Ueber die Bedeutung der Begriffe „Maximum und Minimum“ in der Variationsrechnung.

Von

LUDWIG SCHEEFFER †.*)

Zur Lösung der Aufgabe, zwischen zwei festen Punkten mit den
Coordinaten $\overset{0}{x} \overset{0}{y}$ und $\overset{1}{x} \overset{1}{y}$ diejenige Curve zu finden, für welche das
Integral:

$$J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y') dx$$

ein Minimum (resp. Maximum) wird, entwickelt man die Differenz:

$$F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') - F(x, y, y')$$

nach Potenzen von Δy und $\Delta y'$. Bezeichnet man dann mit G_r das
von $\overset{0}{x}$ bis $\overset{1}{x}$ genommene Integral der Glieder r^{ter} Dimension in jener
Entwicklung, sodass

$$\Delta J = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') dx - \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} F(x, y, y') dx = G_1 + G_2 + G_3 + \dots$$

wird, so wird die Function y durch die Forderung bestimmt, dass die
„erste Variation“ G_1 für jede beliebige Function Δy , welche an den
Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ verschwindet, gleich Null werde.

*) Mitten aus dem regsten und fruchtbarsten Schaffen ist Ludwig Scheeffler
der Wissenschaft entrissen worden, die er trotz der kurzen Zeit, die ihm ver-
gönnt war, durch eine Reihe von fundamental wichtigen Arbeiten bereichert hat.
Geboren am 1. Juni 1859 zu Königsberg i./Pr. starb er am 11. Juni 1885 in
München.

Die Note, die wir hier aus den Leipziger Berichten zum Abdruck bringen,
ist dieselbe, auf die er Bd. XXV, p. 594 dieser Annalen verwiesen hatte.

Man pflegt hierauf die Frage, ob das Integral J für diese bestimmte Curve y wirklich einen Minimalwerth annehme, dahin zu beantworten, dass dieses der Fall sei oder nicht, jenachdem die „zweite Variation“ G_2 für alle an den Grenzen x^0 und x^1 verschwindenden Functionen Δy positiv ist oder auch negativ werden kann. Die Begründung dieses Kriteriums geschieht gewöhnlich folgendermassen. Man setzt $\Delta y = \kappa \eta$, wo κ eine Constante ist. Dann geht die Entwicklung ΔJ über in die Entwicklung $\kappa^2 \gamma_2 + \kappa^3 \gamma_3 + \dots$, wo γ_r sich von G_r nur dadurch unterscheidet, dass η und η' an Stelle von Δy und $\Delta y'$ stehen. Bei einer bestimmten Annahme der Function η und fortgesetzter Verkleinerung der Constante κ erhält dann ΔJ schliesslich immer das Vorzeichen von γ_2 ; ist also γ_2 negativ, so wird auch ΔJ schliesslich negativ, d. h. das Integral

$$\int_{x^0}^{x^1} F(x, y + \kappa \eta, y' + \kappa \eta') dx,$$

betrachtet als Function von κ allein, hat für $\kappa = 0$ ein Maximum; und ist γ_2 positiv, so wird auch ΔJ schliesslich positiv, d. h. jenes Integral hat für $\kappa = 0$ ein Minimum. Nennt man die einfach unendliche Mannigfaltigkeit aller derjenigen Curven $y + \Delta y$, welche sich von einander nur durch die Werthe der Constanten κ unterscheiden, eine „ η -Schaar“, so kann man sagen, die Curve y macht das Integral J zu einem Minimum oder Maximum „innerhalb der einzelnen η -Schaar“, jenachdem der zu einer solchen Schaar gehörige Werth von γ_2 positiv oder negativ ist. Nun pflegt man weiter so zu überlegen: Ist γ_2 für irgend eine Function η negativ, so tritt schon innerhalb dieser einzelnen η -Schaar für die Curve y kein Minimum, sondern im Gegentheil ein Maximum ein, es kann also um so weniger von einem Minimum unter allen überhaupt möglichen Curven die Rede sein; wird dagegen γ_2 für *alle* Functionen η positiv, so ist für die Curve y ein Minimum innerhalb *jeder* η -Schaar vorhanden, es muss daher, *weil jede beliebige Curve sich einer η -Schaar einreihen lässt*, auch ein Minimum überhaupt stattfinden.

