Delle funzioni regolari in un'area connessa qualsivoglia a distanza finita.

(Di GIULIO ASCOLI, a Milano.)

1. **D**irò regolare una funzione $f(x, y)$ dei punti di un'area piana connessa ad uno strato A posta a distanza finita, quando la superficie A possa dividersi in un numero limitato di pezzi B_t ($t = 1, 2, \dots, m$; $m \geq 1$), in ciascuno dei quali la $f(x, y)$ si comporti in una delle quattro note maniere (*). Ad una tale funzione si accennerà col simbolo (I, II, III, IV). Suppongo poi tra loro sconnesse due aree B_σ e B_τ ($\sigma \geq \tau$), nelle quali la data funzione è della stessa specie, laddove l'ente A cade nel primo quadrante e la $f(x, y)$ non raggiunge dei valori nulli o negativi. Mediante una scelta opportuna degli assi si può soddisfare alle due ultime condizioni.

Consideriamo ora il modo di comportarsi della funzione data da ambo le parti del ramo primitivo e non decrescente $L - \varepsilon$ (**), essendo L un elemento che separa le due aree B_σ e B_τ ($\sigma \geq \tau$), mentre non si può assegnare un ramo primitivo, di cui l'ente L sia una parte, il quale appartenga in pari tempo alle due linee C_{B_σ} e C_{B_τ} . Con la notazione $L - \varepsilon$ indico, come al solito, la linea L , quando si trascuri ad ognuno dei suoi estremi un tratto piccolo quanto si vuole. L'ente L potrà anche essere un tratto di retta parallelo ad uno dei due assi, come è manifesto; però in seguito si accennerà in modo speciale a questo fatto.

È subito visto che la linea L non limiterà due aree in ognuna delle quali la funzione studiata è di specie pari od impari, mentre per ogni punto h

(*) Vedi tutta la mia Memoria inserita nel volume precedente di questi Ann

(**) Vedi il § 1 del n.º 5 della stessa Memoria.

dell'ente $L - 0$ esce una linea $f(x, y) = C$, la quale, considerata nelle vicinanze del punto h e da ambo le parti, si proietta semplicemente sopra uno degli assi coordinati. Ciò si verifica, perchè nell'ipotesi opposta la linea $f(x, y) = C$ uscente dall'elemento h sarebbe da una parte e dall'altra della curva $L - \varepsilon$ ognora crescente oppure decrescente all'aumentare della ascissa, laddove ogni elemento $f(x, y) = C$ si proietta in modo semplice sopra uno degli assi ed in questo caso quindi anche sull'altro; la $f(x, y)$ sarebbe di conseguenza della stessa specie in B_ε ed in B_τ , la qualcosa è contraria all'ipotesi.

Se di più si ammette che la funzione $f(x, y)$ sia crescente dal primo al secondo estremo della linea L , daremo origine al quadro in appresso I), di cui il significato è palese, purchè si abbiano presenti le osservazioni che seguono.

Con la notazione $+L$ indicherò un ramo primitivo ognora crescente con l'ascissa, laddove il simbolo $-L$ accenna pure ad un elemento primitivo, il quale però decresce all'aumentare della variabile x .

Il segno $+L^{(+)}$ dirà che lungo l'ente $+L$ è fissata una successione continua di valori ognora crescenti insieme all'ascissa x ed analogo significato va attribuito alla notazione $-L^{(+)}$. Con la scrittura II, $+L^{(+)}$, I accenno poi al fatto che alla destra dell'ente $+L^{(+)}$, percorso in guisa, che la funzione $f(x, y)$ aumenti, la espressione stessa $f(x, y)$ è di prima specie e di seconda alla sinistra. Ed ora parmi facile l'intelligenza del quadro in discorso.

$$\begin{array}{ll} \text{I)} & \begin{array}{ll} {}^1) \text{ II, } +L^{(+)}, \text{ I;} & {}^2) \text{ I, } +L^{(+)}, \text{ II;} \\ {}^3) \text{ I, } +L^{(+)}, \text{ IV;} & {}^4) \text{ IV, } +L^{(+)}, \text{ I.} \end{array} \end{array}$$

Chiamo B_ε quella parte dell'area A in cui la $f(x, y)$ è di una sola specie e che giace alla destra dell'elemento $+L$, percorso in guisa, che l'ascissa cresca. L'ente B_τ cada invece alla sinistra del ramo primitivo $+L$.

Nella figura 1) la funzione $f(x, y)$ è di seconda specie in B_τ e di prima in B_ε , e da ogni punto dell'arco $L - 0$ esce una linea $f(x, y) = C$, che ha ivi un massimo rispetto all'asse X , sopra il quale si proietta semplicemente. Nel disegno successivo l'insieme $f(x, y)$ che passa per un elemento della curva $L - \varepsilon$ ha in quest'ultimo un minimo relativamente alla retta $y = 0$, su cui si specchia in maniera univoca. Se poi la $f(x, y)$ è di prima specie in B_τ e di quarta in B_ε , da ogni punto della curva $L - \varepsilon$ esce una linea $f(x, y) = C$, la quale ha un massimo rispetto alla retta $x = 0$, sulla quale si proietta in modo semplice, mentre si verifica l'opposto, se la $f(x, y)$ è di quarta specie in B_τ e di prima in B_ε .

