nicht ohne weiteres zu erkennen sind.

Die Gl. (44a) und (44b) lassen sich nun, solange das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ nicht sehr groß wird, mit Hilfe des im 4. Abschnitt entwickelten Näherungsverfahrens verhältnismäßig einfach auswerten. Es ergibt sich nämlich folgender Näherungsausdruck:

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot m_0 \cdot l \cdot \frac{\sin^2 m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_0 \cdot l} \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t$$

$$+ \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}}{k^2 \cdot \pi^2} - \frac{v \cdot t}{1} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}}{k^3 \cdot \pi^3} \right], \quad 47a)$$

bzw.

$$\frac{\partial e_f}{\partial x} = \frac{4 \cdot E}{1} \cdot m_0 \cdot l \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot l \cdot \frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_0 \cdot l} \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t$$

$$+ \frac{4 \cdot E}{1} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left[\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}}{(2 \cdot k - 1) \cdot \pi} - \frac{v \cdot t}{1} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}}{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \pi^2} \right]. \quad 47b)$$

Man kann diese Gleichungen natürlich noch durch Hinzunahme eines Korrektionsgliedes, welches die Abweichung vom wahren Werte der Funktion $\frac{\partial e_f}{\partial x}$ angibt (ähnlich der Funktion $D(\xi)$ des 4. Abschnittes), verbessern. Nun ist:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{1}}{k^2 \cdot \pi^2} = \frac{\left(\frac{v \cdot t}{1} - 1\right)^2}{4} - \frac{1}{12},$$

1) Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, Braunschweig 1910, § 33, Gl. 5.

gültig im Intervall

$$0 < \frac{v \cdot t}{l} \leq 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} = \frac{\left(\frac{v \cdot t}{l}\right)^3}{12} - \frac{\left(\frac{v \cdot t}{l}\right)^2}{4} + \frac{v \cdot t}{6},$$

ebenfalls gültig im Bereiche

$$0 < \frac{v \cdot t}{l} \leq 2,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\cos(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{(2k - 1) \cdot \pi} = -\frac{1}{4},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{\sin(2 \cdot k - 1) \cdot \pi \cdot \frac{v \cdot t}{l}}{(2 \cdot k - 1)^2 \cdot \pi^2} = -\frac{1}{8} \cdot \frac{v \cdot t}{l},$$

beide gültig im Intervall

$$-1 < \frac{v \cdot t}{l} < +1.$$

Die durch diese Reihenentwicklungen dargestellten Funktionen veranschaulichen die Fig. 13a bis 13d.

Die Fig. 14 gibt ein Bild vom zeitlichen Verlauf des Spannungsgefälles in den Punkten $x = 1$ (Fig. 14a) und $x = \frac{1}{2}$ (Fig. 14b) bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 1$. Man sieht, daß das maximale Spannungsgefälle im Punkte $x = 1$ bereits zur Zeit $t = 0$ auftritt, im Punkte

Fig. 13.

Fig. 14.

$x = \frac{1}{2}$ erfolgt sein Auftreten kurze Zeit später, nämlich im Zeitpunkte $t = \frac{1}{2 \cdot v}$. Die beiden Maxima des Spannungsgefälles in den Punkten $x = 1$ und $x = \frac{1}{2}$ sind natürlich, wenn man von der Dämpfung absieht, einander gleich.

Unter der Voraussetzung, daß das Maximum des Spannungsgefälles bereits zur Zeit $t = 0$ bzw. $t = \frac{1}{2 \cdot v}$ auftritt, und daß das Verhältnis $\frac{L}{\lambda}$ nicht allzu groß wird, kann man eine einfache Näherungsformel für das maximale Spannungsgefälle ableiten. Für kleine Winkel $m_0 \cdot l$ gilt nämlich angenähert:

$$\operatorname{tg} m_0 \cdot l \approx m_0 \cdot l \approx \sin m_0 \cdot l.$$

Damit folgt aus Gl. (20):

$$m_0 \cdot l = \sqrt{\frac{L}{\lambda}}$$

und es wird weiterhin:

$$\frac{\sin m_0 \cdot l}{m_0 \cdot l + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_0 \cdot l} \approx \frac{1}{2},$$

$$m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot l \approx \frac{L}{\lambda}$$

und

$$m_0 \cdot l \cdot \sin \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot l \approx \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{\lambda}.$$

Für kleine Zeiten t folgt damit aus den Gl. (47):

$$\frac{\partial e_t}{\partial x_{\max}} \approx \frac{2 \cdot E}{1} \cdot \frac{L}{\lambda}. \quad (48)$$

Fig. 14 zeigt, daß diese Gleichung bei einem Verhältnis $\frac{L}{\lambda} = 1$ noch mit ziemlicher Genauigkeit gilt.

8. Der Schutzwert des Kondensators. Schutzdrosselspulen und Schutzkondensatoren verhalten sich bekanntlich gegenüber Sprungwellen sehr ähnlich. Eine Ausdehnung der bisher gepflogenen Betrachtungen auf Schutzkondensatoren würde aus diesem Grunde nur wenig Neues bieten, so daß wir hierauf lieber verzichten wollen. Wir werden vielmehr unsere Aufmerksamkeit einem Problem zuwenden, das ebenfalls außerordentliche praktische Wichtigkeit besitzt; wir wollen nämlich untersuchen, wie sich die durch Kondensatoren geschützte Maschinenwicklung beim Abschalten von der speisenden Leitung verhält. Hier kann es sich nun um zwei prinzipiell verschiedene Fälle handeln:

- a) die Lostrennung von der Speiseleitung erfolgt in dem Augenblicke, in welchem die Kurve des zu unterbrechenden Stromes gerade betriebsmäßig durch Null geht,
- b) die eben ausgesprochene Voraussetzung trifft nicht zu.

Außer diesen beiden Voraussetzungen können noch viele andere gegeben sein; wir wollen uns auf die folgenden, praktisch wichtigsten Probleme beschränken und dabei der Übersichtlichkeit zuliebe die angegebenen Vereinfachungen treffen.

1. Das Abschalten des leerlaufenden Transformators usw.

Der Strom sei gerade Null. Die Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung betrage im stationären Zustand 90° , d. h. wir sehen von den Verlusten ab. Die Verteilung der Betriebsspannung über die Wicklung befolge im stationären Zustande ein lineares Gesetz, wir vernachlässigen also die Wirkung der Streuung sowie der Kapazität zwischen den Windungen.

2. Das Abschalten des kurzgeschlossenen Transformators usw.

Die Kurve des Kurzschlußstromes möge kurz vor der Unterbrechung gerade ihr Maximum durch laufen, da wir von den Verlusten absehen, herrscht also im Momente der Unterbrechung auf der Wicklung überall die Spannung Null.

Die hier betrachteten Ausgleichsvorgänge laufen in so außerordentlich kurzer Zeit ab, daß die mit der Netzfrequenz verlaufende Leerlaufsspannung bzw. der Kurzschlußstrom sich währenddessen nicht merklich ändern, so daß wir dieselben als konstante Größen auffassen können. Wir nennen den Maximalwert der Leerlaufsspannung E , den des Kurzschlußstromes J . Im übrigen sollen die bisher benutzten Bezeichnungen beibehalten werden, es bezeichne noch K die Kapazität des Schutzkondensators, die Abschaltung erfolge zur Zeit $t = 0$.

9. Das Abschalten des leerlaufenden, durch einen Kondensator geschützten Transformators. Wir können die uns gestellte Aufgabe folgendermaßen präzisieren: Die beiden Platten eines Kondensators mit der Kapazität K sind durch eine Leiterschleife $A B C$ verbunden (Fig. 15). Das geschilderte System sei im Zeitpunkte $t = 0$ stromlos, an den Klemmen des Kondensators herrsche eine Spannung E , diese fällt längs der Leiterschleife entsprechend der Funktion

$$e = E \cdot \frac{x}{l} \quad (44)$$

bis zum Betrage Null, den sie im Kurzschlußpunkte B natürlich dauernd beibehält, ab (Fig. 15). Vom Zeitpunkte $t = 0$ an bleibe die eben beschriebene Anordnung sich selbst überlassen, und es sind die auf der Leiterschleife $A B C$ sich abspielenden Ausgleichsvorgänge anzugeben. Die Leiterschleife wird in Wirklichkeit durch die Wicklung des abgeschalteten Transformators gebildet.

