# 2. *Bewegung und Ladung der Elektrizitätsträger im Zylinderkondensator;* *von Walther Deutsch.*

Die Ermittlung der Ladung, die kleine, in einem Gase suspendierte Träger in einem homogenen elektrischen Feld annehmen, wenn das sie umgebende Gas durch fremde Ionisationsquellen beeinflußt ist, wurde vor einiger Zeit von Hauer[1]) behandelt. Hauer konnte zeigen, daß die in seinen Versuchen erzielte Wanderungsgeschwindigkeit auf Grund einer Ladung der Träger erfolgte, die weder durch Influenzwirkung in dem durch Raumladung etwas modifizierten elektrischen Felde, noch durch den direkten Anprall der Ionen, sondern nur durch die infolge des Gasdruckes (Wärmebewegung) auf den Träger angeschleuderten Ionen erklärt werden konnte.

Geschieht die Erzeugung der Ionen durch selbständige Entladung, z. B. durch die Stoßionisation in einem auf genügend hohe Potentialdifferenz gebrachten Zylinderkondensator mit geringem inneren Radius, so liegen bekanntlich[2]) in den Fällen der bei Versuchen üblichen Abmessungen die Wanderungsgeschwindigkeiten in der Größenordnung von einigen Zentimetern pro Sekunde.

Zweck der folgenden Untersuchung ist es nun, die hohen Ladungen, die diese Wanderungsgeschwindigkeit bedingen, auf Grund der bereits von Hauer gemachten Annahmen auch für den Fall der Stoßionisation zu erklären und die Zahl der Elementarladungen für Träger verschiedener Größe herzuleiten.

Wir betrachten zunächst die Vorgänge, die sich in der nächsten Nähe der Innenwandung des äußeren Zylinders abspielen. Die Feldstärke sei dort $F$. Versteht man unter $J$

1) F. v. Hauer, Ann. d. Phys. 61. S. 303. 1920.

2) Vgl. die Arbeiten von W. W. Strong, Ann. d. Phys. 48. S. 251. 1915; Trans. Am. Inst. Electr. Eng. Vol. 32. p. 1305—1314. June 1913 und Journ. Franklin Inst. Vol. 174. p. 239—263. Sept. 1912, sowie: Nesbit, Proc. of the Am. Inst. of Electr. Eng. Vol. 34. p. 507—522. April 1915.

die auf die Längeneinheit des Zylinderkondensators entfallende Stromstärke und unter $K$ die Beweglichkeit der zur Zylinderwandung strömenden Ionen — der ganze Innenraum des Zylinderkondensators bis auf eine sehr geringe am Innenleiter liegende Schicht ist ja bekanntlich erfüllt von Ionen eines Vorzeichens — so gilt annähernd [1])

$$F = \sqrt{\frac{2J}{K}} \tag{1}$$

Schwebt ein Träger, der mit $x$ Einheitsladungen $e$ geladen ist, und den wir im folgenden der Einfachheit halber als kugelförmig annehmen wollen, in dem Felde $F$, so kann seine Geschwindigkeit $c$ ermittelt werden, indem man je nach der Größe dieses Teilchens, die auf ihn einwirkende Kraft $F \cdot x \cdot e$ der aus dem Stokesschen Gesetz, bzw. aus dem für kleine Träger korrigierten Stokesschen Gesetz ermittelten Reibungskraft, bzw. der aus der kinetischen Gastheorie berechneten Reaktionskraft gleichsetzt.[2]) Da es uns im folgenden nur um Träger zu tun ist mit Radien über $10^{-6}$ cm, so ist das Stokessche Gesetz für uns verwendbar.

Es handelt sich nun darum, die Zahl $x$ der Ladungen, die ein Träger vom Radius $r$ in dem Felde der Stoßionisation aufnimmt, zu ermitteln. Dazu ist zunächst die Kenntnis der Ionenkonzentration $n$ notwendig, in der dieser am Rande des Zylinders schwebende Körper sich befindet. Nun ist die Verteilung der Raumladung zwar bekannt[3]), es muß jedoch berücksichtigt werden, daß die durch die Stoßionisation auftretenden Gasströmungen infolge des Gesetzes der Kontinuität nicht überall der Richtung des elektrischen Feldes folgen, so daß im Innern des Zylinderkondensators Gaswirbel entstehen, die eine exakte Berechnung der Raumladung undurchführbar

1) Genauer:

$$F = \sqrt{\frac{2J}{K} + X_1^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2},$$

wo $X_1$ die Feldstärke am Innenzylinder (Draht) $r$, $R$ die Radien am Innenzylinder und am Außenzylinder bedeuten. S. z. B. Thomson, El. Durchgang in Gasen, herausgegeben v. Marx, Leipzig 1906. S. 430 und Marx, Handbuch der Radiologie, Leipzig 1920. I. S. 348.