La funzione contemplata non può essere di terza specie da una parte dell'ente $L - 0$, perchè essa è crescente lungo $+L$; il quadro I è dunque completo nella ipotesi che la linea $f(x, y) = C$ si progetti in modo semplice sopra uno degli assi nelle vicinanze del punto in cui interseca l'ente L .

Se l'elemento L fosse un tratto parallelo all'asse Y non potrebbero verificarsi che gli eventi 1) e 2), e gli altri due soltanto quando l'intervallo fosse parallelo alla retta $y = 0$.

Sia ora la funzione $f(x, y)$ decrescente lungo il ramo $+L$, laddove ogni linea $f(x, y)$, la quale contiene un punto dell'elemento $L - 0$ ha un'immagine semplice sopra uno degli assi coordinati. In tale ipotesi daremo origine al quadro:

$$\begin{array}{ll} \text{II)} & \begin{array}{ll} {}^1) \text{ III, } +L^{(-)}, \text{ II;} & {}^2) \text{ II, } +L^{(-)}, \text{ III;} \\ {}^3) \text{ IV, } +L^{(-)}, \text{ III,} & {}^4) \text{ III, } +L^{(-)}, \text{ IV.} \end{array} \end{array}$$

Nelle figure 1) e 2) l'elemento L potrà venir sostituito da un intervallo di retta parallelo all'asse X , all'altro nelle ultime due.

È superfluo poi l'avvertire che nella figura 1) la $f(x, y)$ è di seconda specie alla destra dell'ente $+L^{(-)}$ percorso in guisa, che la funzione data cresca lungo il medesimo.

Quando si supponga la $f(x, y)$ costante lungo $+L$, la qual cosa si esprimerà con la notazione $+\overline{L}$, avremo lo specchio:

$$\text{III)} \quad \begin{array}{ll} {}^1) \text{ II, } +\overline{L}, \text{ IV;} & {}^2) \text{ IV, } +\overline{L}, \text{ II.} \end{array}$$

È chiaro che in questo quadro l'ente $+L$ non può ridursi ad un tratto parallelo ad uno degli assi coordinati. Nella prima figura dello stesso specchio ogni punto della linea $L - 0$ è un minimo della espressione $f(x, y)$; nella seconda un massimo. Si suppone che nel disegno 1) la $f(x, y)$ sia di quarta specie alla destra dell'ente L percorso in guisa che l'ascissa cresca.

2. Sia adesso la linea L sempre decrescente e la funzione $f(x, y)$ cresca lungo la medesima all'aumentare dell'ascissa. In tale ipotesi le cose stanno come lo indica la tabella:

$$\begin{array}{ll} \text{IV)} & \begin{array}{ll} {}^1) \text{ I, } -L^{(+)}, \text{ IV;} & {}^2) \text{ IV, } -L^{(+)}, \text{ I;} \\ {}^3) \text{ IV, } -L^{(+)}, \text{ III,} & {}^4) \text{ III, } -L^{(+)}, \text{ IV.} \end{array} \end{array}$$

Nei due primi disegni il ramo L potrebbe venir surrogato da un segmento parallelo all'asse X , negli altri da un tratto normale a quest'ultimo.

Quando poi la $f(x, y)$ decresce lungo $-L$ aumentando l'ascissa, avremo le figure dello specchio:

$$\begin{aligned} \text{V)} \quad & {}^1) \text{ II, } -L^{(-)}, \text{ I;} \quad {}^2) \text{ I, } -L^{(-)}, \text{ II;} \\ & {}^3) \text{ III, } -L^{(-)}, \text{ II;} \quad {}^4) \text{ II, } -L^{(-)}, \text{ III.} \end{aligned}$$

Nel caso che la funzione contemplata fosse costante nell'ente $-L$, andrebbero considerati i due disegni che seguono, nel primo dei quali la $f(x, y)$ è di prima specie in B_+ . È chiaro quindi che nella figura 1) la nostra funzione avrà un minimo in ogni punto dell'arco $L = 0$, laddove nell'altra essa avrà un massimo,

$$\text{VI)} \quad {}^1) \text{ I, } -\overline{L}, \text{ III;} \quad \text{III, } -\overline{L}, \text{ I.}$$

Osservando con attenzione le tabelle I), II), IV), V) e la figura in appresso, troveremo una regola assai semplice per compendiare i risultati ottenuti

$$\begin{array}{ccccc} - & +, & + & Y, & + & + \\ - & X, & O, & + & X \\ - & -, & - & Y, & + & -. \end{array}$$

Se io percorro il verso positivo dell'asse Y , ho alla destra il primo quadrante ed alla sinistra il secondo, ed analoghe osservazioni si possono fare rispetto alle altre direzioni degli assi.