Der letzte Theil dieser Ueberlegung, auf welche man das Kriterium des Minimums zu gründen pflegt, enthält nun einen Fehlschluss, dessen Aufdeckung es zunächst sehr zweifelhaft macht, ob jenes Kriterium überhaupt richtig ist. Daraus nämlich, dass ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η -Schaar stattfindet, folgt noch nicht, dass auch ein Minimum überhaupt eintritt, obschon es unbestreitbar ist, dass jede willkürlich gegebene Curve sich einer gewissen η -Schaar einreihen lässt. Und dieser Schluss ist nicht etwa ein Fehlschluss

von der Art, dass man seine Anfechtung als eine Spitzfindigkeit ansehen könnte, die für alle in der Anwendung vorkommenden Fälle ohne Bedeutung wäre; vielmehr führt derselbe bei ganz concreten Problemen direct zu falschen Resultaten. So zum Beispiel könnten wir — um nur eine der verschiedenen Richtungen anzugeben, nach welchen sich der Fehler weiter verfolgen lässt — vermittelst jenes Schlusses auf dem vorher eingeschlagenen Wege offenbar auch folgenden Satz beweisen: „Ein Minimum des Integrales J findet statt, wenn erstens die zweite Variation G_2 niemals negativ wird und zweitens für diejenigen Functionen Δy , für welche jene etwa verschwinden sollte, die nächsthöhere von Null verschiedene Variation von gerader Ordnung und positiv ist“; denn wenn diese Bedingungen erfüllt sind, so tritt wiederum sicherlich ein Minimum innerhalb jeder einzelnen η -Schaar ein. Nun existiren Beispiele von verhältnissmässig einfacher Beschaffenheit, welche mit dem letzten Satze entschieden im Widerspruche stehen. In einem solchen Beispiele, welches ich gefunden habe, hat das Integral, durch welches die Länge einer Curve auf einer gewissen Fläche zwischen zwei gegebenen Endpunkten ausgedrückt wird, für eine bestimmte Curve y die erste Variation gleich Null, die zweite im Allgemeinen positiv, ausgenommen eine einzige Schaar $\Delta y = \kappa \eta$, für welche gleichzeitig die zweite bis fünfte Variation verschwindet, während die sechste positiv wird. Trotzdem tritt kein Minimum ein, vielmehr giebt es auf der Fläche kürzere Verbindungslinien derselben Endpunkte noch in jeder Nähe der betrachteten Curve. Es war ursprünglich meine Absicht, dieses Beispiel hier ausführlich mitzutheilen, zumal dasselbe vermöge seines geometrischen Inhalts wohl geeignet ist, den inneren Grund für die Unzulässigkeit der angestellten Ueberlegung zu Tage treten zu lassen. Inzwischen habe ich gefunden, dass analoge Verhältnisse in der weitaus einfacheren und durchsichtigeren Theorie der gewöhnlichen Maxima und Minima bestehen. Ich möchte aus diesem Grunde auf die Discussion jenes Fehlschlusses und auch auf die ausführliche Mittheilung meines Beispiels verzichten und in dieser Hinsicht lieber auf eine demnächst zu publicirende Untersuchung über die gewöhnlichen Maxima und Minima verweisen*).

*) Die erste Anregung zu derartigen Ueberlegungen verdanke ich Herrn A. Mayer, der mich gelegentlich auf ein von Erdmann behandeltes Problem (Zeitschrift f. Mathem. Bd. 22, p. 331) aufmerksam machte. Erdmann untersucht das Integral, durch welches die Länge einer zwischen zwei Gegenpolen auf einer Kugelfläche sich erstreckenden Curve gegeben ist, und findet, dass bei gewisser Wahl des Coordinatensystems für einen Halbkreis die zweite Variation jenes Integrals zwar verschwinden kann, aber nur, indem gleichzeitig die dritte Variation verschwindet und die vierte positiv wird. Es tritt also hier innerhalb jeder η -Schaar ein wirkliches Minimum ein, während doch in jeder Nähe der