Wir können, wenn wir wieder zunächst von der zeitlichen Dämpfung absehen, folgende Gleichungen für die auf der Leiterschleife $A B C$ sich ausbildenden Spannungen und Ströme anschreiben:

$$e = \sum_{\mu=1}^{\infty} (A_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t + B_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V'_{\mu}, \quad (45a)$$

$$i = C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\infty} (B_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t - A_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V_{\mu}. \quad (45b)$$

Hierin bedeuten V_{μ} eine reine Ortsfunktion, V'_{μ} deren erste Ableitung, es ist:

$$V_{\mu} = a_{\mu} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x + b_{\mu} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x, \quad (45c)$$

$$V'_{\mu} = a_{\mu} \cdot m_{\mu} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x - b_{\mu} \cdot m_{\mu} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x. \quad (45d)$$

Wir wollen uns noch einmal kurz der Bedeutung der eben angeschriebenen Gleichungen erinnern. Spannung und Strom setzen sich aus einer großen Zahl von Einzelschwingungen zusammen, welche räumlich und zeitlich ein einfaches harmonisches Gesetz befolgen; $\frac{n_{\mu}}{2 \cdot \pi}$ ist die Frequenz, $\frac{2 \cdot \pi}{m_{\mu}}$ die Wellenlänge der Schwingungen, beide sind durch die folgende Beziehung miteinander verbunden:

$$m_{\mu} = \sqrt{L_1 \cdot C_1} \cdot n_{\mu}. \quad (45e)$$

Die Konstanten A_{μ} , B_{μ} , a_{μ} und b_{μ} endlich bestimmen die zeitliche und räumliche Phase sowie die Amplitude der Schwingungen. Sämtliche Konstanten sind zunächst noch vollkommen willkürlich, und es ist unsere Aufgabe, sie aus den speziellen Bedingungen des Problems zu bestimmen. Der Punkt $x = 0$ bleibt dauernd spannungslos, wir haben dort also die Grenzbedingung:

$$e = 0 \quad \text{für } x = 0. \quad (46a)$$

Im Punkte $x = l$ herrscht wegen des Kondensators zwischen der Spannung e und dem Strome i jederzeit die Beziehung:

$$i = K \cdot \frac{\partial e}{\partial t} \quad \text{für } x = l. \quad (46b)$$

Fig. 15.

Die eben angeschriebenen Grenzbedingungen müssen für alle Zeiten erfüllt werden. Aus Gl. (46a) folgt somit:

$$V_{\mu}'(0) = 0. \quad (47)$$

Dies bedingt, wie ein Blick auf die Gl. (45d) lehrt, daß sämtliche Konstanten a_{μ} verschwinden. Wir vereinigen außerdem die Konstanten b_{μ} mit den noch vollkommen willkürlichen Konstanten A_{μ} und B_{μ} und erhalten dann die folgenden einfachen Beziehungen:

$$\left. \begin{aligned} V_{\mu} &= \cos m_{\mu} \cdot x \\ V_{\mu}' &= -m_{\mu} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

Dies in die Gl. (46b) eingeführt, ergibt:

$$V_{\mu}(l) = -\frac{K}{C_1} \cdot V_{\mu}'(l). \quad (49)$$

Durch Einführen der Werte für V_{μ} und V_{μ}' in diese Beziehung ergibt sich endlich die transzendente Bestimmungsgleichung für die Wellenlängen $\frac{2\pi}{m_{\mu}}$:

$$\operatorname{tg} m_{\mu} \cdot l = \frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{C}{K}, \quad (50)$$

welche wir bereits im 4. Abschnitt kennen lernten; an Stelle des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ ist lediglich das Verhältnis der gesamten Kapazität des Entladekreises A B C zur Kapazität des Kondensators getreten. Diese Gleichung hat eine unendliche Anzahl von positiven reellen Wurzeln und wird durch die Fig. 4 am deutlichsten erklärt, Neues ist an dieser Stelle hierzu nicht mehr zu sagen.

Zur Berechnung der Konstanten A_{μ} und B_{μ} sind wir gezwungen, auf die zur Zeit $t = 0$ gegebene Strom- und Spannungsverteilung einzugehen. Wir haben:

$$\left. \begin{aligned} i &= 0 \\ e &= \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{x}{l} \end{aligned} \right\} \text{für } t = 0^1) \quad (51)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen für Strom und Spannung in diese Anfangsbedingungen ergibt sich weiter:

$$0 = -C_1 \cdot n_1 \cdot A_1 \cdot V_1 - C_1 \cdot n_2 \cdot A_2 \cdot V_2 - \dots - C_1 \cdot n_{\nu} \cdot A_{\nu} \cdot V_{\nu} - \dots \quad (52a)$$

$$\frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{x}{l} = B_1 \cdot V_1' + B_2 \cdot V_2' + \dots + B_{\nu} \cdot V_{\nu}' + \dots \quad (52b)$$

Wie nun die Konstanten dieser beiden Reihen zu bestimmen sind, wurde im 4. Abschnitt ausführlich gezeigt, wir können hier gleich die Resultate angeben.

Aus Gl. (52a) ergibt sich ohne weiteres:

$$A_{\mu} = 0. \quad (53a)$$

Aus Gl. (52b) folgt:

$$B_{\mu} = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{0}{1} \frac{\int_0^1 \frac{x}{l} \cdot V_{\mu}' \cdot dx + \frac{K}{C_1} \cdot V_{\mu}'(l)}{\int_0^1 V_{\mu}'^2 \cdot dx + \frac{K}{C_1} \cdot [V_{\mu}'(l)]^2}. \quad (53b)$$

¹⁾ Da die beiden Hälften A B und C B des Entladekreises durchaus symmetrisch sind, können wir unsere Betrachtungen auf eine Hälfte desselben beschränken.

Im vorliegenden Falle ist:

$$V_{\mu}' = -m_{\mu} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x$$

und damit wird:

$$\int_0^1 \frac{x}{1} \cdot V_{\mu}' \cdot dx = -\frac{m_{\mu}}{1} \cdot \int_0^1 x \cdot \sin m_{\mu} \cdot x \cdot dx = \left[\frac{x}{1} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x - \frac{1}{m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x \right]_0^1$$

$$= \cos m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1,$$

$$\int_0^1 V_{\mu}'^2 \cdot dx = m_{\mu}^2 \cdot \int_0^1 \sin^2 m_{\mu} \cdot x \cdot dx = \left[\frac{x}{2} \cdot x - \frac{1}{4 \cdot m_{\mu}} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot x \right]_0^1 \cdot m_{\mu}^2$$

$$= \frac{m_{\mu}}{2} \cdot (m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_{\mu} \cdot 1)$$

und

$$B_{\mu} = \frac{E}{m_{\mu}} \cdot \frac{\cos m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1 - \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_{\mu} \cdot 1 - \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \cos 2 \cdot m_{\mu} \cdot 1}$$

Nun sind sämtliche Konstanten bestimmt, und wir sind somit imstande, die vollständigen Gleichungen für Spannung und Strom im Entladekreis A B C anzuschreiben. Dieselben lauten nach Hinzunahme des Dämpfungsfaktors:

$$e = e^{-a_1 \cdot t} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{-\cos m_{\mu} \cdot 1 + \frac{1}{m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1 + \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot 1 - \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \cos 2 m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x \cdot \cos n_{\mu} \cdot t, \quad 54$$

$$i = e^{-a_1 \cdot t} \cdot E \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\cos m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1 - \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot 1 - \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \cos 2 m_{\mu} \cdot 1} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x \cdot \sin m_{\mu} \cdot t. \quad 54$$

Wir können auch jetzt wieder den eben angeschriebenen Gleichungen für Spannung und Strom eine übersichtlichere Form geben, wenn wir uns die Beziehung

$$n_{\mu} = \frac{m_{\mu}}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}} = m_{\mu} \cdot v$$

ins Gedächtnis zurückrufen und die folgenden trigonometrischen Regeln beachten:

$$\cos m_{\mu} \cdot v \cdot t \cdot \sin m_{\mu} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \sin m_{\mu} \cdot (x - v \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot \sin m_{\mu} \cdot (x + v \cdot t),$$

$$\sin m_{\mu} \cdot v \cdot t \cdot \cos m_{\mu} \cdot x = \frac{1}{2} \cdot \sin m_{\mu} \cdot (x - v \cdot t) - \frac{1}{2} \cdot \sin m_{\mu} \cdot (x + v \cdot t).$$

Es ergibt sich nämlich:

$$\left. \begin{aligned} e &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \\ i &= -e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad 55$$

wo das Funktionszeichen F eine Abkürzung für:

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1 + \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \sin m_{\mu} \cdot 1 - \cos m_{\mu} \cdot 1}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_{\mu} \cdot 1 - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_{\mu} \cdot 1 - \frac{K}{C} \cdot m_{\mu} \cdot 1 \cdot \cos 2 m_{\mu} \cdot 1} \cdot \sin m_{\mu} \cdot \xi. \quad 55a)$$

ξ bedeutet entweder das Argument $x - v \cdot t$ oder das Argument $x + v \cdot t$.