2) Über die entsprechenden Formeln und Geltungsbereiche s. Lenard, Ann. d. Phys. 61. S. 699. 1920.

3) Vgl. Anm. 1, S. 336.

erscheinen lassen. Wenn wir aber — was im folgenden angenommen wird — einen Zylinderkondensator von im Vergleich zu seinem Durchmesser sehr großer Länge voraussetzen, so werden wir, wenn die Gesamtheit der Innenoberfläche des äußeren Zylinders ins Auge gefaßt wird, im Mittel dort doch eine Ionendichte erhalten, die der errechneten entspricht. Die spezifische Ladungsdichte $q = ne$ ist dann:

$$q = \frac{J}{2\pi RKF},$$

wo $R$ den Innenradius des äußeren Zylinders bedeutet. Mithin ist:

$$n = \frac{J}{2\pi RKFe}. \tag{2}$$

Wenn man nun darangeht, die Zahl der sekundlichen Zusammenstöße zu berechnen, die der Träger teilweise durch die eigene, teilweise durch die Wärmebewegung der ihn umgebenden Molekel erfährt, so muß man wieder unterscheiden zwischen sehr kleinen Trägern, bei denen die Brownsche Bewegung noch in Betracht kommt und solchen, die nur dem Gasdruck der umgebenden Atmosphäre ausgesetzt sind. Für die ersteren gilt bekanntlich:

$$z = 4n\pi s^2 u\sqrt{\frac{m}{M}}, \tag{3}$$

wo $z$ die sekundliche Stoßzahl,
$s$ die Radiensumme von Molekel und Teilchen,
$u$ die mittlere Molekulargeschwindigkeit,
$m$ die Masse der Molekel,
$M$ „ „ des Suspensionskörpers

bedeutet.

Für die größeren Radien gilt:

$$z = 4r^2\pi\nu, \tag{4}$$

wo $\nu$ die aus der kinetischen Gastheorie und aus der Loschmidtschen Zahl $N = 2{,}64 \cdot 10^{19}$ (Millikan, Fletcher, Regener 1911) zu errechnende Stoßzahl pro Sekunde und pro qcm bedeutet:

$$\nu = \frac{Nu}{6}. \tag{5}$$

Für den Trägerradius $5 \cdot 10^{-7}$ cm ergibt die Fl. (3) nur noch den 20. Teil von Fl. (4), weshalb wir die letztere für das Folgende ausschließlich zugrunde legen.

Da von den im ccm enthaltenen $N$ Molekeln nur der Bruchteil $n/N$ Ladungen besitzen, so geht aus den Formeln (2), (4) und (5) hervor, daß die Zahl $y$ der in der Sekunde auf das Teilchen stoßenden Ionen

$$y = \frac{F r^2 u}{6 R e} \tag{6}$$

beträgt.

Im Mittel stößt jedes einzelne Gasion mit der aus der kinetischen Gastheorie bekannten Stoßenergie

$$L = \frac{m u^2}{2}$$

gegen den geladenen Träger, und es wird sowohl auf die Ladung als auch auf die Stoßenergie $L$, als auch auf die Größe des Teilchens ankommen, ob das Gasion im Verlaufe der Bewegung den Träger berührt und dort seine Ladung abgibt oder nicht.[1])

Nun kann die mittlere Stoßenergie $L$ — wie ich im folgenden zeigen werde — nicht im entferntesten als Maßstab für die Aufladung des Trägers dienen: es wird nämlich, je länger man die Beobachtung ausdehnt, oder besser, je länger der Träger in der Ionenatmosphäre befindlich ist, die Möglichkeit wachsen, daß er auch in die Stoßsphäre von Molekeln gelangt, die eine größere ($v$) als die mittlere Geschwindigkeit ($u$) besitzen. Das Verhältnis $v/u$ kann in erster Annäherung auf folgende Weise bestimmt werden: Ist der Suspensionskörper $\tau$ Sekunden dem Einfluß eines ionisierten Gases ausgesetzt, so empfängt er somit $y\tau$ Stöße. Der größte Bruchteil dieser $y\tau$ Stöße wird einem gewissen Bereich der mittleren Energie $L$ angehören. Ein sehr viel kleinerer Bruchteil wird einem Bereich von Energien zukommen, die größer als $L$ sind, und die Gesamtheit aller Energien, die größer ist als eine gewisse Energie $L'$ bleibt nur noch für einen einzigen Stoß reserviert; diesem kommt also der Bruchteil $1/y\tau$ zu.