In der vorliegenden Note soll nun aber der Nachweis geführt werden, dass, solange es sich nur um die zweite Variation handelt, das gewöhnliche Kriterium des Minimums unter bestimmten Voraussetzungen doch noch in gewissem Sinne hinreicht. Dieser Nachweis wird freilich auf einem ganz anderen Wege, als dem vorher angedeuteten, erreicht werden. Wir werden nämlich zeigen, dass, wenn die zweite Variation des Integrales

$$\int_0^x F(x, y, y') dx$$

für alle Functionen Δy positiv ist, sich im Allgemeinen zwei Grössen g und g' so angeben lassen, dass auch die Differenz

$$\Delta J = \int_0^x F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') dx - \int_0^x F(x, y, y') dx$$

positiv wird für jede Function Δy , welche im Intervalle x selbst durchweg absolut kleiner als g ist, während ihre Ableitung $\Delta y'$ durchweg absolut kleiner als g' bleibt. Auf diesen Satz ist alsdann die präzise Definition des Begriffes Minimum für die Variationsrechnung zu gründen: „Ein Minimum ist vorhanden, wenn zwei Grössen g und g' so bestimmbar sind, dass das Integral J durch die Function y einen kleineren Werth erhält als durch alle Functionen $y + \Delta y$, welche den Beschränkungen $|\Delta y| < g$, $|\Delta y'| < g'$ unterliegen; oder wenn — geometrisch zu reden — das Integral J für die Curve y kleiner wird als für alle anderen, welche ganz in einem jene Curve enthaltenden (durch die Grösse g bestimmten) Flächenstreifen liegen und zugleich überall höchstens einen gewissen (durch g' bestimmten) Winkel mit jener Curve bilden.“

Dieser Begriff des Minimums ist zwar enger als der gewöhnlich angenommene, welcher nur die Beschränkung der Variation Δy durch

betrachteten Curve andere Curven (Halbkreise) zwischen denselben Endpunkten existiren, für welche der Werth des Längenintegrales wenigstens nicht grösser ist. Auf Erdmann's Beispiel construirte ich mir dann das meinige, in welchem bei ganz analogem Verhalten der verschiedenen Variationen sogar Curven mit geringerem Werthe des Längenintegrales in jeder Nähe der betrachteten Curve existiren. — Uebrigens zeigt das in der Note auf Seite 201 angegebene, höchst einfache Beispiel, dass unter speciellen Umständen sogar schon die zweite Variation beständig positiv sein kann, ohne dass ein Minimum stattfindet. Wir haben hier nur deshalb jene in analytischer Hinsicht weit complicirteren Beispiele in den Vordergrund gestellt, weil dieselben eine geometrische Bedeutung besitzen.

die Bedingung $|\Delta y| < g$, nicht aber die Beschränkung ihrer Ableitung durch die Bedingung $|\Delta y'| < g'$ verlangt; man darf indessen, wenn man *allein mit den Hilfsmitteln der Variationsrechnung* zu hinreichenden Kriterien des Minimums gelangen will, die zweite (auf $\Delta y'$ bezügliche) Beschränkung nicht fortlassen und überhaupt über die aufgestellte Definition des Minimums nicht hinausgehen. In der That zeigt das von Herrn Weierstrass angegebene Beispiel, welches ich in der meinem Aufsätze „Ueber die Kriterien des Maximums und Minimums einfacher Integrale“ beigefügten Note (diese Annalen Bd. 25, p. 595) mitgetheilt habe, dass die zweite Variation durchaus positiv sein und doch das Integral für gewisse Nachbarcurven $y + \Delta y$, welche nur der Bedingung $|\Delta y| < g$, nicht aber der Bedingung $|\Delta y'| < g'$ unterliegen, noch kleiner als für die Curve y werden kann.