Spannung und Strom lassen sich somit durch zwei mit der Geschwindigkeit $v = \frac{1}{\sqrt{L_1 \cdot C_1}}$ gegenläufig bewegte Wellenzüge darstellen, deren Form durch die Gl. (55a) gegeben ist. Die Spannungswellen liegen so, daß sie sich zur Zeit $t = 0$ vollständig decken, die Stromwellen ergeben sich aus ihnen durch Multiplikation mit dem Proportionalitätsfaktor $\mp \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$.

Es handelt sich jetzt nur noch um die Bestimmung der Form der Funktion $F(\xi)$. Wir werden uns auch hier wieder eines Näherungsverfahrens bedienen, das auf der Zerlegung der Funktion $F(\xi)$ in eine Summe von Teilfunktionen beruht. Dabei werden wir uns jedoch auf den praktisch wichtigen Fall beschränken, daß die Kapazität des Schutzkondensators K groß gegenüber der Kapazität C der zu schützenden Wicklung ist, was ja auch in der Regel zutreffen dürfte. In diesem Falle können, wie aus der Fig. 4 hervorgeht, die Winkel ε_μ für höhere Ordnungszahlen μ vernachlässigt werden; bei einem Verhältnis $\frac{C}{K} = 0,2$ ist dies, wie wir im 5. Abschnitt sahen, bereits von $\mu = 2$ ab zulässig. Die Lösung der Gl. (50) lautet dann:

$$m_\mu \cdot l = (\mu - 1) \cdot \pi \text{ für } \mu > 1. \quad (56)$$

Wir entnehmen dieser Gleichung das wichtige Ergebnis, daß, da die Wellenlängen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, die Reihe der Oberschwingungen der Funktion $F(\xi)$ eine harmonische ist; ausgenommen hiervon ist die Grundschwingung. Indem wir also die nichtperiodische Funktion $F(\xi)$ gemäß der Gleichung:

$$\bar{F}(\xi) = G(\xi) + H(\xi) \quad (57)$$

mit

$$G(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{\frac{1}{m_0 \cdot l} \cdot \sin m_0 \cdot l + \frac{K}{C} \cdot m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot l - \cos m_0 \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_0 \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_0 \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_0 \cdot l \cdot \cos 2 m_0 \cdot l} \cdot \sin m_0 \cdot \xi \quad (57a)$$

und

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \sin m_k \cdot l + \frac{K}{C} \cdot m_k \cdot l \cdot \sin m_k \cdot l - \cos m_k \cdot l}{\left(1 + \frac{K}{C}\right) \cdot m_k \cdot l - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_k \cdot l - \frac{K}{C} \cdot m_k \cdot l \cdot \cos 2 m_k \cdot l} \cdot \sin m_k \cdot \xi, \quad (57b)$$

wo

$$k = \mu - 1,$$

aufspalten, gelingt es uns, dieselbe auf die Summe zweier periodischer Funktionen zurückzuführen.

Die Gl. (57a) stellt eine einfache Sinusschwingung dar, zur Ermittlung der Form der Funktion $H(\xi)$ bedienen wir uns der Gl. (56). Es ergibt sich:

$$H(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} (-1)^{k+1} \cdot \left[\frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k \cdot \pi} - \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k \cdot \pi} - \frac{C}{K} \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} \right]. \quad (58)$$

In der ersten in der Klammer stehenden Summenformel erkennen wir nun die Fouriersche Reihenentwicklung für die durch die Fig. 16 dargestellte Dreieckswelle¹⁾.

¹⁾ Riemann-Weber, Die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik I, § 36, Gl. (1). (Braunschweig 1910.)

Es ist nämlich:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k \cdot \pi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{l}$$

gültig im Bereiche:

$$-1 < \frac{\xi}{l} < +1.$$

Durch zweimalige Integration folgt hieraus:

$$-\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3 \cdot \pi^3} = \frac{1}{12} \cdot \left(\left(\frac{\xi}{l} \right)^3 - \frac{\xi}{l} \right).$$

Es ist dies die letzte der in der Gl. (58) vorkommenden Summenformeln, die durch sie dargestellte Funktion zeigt die Fig. 17.

Fig. 16.

Fig. 17.

Die beiden ersten in der Klammer der Gl. (58) vorkommenden Summanden heben sich auf, es verbleibt somit:

$$H(\xi) = -\frac{C}{2 \cdot K} \cdot E \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{\sin k \cdot \pi \cdot \frac{\xi}{l}}{k^3 \cdot \pi^3}. \quad (58a)$$

10. Räumlicher und zeitlicher Verlauf des Entladevorganges. Wir wollen uns das Ergebnis der Betrachtungen des vorigen Abschnittes an einem Beispiel vor Augen führen. Da der Verlauf des Entladevorganges nur durch die Größe des Parameters $\frac{C}{K}$ bestimmt wird, brauchen wir nur über diesen bestimmte Annahmen zu machen. Wir werden den nun folgenden Untersuchungen ein Verhältnis

$$\frac{C}{K} = 0,2$$

zugrunde legen.

In diesem Falle besitzt die Grundwelle $G(\xi)$ eine Amplitude von

$$G_0 = 0,597 \cdot E,$$

ihre Wellenlänge beträgt

$$\frac{2 \cdot \pi}{m_0} = 14,5 \cdot l.$$

Die Funktion $H(\xi)$ schwankt zwischen

$$H(\xi)_{\max} = \mp 0,0016 \cdot E,$$

man sieht also, daß sie die Form der Grundwelle nicht nennenswert zu stören vermag wie dies denn auch die Fig. 18 erkennen läßt. Man kann sich leicht davon überzeugen, daß die Funktion

$$\bar{F}(\xi) = 0,597 \cdot E \cdot \sin 0,433 \cdot \frac{x}{l} + \frac{1}{120} \cdot E \cdot \left(\left(\frac{x}{l} \right)^3 - \frac{x}{l} \right)$$

im Intervalle

$$0 \leq x \leq$$

von dem Betrage

$$\frac{1}{2} \cdot E \cdot \frac{x}{l},$$

welchen die Anfangsbedingung erfordert, nirgends um mehr als ca. $\frac{1}{1000}$ abweicht, die erreichte Genauigkeit ist also mehr als genügend.

Wie nun mit Hilfe der Funktion $\bar{F}(\xi)$ ein Bild vom räumlichen Verlauf der auf dem Entladekreis A B C bzw. auf der Wicklung sich abspielenden Ausgleichsvorgänge ent-

worfen werden kann, haben wir bereits früher gesehen. Fig. 19 zeigt die ausgeführte Konstruktion, die zeitliche Dämpfung wurde vernachlässigt.

Die Entladung des Kondensators und der an ihn angeschlossenen Wicklung verläuft etwa folgendermaßen: Die auf der Wicklung liegende Ladung setzt sich nach dem Mittelpunkt derselben $x = 0$ hin in Bewegung und erzeugt, indem sie sich ausgleicht, einen ständig wachsenden, gleichmäßig über die Wicklung verteilten Strom. Die ab-

Fig. 18.

fließenden Ladungsmengen werden vom Kondensator aus, der sich hierdurch allmählich entlädt, ständig ersetzt. Der ganze Entladungsvorgang verläuft stetig ohne Erzeugung von un stetigen Spannungs- oder Stromsprüngen.