$L'$ bildet die Grenze der möglichen Stoßenergien bei $y\tau$ Stößen. Ihr entspricht die aus der Maxwellschen Geschwin-

1) J. Perrin, Die Atome, Dresden und Leipzig 1920. S. 157.

digkeitsverteilung hervorgehende molekulare Geschwindigkeit $\pm v'$. Die gesamte Zahl der Zusammenstöße $y\tau$ ist:

$$y\tau = y\tau \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \left(\frac{v}{u}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} dv.$$

Es wird also gemäß dem vorhergehenden der Bruchteil $1/y\tau$, der der gesuchten Geschwindigkeitsgrenze entspricht, in folgender Weise erhalten:

$$(7) \qquad \frac{1}{y\tau} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_{v'}^\infty \left(\frac{v}{u}\right)^2 e^{-\left(\frac{v}{u}\right)^2} dv.$$

Setzt man das Geschwindigkeitsverhältnis:

$$(8) \qquad \frac{v}{u} = \varphi,$$

so ist:

$$(9) \qquad \lg \frac{\sqrt{\pi}}{4y\tau u} = \lg \int_\varphi^\infty \varphi^2 e^{-\varphi^2} d\varphi.$$

Die rechte Seite von (9) gibt für Geschwindigkeitsverhältnisse zwischen 2 und 6, also für Energieverhältnisse zwischen 4 und 36 annähernd folgende Werte:

Tabelle 1.

| $\varphi$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lg \frac{4y\tau u}{\sqrt{\pi}}$ | 4,41 | 9,22 | 16 | 25 | 36 |

Es ist mithin ohne weiteres möglich das Verhältnis $L'/L$ zu berechnen. Eine Annäherung, mit der wir uns im folgenden für Werte von $L'$ zwischen 16 und 36 begnügen werden, ist — wie man aus den Zahlen der Tabelle sieht — gegeben durch die Formel:

$$\varphi^2 = \frac{L'}{L} = \lg \frac{4y\tau u}{\sqrt{\pi}}$$

oder

$$L' = L \lg \frac{4y\tau u}{\sqrt{\pi}}$$

oder mit Rücksicht auf (6):

$$(10) \qquad L' = L \lg \frac{2\tau}{3\sqrt{\pi}\, e} \cdot \frac{F u^2 r^2}{R}.$$

Hier hat die Größe

$$\frac{R}{2\,\tau F} = w \tag{11}$$

eine anschauliche Bedeutung; da man nämlich die Feldstärke im Innern des Zylinderkondensators angenähert als konstant ansetzen darf[1]), so bedeutet $w$ die mittlere Geschwindigkeit, die die Träger während ihrer Wanderung im Felde von 1 (cgs) annehmen. Diese Größe ist zwar durch diese Gleichung (11) nicht sehr genau bestimmt; sie spielt jedoch in Gleichung (10) nur eine untergeordnete Rolle, und nur ihre Größenordnung hat auf das Verhältnis von $L'/L$ einen wesentlichen Einfluß. Man erhält demnach aus (10):

$$L' = L \lg \frac{1}{8\sqrt{\pi}\,e} \cdot \frac{u^2 r^2}{w}. \tag{12}$$

Nunmehr ist es uns möglich, darüber zu entscheiden wieviele Elementarladungen ein Träger vom Radius $r$ in der Zeit $\tau$ aufzunehmen vermag. Wenn sich das Gasion mit der Ladung $e$ und der Träger mit der Ladung $x e$ bis auf eine Entfernung $\varrho$ (Abstand zwischen Oberfläche des Trägers und dem Schwerpunkt des Gasions) genähert haben, so ist die Coulombsche Abstoßung:

$$\frac{x\,e^2}{(r+\varrho)^2}\,.$$

Ist der Träger groß im Vergleich zur Gasmolekel, so kann man bei geringer Entfernung $\varrho$ das Gesetz der elektrischen Bilder in der Weise zur Anwendung bringen, daß man die Oberfläche des Trägers als ebene Spiegelfläche betrachtet. Die Anziehung des Gasions durch die Influenzladung im Träger hat dann annähernd die Größe:

$$\frac{e^2}{4\,\varrho^2}$$

und wenn sie die Coulombsche Abstoßung überwinden soll, so muß sein:

$$\frac{x\,e^2}{(r+\varrho)^2} = \frac{e^2}{4\,\varrho^2}\,. \tag{13}$$

---

1) Nämlich $= \sqrt{\frac{2J}{K}}$ solange $\frac{\varrho}{r} \gg 1$, wo $\varrho$ den Radius eines beliebigen Punktes im Kondensator bedeutet; vgl. Anm. 1, S. 336.