Auch den Beweis des Satzes, dass ein Minimum *in dem angegebenen Sinne* stattfindet, falls die erste Variation gleich Null und die zweite beständig positiv ist, vermögen wir nur unter gewissen Voraussetzungen zu führen. Es sind genau dieselben Voraussetzungen, an welche man von den Untersuchungen über die Transformation der zweiten Variation in eine zur Discussion ihres Vorzeichens geeignete Form seit Jacobi gewöhnt ist. Diese Voraussetzungen sind für unseren *Beweis* deshalb unentbehrlich, weil derselbe sich von Anfang an auf jene Transformation stützt; sie zeigen sich aber bei genauerer Prüfung zum Theil auch als wesentlich für den Bestand *des Satzes selbst**). Jedenfalls ist,

*) Dies gilt wenigstens von der Voraussetzung $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} > 0$. Für den Schluss auf das positive Vorzeichen die zweiten Variation genügt nämlich unter sonst gleichen Umständen die Sicherheit, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Allgemeinen positiv und höchstens an einzelnen Stellen gleich Null wird; für den Schluss auf das Minimum im angegebenen Sinne hingegen ist es nothwendig, dass $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Intervalle $^0_1 x x$ auch einen positiven *Minimalwerth* besitzt, da man sonst in manchen Fällen noch bei beliebig kleinen Variationen Δy und $\Delta y'$ bewirken kann, dass das Vorzeichen der *dritten* Variation ausschlaggebend wird. Es sei zum Beispiel

$$F(x, y, y') = (x - a)^2 y'^2 + (x - a) y'^3, \quad (x <^0 a <^1 x),$$

ferner seien die für $x =^0 x$ und $x =^1 x$ vorgeschriebenen Werthe von y beide gleich c . Durch Nullsetzen der ersten Variation und Anwendung der Grenzbedingungen erhält man dann die Lösung $y = c$, und für diese Lösung wird die

zweite Variation gleich $\int_x^1 (x - a)^2 \Delta y'^2 dx$, also beständig positiv. Trotzdem findet

kein Minimum im angegebenen Sinne statt. Setzt man nämlich Δy von x bis 0

was wir nachweisen werden, nicht eigentlich, dass ein Minimum stattfindet, sobald die zweite Variation positiv ist, sondern vielmehr, dass ein Minimum stattfindet, sobald gewisse Bedingungen erfüllt sind, die man als *hinreichende Bedingungen für das Positivsein der zweiten Variation* längst kennt.

Die Voraussetzungen, welche wir machen, sind folgende: I. Alle partiellen Ableitungen der Function $F(x, y, y')$ nach y und y' bis zur dritten Ordnung sind im Intervalle $x^0 x^1$ einschliesslich der Grenzen endlich und stetig, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ausserdem durchaus positiv. II. Eine gewisse Determinante $\Delta(x, x^0)$ ist für alle Werthe von x zwischen x^0 und x^1 und auch noch für $x = x^0$ von Null verschieden und nebst ihrer ersten Ableitung endlich und stetig.

Die Determinante $\Delta(x, x^0)$ ist folgendermassen zu bilden. Durch Nullsetzen der ersten Variation ergibt sich für y zunächst eine Function mit zwei willkürlichen Constanten, welche nachher mittelst der Grenzwerte, die y für $x = x^0$ und $x = x^1$ annehmen soll, bestimmt werden. Sind u_1 und u_2 die beiden partiellen Ableitungen von y nach jenen Constanten, u_1^0 und u_2^0 die Werthe von u_1 und u_2 für $x = x^0$, so ist $\Delta(x, x^0) = u_1^0 u_2 - u_2^0 u_1$.

Sind von den gemachten Voraussetzungen die nur auf Endlichkeit und Stetigkeit bezüglichen erfüllt, während irgendwo im Intervalle $x^0 x^1$ entweder $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ negativ oder $\Delta(x, x^0)$ gleich Null wird, oder beides, so ist die zweite Variation auch des negativen Vorzeichens fähig*)