In dem Maße, in welchem sich der Kondensator entlädt, sinkt die auf der Wicklung herrschende Spannung, der in derselben fließende Strom steigt ständig, d. h. die im Kondensator und in der Wicklung aufgespeicherte elektrische Energie verwandelt sich allmählich in magnetische Energie. Es kommt ein Zeitpunkt, in welchem die Wicklung und der Kondensator spannungslos geworden sind, der Strom hat in diesem Augenblicke sein Maximum erreicht; es hat sich die ganze ursprüngliche elektrische Energie in magnetische Energie umgesetzt. Nun beginnt sich der Kondensator und damit die Wicklung wieder aufzuladen; seine Ladung hat diesmal jedoch entgegengesetztes Vorzeichen, der Strom nimmt wieder ab. Die Rückwandlung in elektrische Energie setzt sich so lange fort, bis der Strom Null geworden und, abgesehen

Fig. 19.

vom Vorzeichen, wieder die ursprüngliche Spannungsverteilung vorhanden ist. Nun beginnt das geschilderte Spiel, jedoch diesmal mit entgegengesetztem Vorzeichen, wieder von neuem. Die Verlustdämpfung bewirkt eine allmähliche Abnahme von Strom und Spannung, und das Spiel der Energien, das sich sonst in alle Ewigkeit fortsetzen würde, kommt so bald zu einem Stillstand.

Es ist in diesem Zusammenhange nützlich, den Verlauf des eben geschilderten Ausgleichsvorganges in den beiden Grenzfällen

$$\frac{C}{K} = 0 \text{ und } \frac{C}{K} = \infty$$

zu betrachten. Im ersteren Falle, also bei unendlich großer Kapazität des Kondensators, fällt die in der Fig. 4 eingezeichnete Hyperbel mit der Abszissenachse zusammen, die Bestimmungsgleichung für die Wellenlängen $\frac{2\pi}{m_\mu}$ geht über in

$$m_\mu \cdot l = (\mu - 1) \cdot \pi \quad \text{für } \mu = 1, 2, 3, \dots$$

und die Gl. (55a) nähert sich folgendem Grenzwert:

$$F(\xi) = \frac{1}{4} \cdot E \cdot \frac{\xi}{1}, \quad (59)$$

welchen die Fig. 20 veranschaulicht.

Die Funktion $F(\xi)$ geht somit in eine Gerade über. Eine Verfolgung des auf der Wicklung sich abspielenden Ausgleichsvorganges würde folgendes Bild ergeben. Die auf der Wicklung ruhende Ladung setzt sich wieder nach dem Punkte $x = 0$ hin in Bewegung, dabei einen ständig wachsenden Strom erzeugend. Dieser Vorgang vermag

Fig. 20.

Fig. 21.

indes die ursprüngliche Spannungsverteilung nicht zu stören, denn wegen der unendlich großen Ergiebigkeit des Kondensators ändert dieser seine Spannung nicht, so groß auch der demselben entnommene Strom werden mag.

Im Falle $\frac{C}{K} = \infty$, d. h. also bei fehlendem Kondensator, ergibt sich folgendes: Die Wellenlängen bestimmen sich aus der Gleichung

$$m_\mu \cdot l = (2 \cdot \mu - 1) \cdot \frac{\pi}{2}$$

und damit geht die Gleichung für die Funktion $F(\xi)$ über in:

$$F(\xi) = \frac{1}{2} \cdot E \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (-1)^{\mu+1} \cdot \frac{\sin(2 \cdot \mu - 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{l}}{(2 \cdot \mu - 1)^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}. \quad (60)$$

Die durch diese Reihenentwicklung dargestellte Funktion zeigt die Fig. 21, sie besteht, wie die durch die Fig. 13 gezeigte Funktion, aus lauter geraden, aber im Gegensatz zu dieser stetig zusammenhängenden Linien. Den Verlauf des Entladungsvorganges bei fehlendem Kondensatorschutz zeigt die Fig. 22. Hier ist besonders bemerkenswert,

daß, da der Nachschub vom Kondensator her wegfällt, die Entladung der Leitung sehr schnell vor sich geht. Die Periodizität des Ausgleichsvorganges ist sehr schön zu erkennen.

Es verleiht uns einen guten Überblick über die auftretenden Erscheinungen, wenn wir uns noch den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung ableiten. Wir werden

Fig 22.

die zeitliche Dämpfung vernachlässigen, bezüglich Berücksichtigung derselben gilt das im 6. Abschnitt Gesagte.

a) Im Punkte $x = 0$ gilt nach Gl. (55):

$$e_{x=0} = F(-v \cdot t) + F(+v \cdot t) = 0.$$

Dies wird nur dadurch ermöglicht, daß die Funktion $F(\xi)$ nach Gl. (55a) eine ungerade Funktion ist, d. h. es ist stets:

$$F(\xi) = -F(-\xi).$$

Daraus folgt aus der zweiten der Gl. (55) jedoch weiter:

$$i_{x=0} = 2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot F(v \cdot t). \quad (61)$$

Das heißt also, die Funktion $F(\xi)$ ergibt mit dem Faktor $2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ multipliziert den zeitlichen Verlauf des Stromes im Punkte $x = 0$.

b) Im Punkte $x = 1$ ist:

$$\left. \begin{aligned} e &= F(1 - v \cdot t) + F(1 + v \cdot t) \\ i &= \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [-F(1 - v \cdot t) + F(1 + v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

Wir kommen hier wieder am schnellsten zum Ziele, wenn wir die Funktion $F(\xi)$ in ihre Bestandteile $G(\xi)$ und $H(\xi)$ aufspalten, d. h. in die Grundschwingung und in eine Funktion, welche durch die Zusammenwirkung sämtlicher Oberschwingungen entsteht. Ein Blick auf die Fig. 14 lehrt uns, daß die Funktion $H(\xi)$ bezüglich des Punktes $x = 1$ eine ungerade Funktion ist, so daß stets die Beziehung gilt:

$$H(1 + \xi) = -H(1 - \xi).$$

Damit folgt aus Gl. (62):

$$e_{x=1} = G(1 - v \cdot t) + G(1 + v \cdot t)$$

$$i_{x=1} = \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot [-G(1 - v \cdot t) + G(1 + v \cdot t) + 2 \cdot H(1 + v \cdot t)]$$

oder:
$$e_{x=1} = 2 \cdot G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t$$

$$i_{x=1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}} \cdot G_0 \cdot \cos m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t + 2 \cdot H(1 + v \cdot t). \quad (63)$$

Darin bedeutet G_0 die aus Gl. (57a) zu bestimmende Amplitude der Grundwelle.

Wir kommen somit zu dem interessanten Ergebnis, daß die Spannungskurve am Kondensator eine reine Sinusschwingung ist. Die Kurve des aus dem Kondensator fließenden Stromes dagegen enthält die Welle $H(\xi)$.

Bei fehlendem Kondensator ergibt die durch die Fig. 21 dargestellte Funktion, mit dem Proportionalitätsfaktor $2 \cdot \sqrt{\frac{C_1}{L_1}}$ multipliziert, den zeitlichen Verlauf des Stromes im Punkte $x = 0$, dagegen um den Betrag $v \cdot t = -1$ verschoben, den Spannungsverlauf am offenen Wicklungsende. Der zeitliche Verlauf von Strom und Spannung bei unendlich großer Kapazität K braucht wohl nicht erst erörtert zu werden.

11. Das Verhalten des Schutzkondensators bei der plötzlichen Unterbrechung. Die in diesem Abschnitt zu behandelnde Aufgabe schließt sich in mathematischer Beziehung eng an die des vorigen Abschnittes an, sie unterscheidet sich von dieser nur durch die veränderten Anfangsbedingungen. Wir haben nämlich:

$$\left. \begin{aligned} e &= 0 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 & \text{und } t = 0 \\ i &= J & \text{für } 0 < x < 1 & \text{und } t = 0 \\ i &= 0 & \text{für } x = 1 & \text{und } t = 0 \end{aligned} \right\} \quad (64)$$

Die Grenzbedingungen haben sich nicht geändert, so daß die Gl. (48), (49) und (50) des vorigen Abschnittes auch jetzt noch zu Recht bestehen. Wir schreiben diese Gleichungen nochmals an:

$$V_\mu = \cos m_\mu \cdot x, \quad (65a)$$

$$V'_\mu = -m_\mu \cdot \sin m_\mu \cdot x, \quad (65b)$$

$$V_\mu(l) = -\frac{K}{C_1} \cdot V'_\mu(l). \quad (65c)$$

$$\operatorname{tg} m_\mu \cdot l = \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{C}{K}. \quad (65d)$$

Die allgemeinen Gleichungen für Spannung und Strom lauten:

$$e = e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t + B_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V'_\mu, \quad (66a)$$

$$i = e^{-a_1 \cdot t} \cdot C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_\mu \cdot n_\mu \cdot \sin n_\mu \cdot t - A_\mu \cdot n_\mu \cdot \cos n_\mu \cdot t) \cdot V_\mu. \quad (66b)$$