In diesem kritischen Abstand $\varrho$ muß es sich entscheiden, ob die Energie $L'$ ausreicht, um die potentielle Energie der Coulombschen Abstoßung zu überwinden oder nicht. Im Grenzfall muß also sein:

$$\frac{x e^2}{r + \varrho} - \frac{e^2}{2 \varrho} = L', \tag{14}$$

oder nach Einführung eines Koeffizienten $\alpha$:

$$\frac{L'}{e} = \frac{x e}{r + \varrho} - \frac{e}{2 \varrho} = \frac{x e \alpha}{r}. \tag{15}$$

Aus (13) folgt dann:

$$\frac{r}{\varrho} = 2 \sqrt{x} - 1$$

und hieraus:

$$\alpha = \left(1 - \frac{1}{2 \sqrt{x}}\right)\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right). \tag{16}$$

Setzt man den Wert aus (15) in (12) ein, so erhält man schließlich:

$$x e = \frac{L r}{e \alpha} \lg \frac{1}{3 \sqrt{\pi} e} \frac{u^2 r^2}{w}. \tag{17}$$

Die gesuchte Wanderungsgeschwindigkeit $c$ am Rande des zylindrischen Feldes erhält man nun leicht aus der Stokesschen Formel zu:

$$c = \frac{L F}{6 \pi \eta e \alpha} \lg \frac{1}{3 \sqrt{\pi} e} \frac{u^2 r^2}{w}, \tag{18}$$

wo $\eta$ die Reibungskonstante des gasförmigen Mediums ist. Hier ist wieder $\frac{c}{F} = w$ die Wanderungsgeschwindigkeit bezogen auf die Feldstärke 1 (cgs), und es ergibt sich schließlich:

$$w = \frac{L}{6 \pi \eta e \alpha} \lg \frac{1}{3 \sqrt{\pi} e} \frac{u^2 r^2}{w} \tag{19}$$

Fügt man den Gleichungen (16) und (19) noch die aus dem Stokesschen Gesetz folgende Formel:

$$x e = 6 \pi \eta r w \tag{20}$$

hinzu, so entsteht für jedes gegebene $r$ ein System von 3 Gleichungen mit den drei Unbekannten $w$, $\alpha$ und $x$.

Die Lösung dieser Gleichungen für Träger bis zu $3 \cdot 10^{-7}$ cm ergibt für Luft ($L = 6 \cdot 10^{-14}$ (cgs); $\eta = 17 \cdot 10^{-5}$ (cgs); $e = 4{,}77 \cdot 10^{-10}$ (cgs); $u = 5 \cdot 10^4$ cm/sec):

Tabelle 2.

| $r$ cm | $10^{-3}$ | $10^{-4}$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $3{,}15 \cdot 10^{-7}$ | $10^{-7}$ | ca. $6 \cdot 10^{-8}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 8300 | 690 | 51 | ca. 4 | — | — | — |
| $w$ cm/sek. | 1,05 | 0,95 | 0,86 | 1,02 | 1,45 | 155 | 450 |

Die Zahl 1,45 ist nur ein Näherungswert, weil er schon an der Grenze der Gültigkeit der für $L'/L$ abgeleiteten Formel (10) liegt; immerhin ergibt sich für diesen Wert:

$$\frac{L'}{L} = 12{,}2\,,$$

während der Beginn des Gültigkeitsbereiches des nach Gleichung (10) angesetzten quadratischen Gesetzes gemäß Tab. 1 zwischen die Werte 9,22 und 16 fällt. Hingegen ist die Zahl 155 der obigen Tabelle nicht mehr richtig, da für den Radius $10^{-7}$ cm schon Gleichung (3) benutzt werden muß. Wir sind trotzdem in der Lage, einen letzten Punkt für die Abhängigkeit zwischen Wanderungsgeschwindigkeit und Teilchengröße zu finden; da wir nach den Untersuchungen Lenards[1]) wissen, daß die in nebelkernfreier Luft gemessene Ionengeschwindigkeit von 1—2 cm/sec/Volt/cm einem drei- bis fünffachen Luftmolekülradius entspricht, also etwa dem Radius $6 \cdot 10^{-8}$ cm. Es ist also in diesem Falle $w = K$ (für Luft ca. 450 cm/sec/cgs.).