$a - \varepsilon$, sowie von $a + \varepsilon$ bis x^1 , gleich Null, von $a - \varepsilon$ bis a aber gleich $\kappa(x - a + \varepsilon)$ und von a bis $a + \varepsilon$ gleich $\kappa(a + \varepsilon - x)$, so wird die zweite Variation gleich $\frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon^3$, die vollständige Differenz

$$\Delta J = \int_{x^0}^{x^1} F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') dx - \int_{x^0}^{x^1} F(x, y, y') dx$$

hingegen gleich $\frac{1}{2} \kappa^2 \varepsilon^3 - \kappa^3 \varepsilon^2$. Der grösste absolute Werth von Δy ist dann $\kappa \varepsilon$, derjenige von $\Delta y'$ ist κ . Mag man nun die Grenzen g und g' für $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ noch so klein annehmen, immer sinkt, wenn man zuvörderst den Werth von κ (und damit von $|\Delta y'|$) kleiner als g' macht und sodann festhält, $\kappa \varepsilon$ (und damit $|\Delta y|$) bei fortgesetzter Verkleinerung von ε schliesslich unter die Grenze g , während die Differenz ΔJ gerade für kleine Werthe von ε schliesslich negativ wird.

*) Der Beweis ist in § 2 meiner bereits genannten Arbeit (diese Annalen Bd. 25) gegeben.

und es findet daher nach den früheren Auseinandersetzungen sicher *kein* Minimum statt, da innerhalb gewisser η -Schaaren sogar ein Maximum vorhanden ist. Wir zeigen jetzt, dass andererseits, wenn *alle* aufgezählten Voraussetzungen erfüllt sind, *sicher* ein Minimum eintritt.

Der Gang des Beweises ist in den Grundzügen folgender. Nach Lagrange ist

$$F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') = F(x, y, y') + g_1 + g_2 + r_3,$$

wo

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \Delta y', \\ 2g_2 &= \frac{\partial^2 F(x, y, y')}{\partial y^2} \Delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \Delta y \Delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Delta y'^2, \\ 6r_3 &= \frac{\partial^3 F(x, y + \vartheta \Delta y, y' + \vartheta \Delta y')}{\partial y^3} \Delta y^3 + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial y'} \Delta y^2 \Delta y' \\ &\quad + 3 \frac{\partial^3 F}{\partial y \partial y'^2} \Delta y \Delta y'^2 + \frac{\partial^3 F}{\partial y'^3} \Delta y'^3, \\ &\quad (0 < \vartheta < 1). \end{aligned}$$

Es wird daher, weil das Integral $\int_0^1 g_1 dx$ für die in Betracht gezogene Function y identisch verschwindet (vorausgesetzt natürlich, dass Δy an den Grenzen x und x verschwindet),

$$(1) \Delta J = \int_0^1 F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') dx - \int_0^1 F(x, y, y') dx = G_2 + R_3,$$

wo zur Abkürzung

$$G_2 = \int_0^1 g_2 dx, \quad R_3 = \int_0^1 r_3 dx$$

gesetzt ist. Wir zeigen nun, dass unter den aufgezählten Voraussetzungen R_3 immer absolut kleiner als G_2 wird, sobald nur die absoluten Werthe von Δy und $\Delta y'$ durchweg unterhalb gewisser Grenzen g und g' liegen; woraus dann unmittelbar folgt, dass bei dieser Beschränkung der Variationen Δy und $\Delta y'$ die Differenz ΔJ immer das (positive) Vorzeichen des ersten Gliedes auf der rechten Seite der Gleichung (1), d. h. der zweiten Variation, hat.

Es werde zunächst G_2 untersucht. Dieses Integral kann nach Jacobi, wenn die gemachten Voraussetzungen sämmtlich erfüllt sind, immer auf die Form

$$(2) \quad G_2 = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} u^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{\Delta y}{u} \right)^2 dx$$

gebracht werden, wo u eine von x bis x , einschliesslich dieser Grenzen, von Null verschiedene und nebst ihrer ersten Ableitung endliche und stetige Function bedeutet, welche linear aus den vorher definirten Functionen u_1 und u_2 zusammengesetzt ist*). Führen wir statt Δy eine Function ξ durch die Gleichung