Setzt man in diese Gleichungen die Anfangsbedingungen ein, so folgt sofort:

$$B_\mu = 0. \quad (67a)$$

In Gl. (24a) wird das bestimmte Integral

$$(m_\mu^2 - m_\nu^2) \cdot \int_0^1 V_\mu \cdot V_\nu \cdot dx = 0,$$

in Gl. (25d) verschwinden somit die Konstanten a_1 und a_2 , und es wird:

$$A_\mu = -\frac{J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\int_0^1 V_\mu \cdot dx}{\int_0^1 V_\mu^2 \cdot dx}. \quad (67b)$$

Nun ist:

$$V_\mu = \cos m_\mu \cdot x,$$

und damit nehmen die Integrale der eben angeschriebenen Gleichung folgenden Wert an:

$$\int_0^1 V_\mu \cdot dx = \int_0^1 \cos m_\mu \cdot x \cdot dx = \frac{1}{m_\mu} \cdot \sin m_\mu \cdot 1.$$

$$\int_0^1 V_\mu^2 \cdot dx = \int_0^1 \cos^2 m_\mu \cdot x \cdot dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{4 \cdot m_\mu} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot 1.$$

Die Konstante A_μ ergibt sich somit zu:

$$A_\mu = - \frac{2 \cdot J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\sin m_\mu \cdot 1}{m_\mu \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot 1},$$

so daß die Gl. (66a) und (66b) für Spannung und Strom folgende Gestalt annehmen:

$$e = e^{-a_1 \cdot t} \cdot 2 \cdot J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot 1}{m_\mu \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot 1} \cdot \sin m_\mu \cdot x \cdot \sin n_\mu \cdot t \quad (68a)$$

$$i = e^{-a_1 \cdot t} \cdot 2 \cdot J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot 1}{m_\mu \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot 1} \cdot \cos m_\mu \cdot x \cdot \cos n_\mu \cdot t. \quad (68b)$$

Diese Gleichungen lassen sich wieder umformen in:

$$\left. \begin{aligned} e &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \\ i &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

mit

$$F(\xi) = J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\sin m_\mu \cdot 1}{m_\mu \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_\mu \cdot 1} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi. \quad (69a)$$

Die eben angeschriebene Gl. (69a) ist identisch mit der Gl. (28a) des 4. Abschnitts, so daß alle dort an jene Gleichung angeknüpften Betrachtungen ohne weiteres auf unser jetziges Beispiel übertragen werden können. Die auf unserer Wicklung sich abspielenden Vorgänge sind den dort beschriebenen ganz ähnlich, nur haben Strom und Spannung ihre Rolle vertauscht, und ferner ist der von der Wicklung angestrebte Endzustand etwas anders. Wir hatten nämlich im 4. Abschnitt:

$$\begin{aligned} e_{12} &= 2 \cdot E \\ i_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Hingegen strebt die Wicklung bei unserm jetzigen Beispiele folgendem Endzustande zu:

$$\begin{aligned} e_{12} &= 0 \\ i_{12} &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen also schon, die Fig. 10 und 11 zeigen uns, sofern wir das Vorzeichen umkehren und den Maßstab passend verändern, direkt den Verlauf der Spannung, der schließlich ja auch am meisten interessiert. An Stelle des Parameters $\frac{L}{\lambda}$ tritt hier das Verhältnis

der gesamten Kapazität der Wicklung zu jener des Schutzkondensators $\frac{C}{K}$; Fig. 10 bezieht sich auf ein Verhältnis $\frac{C}{K} = 5$, Fig. 11 auf ein solches $\frac{C}{K} = \frac{1}{5}$.

Wir können nun etwa folgendes Bild von den zur Zeit $t = 0$ einsetzenden Ausgleichsvorgängen entwerfen: Es ist klar, daß jede Strombahn dauernd geschlossen sein muß; unterbrechen wir also im Punkte $x = l$ die Leitung, so schließt sich der Strom über den Kondensator; der ehemalige Leitungsstrom erscheint als Verschiebungsstrom im Dielektrikum. Der Ladestrom J bewirkt naturgemäß ein schnelles Steigen der Spannung an den Klemmen des Kondensators, und dieser sendet nun seinerseits einen wachsenden Strom in die Wicklung, der im Vergleiche zum Kurzschlußstrom J entgegengesetztes Vorzeichen hat und diesen somit schwächt. Die Ladung des Kondensators ist beendet, sobald der in die Wicklung zurückfließende Strom die Stärke $-J$ erreicht hat; von diesem Augenblicke an wird die Wicklung, beim Punkte $x = l$ beginnend, stromlos und steht unter einer Spannung $J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ Volt. Die eben angestellten Betrachtungen gelten natürlich nur so lange, als nicht im Punkte $x = 0$ reflektierte Wellen wieder den Kondensator erreichen und neue Störungen hervorrufen, bevor dieser die Spannung $J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ erreicht hat. Der letztere Fall wird eintreten, wenn die Kapazität des Kondensators groß im Vergleich zur Kapazität der Wicklung ist, wie dies bei der Fig. 11 vorausgesetzt wurde.

In diesem Falle wird die angeführte Spannung von $J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}$ Volt auch nicht annähernd erreicht; denn die im Punkte $x = 0$ unter Umkehrung des Vorzeichens reflektierte Spannungswelle bewirkt ein schnelles Sinken der Spannung des Kondensators. Der weitere Verlauf des Ausgleichsvorganges wird durch die Reflexionserscheinungen an den Wicklungsenden charakterisiert und kann aus den Figuren ohne weiteres herausgelesen werden.

Wir gewinnen einen guten Überblick über die Höhe der auftretenden Spannungen durch Betrachtung der Gleichungen für den zeitlichen Verlauf derselben. Daß die Unterbrechungsüberspannung proportional mit der Stärke des plötzlich unterbrochenen Stroms wächst, können wir jetzt schon sagen.

Die im 6. Abschnitt gefundenen Gleichungen für den zeitlichen Verlauf von Strom und Spannung gelten, sofern wir in ihnen Strom und Spannung vertauschen, im Prinzip auch hier. Wir haben somit:

$$e_{x=0} = 0 \quad 70a)$$

$$i_{x=0} = 2 \cdot F(v \cdot t) \quad 70b)$$

$$e_{x=1} = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot \left[G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{C}{K} \right)^2 \cdot H_2(l + v \cdot t) \right] \quad 70c)$$

$$i_{x=1} = G_0 \cdot \cos m_0 \cdot l \cdot \cos m_0 \cdot v \cdot t + \frac{1}{3} \cdot \frac{C}{K} \cdot \left(H_1(l + v \cdot t) + \frac{t}{K \cdot Z} \cdot H_2(l + v \cdot t) \right) \quad 70d)$$

In den Gleichungen des 4. Abschnitts für die Funktionen $F(\xi)$, $G(\xi)$, $H_1(\xi)$ und $H_2(\xi)$ ist natürlich $-2 \cdot E$ durch J zu ersetzen.

Uns interessiert nun vor allem die Gl. (70c), denn die Fig. 10 und 11 ließen uns erkennen, daß die höchste Spannung stets im Punkte $x = l$ auftritt.

Im Falle das Verhältnis $\frac{C}{K}$ klein gegen 1 ist, können wir die Funktion $H_2(\xi)$ vernachlässigen, so daß die Gl. (70c) sich folgendermaßen vereinfacht:

$$e_{x=1} = 2 \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot G_0 \cdot \sin m_0 \cdot l \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t.$$

Ferner ergibt sich in diesem Falle, da $m_0 \cdot l$ ein kleiner Winkel ist,

$$\sin m_0 \cdot l = m_0 \cdot \quad \operatorname{tg} m_0 \cdot l = \sqrt{\frac{C}{K}}$$

und

$$G_0 = \frac{1}{2} \cdot J.$$

Wir können also schreiben:

$$e_{x=1} = J \cdot \sqrt{\frac{L}{K}} \cdot \sin m_0 \cdot v \cdot t. \quad (71)$$

Das heißt, die in unserer Wicklung auftretende Spannung wird um so größer, je größer das Verhältnis der gesamten Selbstinduktion der Wicklung zur Kapazität des Kondensators ist. Dies ist sehr einleuchtend, und wir hätten übrigens die Beziehung:

$$e_{x=1 \max} = J \cdot \sqrt{\frac{L}{K}} \quad (71a)$$

auch direkt aus den Energiegleichungen ableiten können.