Aus der obigen Tabelle entnimmt man zunächst das überraschende Resultat, daß von $r = 10^{-3}$ cm bis zu einem 10,000 mal größeren Radius, also bis tief hinein ins ultramikroskopische Gebiet, die Wanderungsgeschwindigkeit nur zwischen den Werten 0,85 und 1,4 variiert. (Vgl. die folgende Fig. 1, worin $r = 10^{-\mu}$).

Es ist im Hinblick auf die Versuche, auf die bereits in Anm. 2, S. 335 hingewiesen wurde, noch interessant zu untersuchen, welche Erscheinungen eintreten, wenn das Gas den Zylinderkondensator gleichförmig durchströmt ($v$ cm/sec). Es ist leicht einzusehen, daß dann im Prinzip an den vorhin erhaltenen Resultaten nichts geändert wird. Hat jedoch die Zylinderwandung, wie in den oben erwähnten Versuchen, die Eigenschaft, die ankommenden Träger dauernd festzuhalten, so wird

1) P. Lenard, Ann. d. Phys. 61. S. 665. 1920.

mit wachsendem Abstand ($x = v\,t$) von der Einströmungsstelle die „Trägerkonzentration“ ($m$) des Gases abnehmen.

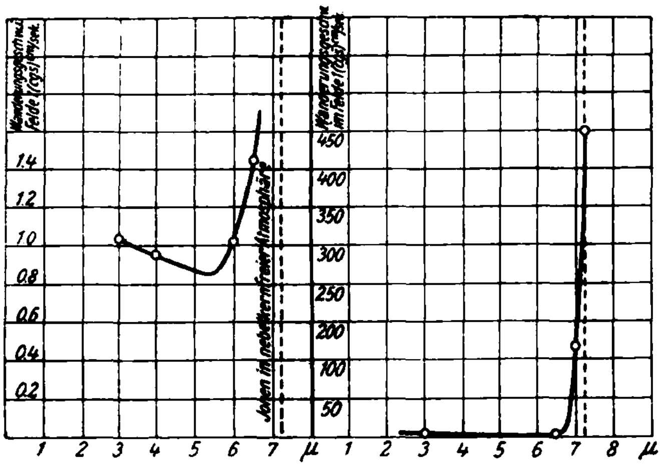


Fig. 1. $r = 10^{-\mu}$)

Ist die ursprüngliche Trägerkonzentration $n_0$ und nehmen wir an, daß sich durch Wirbelung, elektrischen Wind usw. diese an allen Stellen $x$ auf den betreffenden Querschnitt gleichmäßig verteilt, so gilt für den Innenrand des äußeren Zylinders:

$$-\,d\,n = n\,c\,d\,t = n\,\frac{c}{v}\,d\,x\,,$$

wenn dort $c$ die Wanderungsgeschwindigkeit im Felde $F$ und $d\,t$ die Zeitänderung bedeutet, während der die an der Stelle $x$ herrschende Trägerkonzentration sich um den Betrag $-\,d\,n$ ändert. Ist ferner $N = R^2\pi\,n$ die pro Längeneinheit auf den ganzen Querschnitt entfallende Trägermenge, so ist deren Abnahme längs $d\,x$:

$$d\,N = R^2\,\pi\,d\,n = -\,2\,R\,\pi\,n\,\frac{c}{v}\,d\,x$$

oder

$$d\,n = -\,n\,\frac{2\,c}{R\,v}\,d\,x,$$

woraus folgt:

(21) $$n = n_0\,e^{-\frac{2\,c}{R\,v}\,x}$$

oder

$$n_L = n_0 \, e^{-\frac{2Fw}{Rv}L}, \tag{22}$$

wo $L$ die Länge des Kondensators und $n_L$ die an der Ausströmungsseite noch vorhandene Trägerkonzentration bedeutet.

### Zusammenfassung.

1. Auch bei Ionisation durch Stoß (im Zylinderkondensator) werden suspendierte Träger durch den „Gasdruck" der sie umgebenden Ionen so stark aufgeladen, daß sie im Felde 1 (cgs) Geschwindigkeiten in der Größenordnung einiger cm/sec erlangen.

2. In Luft ist diese Wanderungsgeschwindigkeit im Gebiete zwischen $r = 10^{-3}$ und $r = 10^{-6}$ cm etwa 1 cm/sec/(cgs).

3. Die im durchströmten Zylinderkondensator[1]) beobachtete starke Änderung der Trägerkonzentration ist hierdurch (Gleichung 22) erklärt.

Frankfurt a. Main, im April 1922.

1) Vgl. Anm. 2, S. 335.

(Eingegangen 12. April 1922.)