$$(3) \quad \xi = \frac{\Delta y}{u}$$

ein, so wird also

$$G_2 = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} u^2 \xi'^2 dx,$$

*) In § 2 meiner mehrfach genannten Abhandlung (diese Ann. Bd. 25) habe ich diejenige Transformation der zweiten Variation abgeleitet, in welche die obenstehende Formel (2) für $u = \Delta(x, x)$ übergeht. Die Function $\Delta(x, x)$ verschwindet indessen zwar nicht zwischen x und x , aber für $x = x$ selbst, während in der Formel (2) für unsere jetzigen Zwecke eine Function u gebraucht wird, die im Intervalle x x einen von Null verschiedenen *Minimalwerth* besitzt. Zu einer solchen Function u und dem Beweise der Gültigkeit obiger Formel für dieselbe gelangt man nun auf Grund der im genannten Aufsätze gegebenen Entwicklungen leicht folgendermassen. Bedeutet ξ einen Werth von x , der ausserhalb des Intervalles x x und so nahe bei x liegt, dass auch $\Delta(x, \xi)$ noch im ganzen Intervalle x x von Null verschieden und nebst der ersten Ableitung endlich ist, so gilt die in jenem Aufsätze ausgeführte Transformation auch dann noch, wenn überall x durch ξ ersetzt wird, es wird also auch

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Delta y^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} \Delta y \Delta y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Delta y'^2 \right) dx \\ = \frac{1}{2} \int_0^x \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} \Delta(x, \xi)^2 \left(\frac{d}{dx} \frac{\Delta y}{\Delta(x, \xi)} \right)^2 dx, \end{aligned}$$

wo die Function Δy an den Grenzen ξ und x verschwinden muss. Hieraus ergibt sich aber, wenn Δy von ξ bis x gleich Null und von x bis x ganz willkürlich angenommen und gleichzeitig $\Delta(x, \xi)$ mit u bezeichnet wird, unmittelbar die obenstehende Formel (2), in welcher nun u wirklich eine von x bis x einschliesslich dieser beiden Grenzen von Null verschiedene Function von x ist.

und wenn der kleinste Werth des Ausdruckes $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} u^2$ im Intervalle $\overset{0}{x} \overset{1}{x}$, welcher nach Voraussetzung positiv ist, mit $2a^2$ bezeichnet wird,

$$(4) \quad G_2 > a^2 \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \xi^2 dx.$$

Wir untersuchen zweitens das Restglied $R_3 = \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} r_3 dx$, und zwar

wollen wir auch in diesem Restgliede statt Δy und $\Delta y'$ resp. die Ausdrücke $u\xi$ und $u\xi' + u'\xi$ substituiren. Es entsteht dadurch zunächst für r_3 ein homogener Ausdruck dritten Grades in ξ und ξ' , dessen Coefficienten aus den dritten Ableitungen der Function F für die Argumente $x, y + \vartheta \Delta y, y' + \vartheta \Delta y'$ und aus u und u' zusammengesetzt sind. Den gemachten Voraussetzungen gemäss werden sich dann jedenfalls für die Grössen $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ vorweg solche obere Grenzen bestimmen lassen, dass alle jene Coefficienten im Intervalle $\overset{0}{x} \overset{1}{x}$ endlich und, absolut genommen, kleiner als eine angebbare Constante C^2 bleiben, so lange Δy und $\Delta y'$ jene Grenzen nicht überschreiten. Für alle so beschränkten Functionen Δy wird dann offenbar

$$|r_3| < C^2 (|\xi| + |\xi'|) (\xi^2 + \xi'^2)$$

und demnach

$$|R_3| < C^2 (Z + Z') \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} (\xi^2 + \xi'^2) dx,$$

wo mit Z und Z' die grössten absoluten Werthe bezeichnet sind, welche die Functionen ξ und ξ' zwischen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ annehmen. Die letzte Ungleichung kann noch umgestaltet werden vermittelst des — nachher zu

beweisenden — Satzes, dass das Integral $\int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \xi^2 dx$ niemals grösser als

$$\frac{(\overset{1}{x} - \overset{0}{x})^2}{\pi^2} \int_{\overset{0}{x}}^{\overset{1}{x}} \xi^2 dx$$

ist, wie man auch die an den Grenzen $\overset{0}{x}$ und $\overset{1}{x}$ ver-

schwindende Function ξ im Uebrigen annehmen mag. Es ergibt sich auf diese Weise, wenn noch für $C^2 \left(1 + \frac{(\overset{1}{x} - \overset{0}{x})^2}{\pi^2}\right)$ eine neue Constante c^2 gesetzt wird, schliesslich die Relation