Unter dem Einflusse der Verlustdämpfung verringert sich diese Spannung natürlich etwas. Hierüber möge der Leser den Anfang des 6. Abschnittes nachlesen.

Die in der Wicklung auftretende Spannung nimmt zu mit abnehmender Kapazität des Kondensators. Im Grenzfalle, $\frac{C}{K}$ groß gegen 1, ergibt sich:

$$e_{x=1 \max} = J \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}}, \quad (72)$$

eine Beziehung, zu welcher man leicht bei Beachtung der Gl. (35) des 5. Abschnittes gelangt. Der zeitliche Verlauf der Spannung ist in diesem Falle annähernd rechtecksförmig, genau rechtecksförmig mit der Periode $\tau = \frac{4 \cdot l}{v}$ im Extremfalle $K = 0^1$.

12. Der Schutzkondensator beim Abschalten der induktiv belasteten Leitung. Die Behandlung des vorliegenden Problems dürfte an dieser Stelle noch einiges Interesse bieten, einmal, weil sie Gelegenheit bietet, den Gang der mathematischen Behandlung bei etwas weniger einfachen Grenzbedingungen, als wir sie bis jetzt voraussetzten, zu zeigen, und dann auch, weil sie interessante Ergebnisse über den Schutzwert des Kondensators zeitigen wird.

Fig. 23.

Wir werden uns auch hier wieder bemühen, das Problem möglichst zu vereinfachen; diese Vereinfachungen sollen indes nur die rein analytische Seite betreffen, ohne die Allgemeinheit der Lösung zu beeinträchtigen.

Die Leitung sei an ihrem Ende $x = 0$ rein induktiv belastet, so daß wir uns diese Belastung durch eine Drosselspule, deren Selbstinduktionskoeffizienten wir λ nennen wollen, ersetzt denken können. Die „plötzliche“ Unterbrechung des Stromes J erfolge zur Zeit seines maximalen Momentanwertes ($t = 0$), die Leitung sei gerade spannungslos. Der Anfangszustand unserer Leitung ist also derselbe wie der des vorigen Abschnitts, das Schema, auf welches wir uns zu beziehen haben, zeigt die Fig. 23. Die Grenzbedingungen unsers Problems lauten:

$$\left. \begin{aligned} e &= -\lambda \cdot \frac{\partial i}{\partial t} & \text{für } x = 0 \\ i &= K \cdot \frac{\partial e}{\partial t} & \text{für } x = l \end{aligned} \right\} \quad (73)$$

¹⁾ Vgl. hierüber auch: K. W. Wagner, Leipzig 1908, Kapitel 7.

Durch Einsetzen der allgemeinen Gleichungen für Spannung und Strom:

$$\left. \begin{aligned} e &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (A_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t + B_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V'_{\mu} \\ i &= e^{-a_1 \cdot t} \cdot C_1 \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} (B_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \sin n_{\mu} \cdot t - A_{\mu} \cdot n_{\mu} \cdot \cos n_{\mu} \cdot t) \cdot V_{\mu} \end{aligned} \right\} \quad 74)$$

folgt hieraus:

$$V'_{\mu}(0) = -m_{\mu}^2 \cdot \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_{\mu}(0), \quad 75a)$$

$$V'_{\mu}(l) = -\frac{C_1}{K} \cdot V_{\mu}(l). \quad 75b)$$

Nun ist

$$V_{\mu} = a_{\mu} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x + b_{\mu} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x,$$

oder, wenn wir a_{μ} , das ja noch vollkommen willkürlich ist, gleich 1 setzen,

$$V_{\mu} = \sin m_{\mu} \cdot x + \frac{b_{\mu}}{a_{\mu}} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x.$$

Durch Einsetzen in Gl. (75a) ergibt sich:

$$\frac{b_{\mu}}{a_{\mu}} = -\frac{1}{m_{\mu}} \cdot \frac{L_1}{\lambda}$$

und damit wird:

$$\left. \begin{aligned} V_{\mu} &= \sin m_{\mu} \cdot x - \frac{1}{m_{\mu}} \cdot \frac{L_1}{\lambda} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x, \\ V'_{\mu} &= m_{\mu} \cdot \cos m_{\mu} \cdot x + \frac{L_1}{\lambda} \cdot \sin m_{\mu} \cdot x. \end{aligned} \right\} \quad 76)$$

Ferner ergibt sich aus Gl. (75b) die transzendente Bestimmungsgleichung für die Wellenlängen:

$$\operatorname{tg} m_{\mu} \cdot l = -m_{\mu} \cdot l \cdot \frac{1}{\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}} + \frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{1}{\frac{\lambda}{L} + \frac{K}{C}}. \quad 77)$$

Auf die Diskussion dieser Gleichung werden wir später zurückkommen.

Aus Gl. (24a) folgt nach Einsetzen der Grenzbedingungen (75):

$$(m_{\mu}^2 - m_{\nu}^2) \cdot \int_0^l V_{\mu} \cdot V_{\nu} \cdot dx = - (m_{\mu}^2 - m_{\nu}^2) \cdot \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_{\mu}(0) \cdot V_{\nu}(0).$$

Für die Konstanten A_{μ} folgt somit:

$$A_{\mu} = -\frac{J}{C_1 \cdot n_{\mu}} \cdot \frac{\int_0^l V_{\mu} \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_{\mu}(0)}{\int_0^l V_{\mu}^2 \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_{\mu}^2(0)}. \quad 78a)$$

Ferner wird:

$$B_{\mu} = 0. \quad 78b)$$

Nun ist:

$$V_\mu(0) = -\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}$$

$$V'_\mu(0) = m_\mu$$

$$\int_0^l V_\mu \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu(0) = -\frac{1}{m_\mu} \cdot \left[\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l \right]$$

$$\int_0^l V_\mu^2 \cdot dx + \frac{\lambda}{L_1} \cdot V_\mu^2(0) = \frac{1}{2 \cdot m_\mu} \cdot \left[m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 m_\mu \cdot l \right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l \cdot \left(1 + \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \right)^2 \right) \right]$$

und damit wird:

$$A_\mu = \frac{2 \cdot J}{C_1 \cdot n_\mu} \cdot \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 m_\mu \cdot l \right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \right)^2 \right)}$$

Durch Einsetzen dieses Wertes in die Gl. (74) erhält man leicht nach einigen trigonometrischen Umformungen:

$$\left. \begin{aligned} e &= e^{-\alpha_1 t} \cdot \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \cdot [F(x - v \cdot t) - F(x + v \cdot t)] \\ i &= e^{-\alpha_1 t} \cdot [F(x - v \cdot t) + F(x + v \cdot t)] \end{aligned} \right\} \quad 79)$$

mit:

$$F(\xi) = J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 m_\mu \cdot l \right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \right)^2 \right)} \cdot \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi \pm \sin m_\mu \cdot \xi \right). \quad 79a)$$

Das —-Zeichen in der letzten Klammer gilt für den Stern.

Bevor wir nun zur Auswertung dieses Ausdruckes schreiten können, sind wir gezwungen, etwas näher auf die Bestimmungsgleichung (77) für die Wellenlängen einzugehen. Man erkennt, daß das zweite Glied der rechten Seite dieser Gleichung mit wachsender Ordnungszahl μ sehr bald auf einen gegenüber dem ersten Gliede unwesentlichen Betrag herabsinkt, besonders dann, wenn es sich um den praktisch weitaus am wichtigsten Fall handelt, daß die Selbstinduktion λ groß gegenüber der gesamten Selbstinduktion der abgeschalteten Leitung, und die Kapazität des Schutzkondensators K nicht wesentlich kleiner als die Kapazität der Leitung ist. Die Fig. 24 zeigt dies sehr deutlich, dieselbe wurde unter Voraussetzung folgender Verhältnisse gezeichnet:

$$\frac{L}{\lambda} = 0,1$$

$$\frac{C}{K} = 1.$$

Dieselbe Figur läßt auch erkennen, daß in den Punkten $P_1, P_2, P_3 \dots$ die Gl. (77) erfüllt ist, und daß die Lösung dieser Gleichung wie folgt angeschrieben werden kann:

$$m_\mu \cdot l = (2 \cdot \mu - 3) \cdot \frac{\pi}{2} + \varepsilon_\mu \quad \text{für } \mu > 1, \quad (80)$$

wo ε_μ stets kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und mit wachsender Ordnungszahl μ sich der Zahl Null unbegrenzt nähert. Die eben angeschriebene Gleichung gilt nicht für $\mu = 1$. Wir kommen somit zu dem Ergebnis, daß die Gl. (77) eine unendliche Anzahl von positiven Wurzeln besitzt und daß diese sich mit wachsender Ordnungszahl μ ganzzahligen Vielfachen der

Fig. 24.