$$(5) \quad |R_3| < c^2 (Z + Z') \int_0^1 \xi^2 dx.$$

Combinirt man die Formeln (4) und (5) mit einander, so erkennt man ohne Weiteres, dass für die Grösse $Z + Z'$ und daher auch für Z und Z' , d. h. für die absoluten Werthe von ξ und ξ' , obere Grenzen h und h' angabbar sind mit der Eigenschaft, dass in der Formel (1) die rechte Seite *sicher* das (positive) Vorzeichen ihres ersten Gliedes G_2 hat, sobald im ganzen Intervalle x zugleich $|\xi| < h$ und $|\xi'| < h'$ ist.

Auf Grund der Gleichungen $\xi = \frac{\Delta y}{u}$, $\xi' = -\frac{u'}{u^2} \Delta y + \frac{\Delta y'}{u}$ wird man nun endlich noch für $|\Delta y|$ und $|\Delta y'|$ solche obere Grenzen g und g' aufstellen können, dass unter der Bedingung $|\Delta y| < g$ und $|\Delta y'| < g'$ immer auch $|\xi| < h$ und $|\xi'| < h'$ wird. Ist nämlich U der (nach Voraussetzung von Null verschiedene) kleinste absolute Werth von u , U' der (nach Voraussetzung endliche) grösste Werth von u' im Intervalle x , so ist zunächst $|\xi| \leq \frac{|\Delta y|}{U}$, $|\xi'| \leq \frac{U'}{U^2} |\Delta y| + \frac{|\Delta y'|}{U}$. Man braucht daher nur, was immer möglich ist, vorerst die Constante g so zu wählen, dass sowohl $\frac{g}{U} < h$, als auch $\frac{U'}{U^2} g < h'$ wird und darauf die Constante g' so zu bestimmen, dass $\frac{g'}{U} < h' - \frac{U'}{U^2} g$ wird*).

Es ist noch der Beweis des Satzes nachzuholen, dass das Integral

$\int_0^1 \xi^2 dx$, falls die Function ξ an den Grenzen x und x verschwindet,

niemals grösser als $\frac{(x - x)^2}{\pi^2} \int_0^1 \xi'^2 dx$ sein kann. Es giebt nämlich unter

allen denjenigen Functionen ξ , für welche das Integral $\int_0^1 \xi^2 dx$ einen

vorgeschriebenen Werth A annimmt, eine, welche das Integral $\int_0^1 \xi'^2 dx$

*) Wir bemerken, dass die Constanten g und g' desto kleiner werden, je kleiner der mit U bezeichnete Minimalwerth von $|u|$ wird, d. h. wenn wir uns die obere Integrallgrenze x auf der Curve y verschoben denken und dabei die in einer früheren Anmerkung gegebene Bestimmung der Function u im Auge behalten, je näher x an diejenige Stelle rückt, wo die Determinante $\Delta(x, x)$ zum ersten Male den Werth Null annimmt. Hieraus erklärt sich die anderweitig bewiesene Thatsache, dass beim Ueberschreiten jener Stelle das Minimum des Integrals J überhaupt aufhört.

zu einem Maximum macht. Man findet dieselbe nach den bekannten Regeln der Variationsrechnung gleich $\sqrt{A} \frac{\sqrt{2} \left(\frac{1-x}{\pi} \right)}{\pi} \sin \left(\frac{x - \frac{0}{\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{0}{\pi}} \pi \right)$ und

kann mittelst der Jacobi'schen Transformation der zweiten Variation, auf welche sich in diesem Falle die *Gesammtvariation* des Integrales reducirt, zeigen, dass der jener Function entsprechende Werth von

$\int_0^1 \xi^2 dx$, nämlich $A \frac{(1-x)^2}{\pi^2}$, wirklich der grösstmögliche ist. Die