Zahl π nähern; die Reihe der Einzelschwingungen, aus welchen sich die Funktion $F(\xi)$ zusammensetzt, kann somit von irgendeiner Ordnungszahl $\mu = k$ ab mit genügender Annäherung als harmonisch betrachtet werden. Die Zahl liegt um so niedriger, je größer der Parameter $\frac{1}{\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}}$ unseres Schwingungskreises ist.

Wir werden den nun folgenden Betrachtungen die Annahme voraussetzen, daß die Werte von $\frac{L}{\lambda}$ und $\frac{C}{K}$ die eben angeschriebenen Zahlen nicht wesentlich überschreiten. Wir können dann, wie aus Fig. 24 hervorgeht, von $\mu = 3$ ab den Winkel ε_μ gegenüber $\frac{\pi}{2}$ als klein betrachten, ohne hierdurch einen großen Fehler zu begehen; somit können wir anschreiben:

$$m_k \cdot l = (2k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \quad \text{für } k = 1, 2, 3, \dots, \quad (80a)$$

wo

$$k = \mu - 2.$$

Zur Untersuchung der Funktion $F(\xi)$ ist es nun vorteilhaft, dieselbe in eine Funktion:

$$G(\xi) = J \cdot \sum_{\mu=1}^{\mu=2} \frac{\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_\mu \cdot l + \cos m_\mu \cdot l}{m_\mu \cdot l + \frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 m_\mu \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_\mu \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)} \cdot \left(\frac{1}{m_\mu \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_\mu \cdot \xi \pm \sin m_\mu \cdot \xi\right), \quad (81a)$$

welche die Grundwelle und die nächstfolgende Oberwelle, und in eine Funktion:

$$H(\xi) = J \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_k \cdot l + \cos m_k \cdot l}{m_k \cdot l + \frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 m_k \cdot l\right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 m_k \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda}\right)^2\right)} \cdot \left(\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_k \cdot \xi \pm \sin m_k \cdot \xi\right), \quad 81b)$$

welche die Gesamtheit der weiteren Oberwellen enthält, zu zerlegen. Die Funktion $G(\xi)$ kann, nachdem mittels Gl. (77) die Wellenlängen $\frac{m_1}{2 \cdot \pi}$ und $\frac{m_2}{2 \cdot \pi}$ bestimmt sind, leicht berechnet werden. Für die Funktion $H(\xi)$ werden wir einen Näherungsausdruck entwickeln und dabei von der Gl. (80a) Gebrauch machen.

Wir hatten:

$$m_k \cdot l = (2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Dann wird:

$$\sin m_k \cdot l = (-1)^k$$

$$\sin 2 \cdot m_k \cdot l = 0$$

$$\cos 2 \cdot m_k \cdot l = -1.$$

Zur Berechnung von $\cos m_k \cdot l$ machen wir von folgender Beziehung Gebrauch:

$$\cos m_k \cdot l = (-1)^{k+1} \cdot \sin \varepsilon_k.$$

Nun ist:

$$\sin \varepsilon_k = \operatorname{tg} \varepsilon_k = \frac{-1}{\operatorname{tg} m_k \cdot l},$$

da ε_k doch ein kleiner Winkel ist.

Ferner ergibt sich aus Gl. (77) bei Vernachlässigung des zweiten Gliedes der rechten Seite:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} m_k \cdot l} = -\frac{1}{m_k \cdot l} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}\right).$$

Dies ergibt:

$$\cos m_k \cdot l = \frac{(-1)^{k+1}}{(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{L}{\lambda} + \frac{C}{K}\right).$$

Im Nenner von Gl. (81b) können sämtliche außer $m_k \cdot l$ noch verbleibenden Glieder neben diesem vernachlässigt werden. Wir gewinnen dann folgenden Ausdruck für die Funktion $H(\xi)$:

$$H(\xi) = -\frac{4}{\pi^2} \cdot J \cdot \frac{C}{K} \cdot \sum_{k=1}^{k=\infty} \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^3} \cdot \cos(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1} \pm \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^2} \cdot \sin(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1} \right]. \quad 81c)$$

Nun wissen wir aus dem 10. Abschnitte, daß:

$$\frac{4}{\pi^2} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^2} \cdot \sin(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\xi}{1},$$

gültig im Intervall:

$$-1 < \frac{\xi}{1} < +1.$$

Es ist dies die durch Fig. 21 dargestellte Funktion.

Durch Integration folgt hieraus

$$\frac{8}{\pi^3} \cdot \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{(-1)^k}{(2 \cdot k + 1)^3} \cdot \cos(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1} = -\frac{1}{4} \cdot \left(\left(\frac{\xi}{1} \right)^2 - 1 \right),$$

ebenfalls gültig im Bereiche:

$$-1 < \frac{\xi}{1} < +1.$$

Fig. 25.

Die durch diese Reihenentwicklung dargestellte Funktion zeigt die Fig. 25.

Wenn wir nun die eben erhaltenen Summenformeln in die Gl. (81c) einführen, so müssen wir die Grundwellen ($k = 0$), da Gl. (81c) diese ja nicht enthält, wieder abziehen. Wir müssen also schreiben:

$$H(\xi) = -\frac{4}{\pi^2} \cdot J \cdot \frac{C}{K} \cdot \left\{ \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \cdot \left[\frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \frac{\cos(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1}}{(2 \cdot k + 1)^3} \pm \frac{\sin(2 \cdot k + 1) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1}}{(2 \cdot k + 1)^2} \right] - \frac{2}{\pi} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1} \mp \sin \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\xi}{1} \right\} \quad (81d)$$

Diese beiden Wellen mit der Ordnungszahl $k = 0$, sowie die beiden in der Funktion $G(\xi)$ enthaltenen Oberschwingungen ($\mu = 2$) ergeben zusammen eine Funktion, welche eine ähnliche Rolle spielt wie die Funktion $D(\xi)$ des 4. Abschnittes.

13. Der Verlauf des Ausgleichsvorganges. Wir wollen nun noch kurz die auf der abgeschalteten Leitung sich abspielenden Vorgänge betrachten, wobei wir das schon einmal gewählte Beispiel beibehalten werden, nämlich:

$$\frac{L}{\lambda} = 0,1,$$

$$\frac{C}{K} = 1.$$

Die Fig. 26 und 27 zeigen, daß die Funktion

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_{\mu} \cdot l + \cos m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 \cdot m_{\mu} \cdot l \right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_{\mu} \cdot l \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \right)^2 \right\}} \cdot \left(\frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_{\mu} \cdot \xi + \sin m_{\mu} \cdot \xi \right)$$

das genaue Spiegelbild der Funktion

$$\sum_{\mu=1}^{\mu=\infty} \frac{\frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \sin m_{\mu} \cdot l + \cos m_{\mu} \cdot l}{m_{\mu} \cdot l + \frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \left(1 + \frac{L}{\lambda} + \cos 2 \cdot m_{\mu} \cdot l \right) - \frac{1}{2} \cdot \sin 2 \cdot m_{\mu} \cdot l \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \right)^2 \right)} \cdot \left(\frac{1}{m_{\mu} \cdot l} \cdot \frac{L}{\lambda} \cdot \cos m_{\mu} \cdot \xi - \sin m_{\mu} \cdot \xi \right)$$

ist. Der Grund hierfür ist leicht einzusehen, denn es ist ja die bezüglich des Punktes $\frac{x}{l} = 0$ ungerade Sinusfunktion, welche in beiden Fällen das Vorzeichen wechselt.

Mit Hilfe der Kurven Fig. 26 und 27 kann nun der räumliche Verlauf des Ausgleichsvorganges in genau derselben Weise konstruiert werden, wie wir es bei den früheren Beispielen schon gesehen haben; die Fig. 28 zeigt das Ergebnis.

Fig. 26.

Fig. 27.