Jacobi'sche Transformation beruht auf folgender Formel, in welcher man eine von der Theorie der Variation ganz unabhängige, für beliebige Functionen ξ und ω gültige Identität erkennen wird:

$$\begin{aligned} \frac{(1-x)^2}{\pi^2} \int \xi'^2 dx - \int \xi^2 dx &= \frac{(1-x)^2}{\pi^2} \int \left(\xi' - \omega' \frac{\xi}{\omega} \right)^2 dx \\ &\quad - \int \left(\omega + \frac{(1-x)^2}{\pi^2} \omega'' \right) \xi \frac{\xi}{\omega} dx + \frac{(1-x)^2}{\pi^2} \xi \omega' \frac{\xi}{\omega}. \end{aligned}$$

Setzt man hier $\omega = \sin \left(\frac{x - \frac{0}{\pi}}{\frac{1}{\pi} - \frac{0}{\pi}} \pi \right)$ und geht gleichzeitig von den unbestimmten zu den bestimmten Integralen über (wobei zu berücksichtigen ist, dass der Quotient $\frac{\xi}{\omega}$ auch an den Grenzen x und x endlich bleibt, da ξ daselbst verschwindet und ξ' endlich ist), so erhält man die Jacobi'sche Transformation

$$\frac{(1-x)^2}{\pi^2} \int_0^1 \xi'^2 dx - \int_0^1 \xi^2 dx = \frac{(1-x)^2}{\pi^2} \int_0^1 \left(\xi' - \omega' \frac{\xi}{\omega} \right)^2 dx.$$

Die rechte Seite ist niemals negativ, folglich kann auch die linke es

nicht sein, das heisst: das Integral $\int_0^1 \xi^2 dx$ ist bei jeder beliebigen Wahl

der Function ξ , vorausgesetzt, dass dieselbe an den Grenzen x und x verschwindet und eine endliche Ableitung besitzt, höchstens gleich

$$\frac{(1-x)^2}{\pi^2} \int_0^1 \xi'^2 dx. \quad \text{W. z. b. w.}$$

Wir formuliren zum Schluss das Hauptresultat unserer Untersuchung in folgendem Satze:

Es sei für eine bestimmte Function y die erste Variation des Integrales $J = \int_0^1 F(x, y, y') dx$ (in welchem die Grenzwerte von y für $x = 0$ und $x = 1$ als gegeben anzusehen sind) identisch gleich Null; es seien ferner im Intervalle x die partiellen Ableitungen von $F(x, y, y')$ bis zur dritten Ordnung, sowie die Determinante $\Delta(x, x)$ nebst ihrem Differentialquotienten endlich und stetig. Hat dann $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ im Intervalle x einen positiven Minimalwerth, und verschwindet die Determinante $\Delta(x, x)$ weder zwischen x und x noch an der Stelle $x = x$ selbst, so ist nicht nur die zweite Variation beständig positiv, sondern es findet auch ein Minimum des Integrales J statt, in dem Sinne, dass die Differenz

$$\Delta J = \int_0^1 F(x, y + \Delta y, y' + \Delta y') dx - \int_0^1 F(x, y, y') dx$$

positiv wird für jede Function Δy , deren absoluter Betrag überall unterhalb einer gewissen Grenze g bleibt, während der absolute Betrag der Ableitung $\Delta y'$ sich durchweg unter einer zweiten Grenze g' hält.

Ist dagegen entweder $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ irgendwo im Intervalle x negativ, oder verschwindet $\Delta(x, x)$ irgendwo im Inneren desselben Intervalles, so ist die zweite Variation auch des negativen Vorzeichens fähig, und es tritt schon aus diesem Grunde kein Minimum des Integrales J im angegebenen Sinne ein.

Der zweite Theil des vorstehenden Satzes ist in dieser Note nicht bewiesen, sondern aus meinem Aufsätze, diese Ann. Bd. 25, übernommen und nur der Vollständigkeit wegen hinzugefügt. Der erste Theil hingegen bildet eine wesentliche Ergänzung zu den in jenem Aufsätze angestellten Untersuchungen. Erst durch ihn wird der a. a. O. immer ohne Weiteres gezogene Schluss von dem Vorzeichen der zweiten Variation auf das Stattfinden eines Minimums resp. Maximums begründet und inhaltlich präcisirt.

Von einer Ausdehnung des Satzes auf den allgemeinen, in § 3 der genannten Arbeit behandelten Fall sehe ich an dieser Stelle ab.