Der hauptsächlichste Unterschied im Verhalten der induktiv belasteten gegenüber der einfach kurzgeschlossenen Leitung liegt nun darin, daß die im Punkte $x = 0$ ankommenden Spannungswellen nicht mehr mit umgekehrtem, sondern mit gleich bleibendem Vorzeichen reflektiert werden. Der physikalische Grund hierfür ist folgender: Die Drosselspule λ sucht vermöge der in ihr aufgespeicherten magnetischen Energie den Kurzschlußstrom J aufrechtzuerhalten. Die vom Unterbrechungspunkte aus auf sie zueilenden Stromwellen, welche entgegengesetztes Vorzeichen wie der Kurzschlußstrom J besitzen, werden aus diesem Grunde von ihr unter Umkehrung des Vorzeichens reflektiert, so daß, da ankommende und reflektierte Wellen stets gleiche Höhe besitzen, der Strom J erhalten bleibt.

(Dies gilt streng genommen allerdings nur bei unendlich großer Selbstinduktion λ , in Wirklichkeit nimmt der Strom im Punkte $x = 0$ in dem Maße ab, in welchem die Drosselspule die in ihr aufgespeicherte magnetische Energie in Form elektrischer Energie an die Leitung abgibt.) Den so reflek-

Fig. 28.

tierten positiven Stromwellen entsprechen natürlich auch Spannungswellen mit gleichem Vorzeichen, welche sich zu den ankommenden Spannungswellen addieren.

Wäre im Punkte $x = l$ kein Kondensator vorhanden, so würden die von der Drosselspule ausgehenden Spannungswellen dort ebenfalls mit gleichem Vorzeichen reflektiert werden, und die Spannung auf unserer Leitung würde sich weiterhin erhöhen¹⁾. Hier zeigt nun Fig. 28 die günstige Wirkung des Kondensatorschutzes; der Kondensator wirft aufprallende Spannungswellen unter Umkehrung des Vorzeichens zurück und bewirkt so jedesmal ein ganz erhebliches Heruntergehen der Spannung.

Die Schutzwirkung des Kondensators erhellt auch aus folgender Überlegung: Der ganze, auf unserer Leitung sich abspielende Ausgleichsvorgang beruht darauf, daß die in der Drosselspule aufgespeicherte magnetische Energie zu gewissen Zeiten in Form elektrischer Energie auf der Leitung aufgespeichert ist; die auf unserer Leitung auftretende höchste Spannung wird also um so größer werden, je größer die Selbstinduktion λ der Drosselspule und je kleiner die Kapazität C der Leitung ist. Indem wir also die Kapazität unserer Leitung durch Hinzunahme des Schutzkondensators künstlich vergrößern, drücken wir die zu erwartende Unterbrechungsüberspannung im selben Maße herunter.

Die Energiegleichung lautet:

$$\frac{1}{2} \cdot e_u^2 \cdot C = \frac{1}{2} \cdot J^2 \cdot \lambda.$$

Hierin bedeutet e_u die höchste auftretende Überspannung, von der Verlustdämpfung sehen wir ab.

Hieraus ergibt sich:

$$e_u = J \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{C}}.$$

Schalten wir nun den Schutzkondensator an unsere Leitung, so geht diese Gleichung über in:

$$e_{uK} = J \cdot \sqrt{\frac{\lambda}{C + K}}.$$

Hieraus:

$$\frac{e_{uK}}{e_u} = \sqrt{\frac{C}{C + K}}. \quad (82)$$

Wir sehen also schon, wir müssen dem Kondensator recht erhebliche Dimensionen geben, wenn wir mit demselben eine nennenswerte Schutzwirkung gegen die absolute Höhe der auftretenden Unterbrechungsüberspannung erzielen wollen. Man wird sich bei der Dimensionierung des Kondensatorschutzes im allgemeinen mit der Abflachung der un stetigen Spannungssprünge begnügen; die Figur zeigt, daß der Kondensator die ursprünglich senkrechte Front der hin- und herlaufenden Wellen in durchgreifender Weise umbildet.

14. Zusammenfassung. Die Behandlung der Schutzwirkung von Drosselspulen und Kondensatoren gegen Wanderwellen, darauf fußend, daß man die zu erwartenden freien Schwingungen der Spannung und des Stromes in eine unendliche Anzahl von Sinusschwingungen, die Eigenschwingungen des betr. schwingenden Systems zerlegt, führt, wenn man die auf den zu beiden Seiten der Schutzapparate liegenden Leitungen auftretenden Strom- und Spannungswellen untersuchen will, auf schwierig zu behandelnde unendliche Reihen. Der Verfasser zog es aus diesem Grunde vor, sich eines Ersatzschemas zu bedienen, welches das Eindringen einer rechtecksförmigen Wanderwelle in die z. B. durch eine Drosselspule geschützte Wicklung auf einen einfachen Schaltvor-

¹⁾ K. W. Wagner, Leipzig 1908, Kapitel 10.

gang zurückzuführen gestattet; dieses Ersatzschema bildet die Wirklichkeit mit genügender Annäherung nach. Die vor der Drosselspule sich abspielenden Vorgänge gehen dadurch zwar der Beurteilung verloren, aber sie interessieren uns hier ja auch nicht in dem Maße wie gerade die in der Wicklung zu erwartenden Erscheinungen.

Die Untersuchungen des Verfassers bestätigen die bekannte Erscheinung, daß die vor die zu schützende Wicklung geschaltete Seriendrosselspule eine Abflachung der senkrechten Stirn ankommender Wanderwellen bewirkt; für das Maß der Abflachung der Wanderwellenstirn ist allein ausschlaggebend das Verhältnis der Selbstinduktion der Schutzdrosselspule zur gesamten Selbstinduktion der zu schützenden Wicklung. Die Drosselspule kann jedoch, selbst bei Werten des Selbstinduktionskoeffizienten derselben, wie sie für die praktische Ausführung niemals in Frage kämen, nicht verhindern, daß bei zwischen Erde und Leitung verlaufenden Wanderwellen genügender Länge (durch atmosphärische Störungen entstanden) die Spannung der Wicklung gegen Erde sich auf nahezu den vierfachen Wert der Wanderwellenspannung hinaufarbeitet.

Es wird ferner das Verhalten der mittels Kondensators geschützten Maschinenwicklung beim Abschalten untersucht, und es zeigt sich, daß der Kondensator nicht nur die steile Front der Unterbrechungsüberspannungswellen abflacht, sondern bei genügender Dimensionierung desselben auch die absolute Höhe dieser Wellen herunterdrückt. Maßgebend für das Verhalten des Kondensators ist, ähnlich wie bei der Drosselspule, das Verhältnis der Kapazität desselben zur gesamten Kapazität der Wicklung.

Ähnlich verhält sich der Kondensator beim Abschalten der induktiv belasteten Leitung. Nur kann hier leicht der Fall eintreten, daß, um eine genügende Herabsetzung der absoluten Höhe der auftretenden Überspannungen zu erreichen, der Kondensator derartige Dimensionen beansprucht, daß sich dem aus wirtschaftlichen Gründen Schwierigkeiten in den Weg stellen.

Die Wechselwirkung schräg stehender Solenoide mit Eisenkernen.

Von

H. Lorenz, Danzig.

Die Berechnung der Wechselwirkung beliebig geformter und gegeneinander angeordneter Solenoide bietet keine grundsätzlichen Schwierigkeiten, solange ihre Leiter als lineare angesehen werden dürfen und durchweg in dasselbe Medium von konstanter magnetischer Permeabilität eingebettet sind. Ist beides nicht der Fall, so werden die Koeffizienten der gegenseitigen und Selbstinduktion nicht nur infolge der Hautwirkung von der Periode der Wechselströme abhängig, sondern auch durch die Veränderlichkeit der Permeabilität von der Stromstärke derart beeinflusst, daß von einer genauen Berechnung keine Rede mehr sein kann. Damit aber wäre jedem Versuche einer Theorie elektrischer Maschinen, die ausnahmslos derartige gegeneinander drehbare Solenoide mit Eisenkernen als Anker und Feldmagnete besitzen, der Boden entzogen, wenn es nicht gelingt, eine,

wenn auch nur grobe Näherungslösung des Problems anzugeben.

Fig. 1.

Zu diesem Zwecke denken wir uns in Fig. 1 zwei aus linearen Windungen bestehende Spulen mit Eisenkernen von den Querschnitten F_1 und F_2 und den mittleren Achsenlängen l_1 und l_2 um den Winkel φ gegeneinander verdreht. Die Windungszahlen der Spulen seien n_1 und