Ciò premesso, se il ramo L separa un'area in cui la f è di prima specie da un'altra nella quale è di seconda e se la prima è alla sua destra, quando si percorra in guisa, che la $f(x, y)$ aumenti, per ogni punto della linea $L - \varepsilon$ esce una varietà $f(x, y) = C$, la quale si proietta semplicemente sull'asse X ed ha in esso un massimo ossia accenna al verso positivo dell'asse Y (*) [I), 1); V), 1)].

Nel caso contemplato diremo che la $f(x, y)$ si comporta in modo naturale dalle due bande della linea $L = 0$.

Se all'incontro il ramo L limitasse un elemento in cui la $f(x, y)$ è di prima specie da un altro nel quale è di seconda, e se il primo si trovasse alla sinistra della varietà L percorsa in guisa, che la funzione $f(x, y)$ cresca, per ogni punto della linea $L - \varepsilon$ uscirebbe un insieme della forma $f(x, y) = C$, che si specchia in maniera semplice sulla retta $y = 0$ ed ha in esso un minimo, accenna cioè al verso negativo dell'asse Y [I), 2); V), 2)].

(*) Mi sia concesso l'uso di questa frase, il cui significato è palese.

In tale ipotesi diremo che la funzione contemplata *si contiene in modo non naturale dalle due parti dell'ente L .*

Se poi osserviamo con attenzione le coppie di disegni

$$[(II), 1); V), 3)] - [(II), 2); V), 4)]; \quad [(II), 3); IV), 4)] - [(II), 4); IV), 3)]; \\ [I), 3); IV), 1)] - [I), 4); IV), 2)],$$

avvertiremo tosto la verità della proposizione:

Ogni qualvolta la funzione studiata si comporta nel modo naturale dalle due parti dell'elemento $L - 0$ guardato nel verso in cui la $f(x, y)$ cresce, la linea $f(x, y) = \text{cost.}$ si proietta nelle vicinanze del punto in cui incontra l'arco L semplicemente sulla normale a quell'asse che divide i quadranti analoghi ed accenna a quel verso di quest'ultimo rispetto al quale si ha la disposizione naturale. Se poi la $f(x, y)$ si contiene in modo non spontaneo dalle due bande dell'ente $L - 0$, l'elemento $f(x, y) = C$ ha un'immagine semplice sull'asse ora ora indicato ed accenna a quel verso dell'altro, che è contrario alla maniera spontanea.

In ciascuno dei quadri I), II), IV), V) l'elemento primitivo L potrebbe esser sostituito da un ramo semplice, il quale però non conterrebbe che un numero limitato (≥ 0) di tratti paralleli ad uno degli assi soltanto. Così, ad esempio, nei due primi disegni dello specchio I) l'ente L potrebbe esser dotato di uno o più segmenti paralleli all'asse Y ma non all'altro, laddove negli altri due i tratti in discorso dovrebbero essere paralleli alla retta $y = 0$.

3. Consideriamo ora il caso che nei pressi di un punto dell'elemento $L - 0$ la linea $f(x, y) = C$ non si proietti semplicemente sopra veruno dei due assi coordinati. In tale ipotesi daremo origine al quadro:

$$\begin{array}{ll} I.) & \begin{array}{ll} 1) II, +L^{(+)}, IV; & 2) IV, +L^{(+)}, II; \\ 3) IV, +L^{(-)}, II; & 4) II, +L^{(-)}, IV; \\ 5) I, -L^{(+)}, III; & 6) III, -L^{(+)}, I; \\ 7) III, -L^{(-)}, I; & 8) I, -L^{(-)}, III. \end{array} \end{array}$$

In questo caso non può tenersi parola nè di massimo nè di minimo rispetto ad uno degli assi coordinati, perchè la linea $f(x, y) = C$ non si proietta semplicemente sopra veruna delle due rette $xy = 0$ nelle vicinanze del punto in cui incontra il ramo $L - 0$. Facendo attenzione all'ultimo specchio possiamo quindi enunciare la proposizione:

L'ente $f(x, y) = C$ accenna ognora nei pressi del punto in cui incontra la linea L a quel verso di quest'ultima lungo il quale la funzione $f(x, y)$ cresce, se quest'ultima è disposta nel modo naturale rispetto all'elemento L , in caso opposto indica il verso contrario.

Suppongo adesso che lungo il ramo $+L$ la $f(x, y)$ non sia ognora crescente o decrescente all'aumentare dall'ascissa oppure sempre costante. In altre parole, ammetto che il tratto L si possa dividere in un numero limitato di parti $m_1, m_2, \dots, m_p$ ($p > 1$), procedendo sopra L in guisa, che l'ascissa cresca, per modo, che in due successive la $f(x, y)$ non si comporti nella stessa maniera.

Nella nuova ipotesi la $f(x, y)$ non potrà essere che di seconda specie da una parte dell'ente $+L$ e di quarta dall'altra dando così origine allo specchio:

$$\text{II}_1) \qquad {}^1) \text{ II, } +L, \text{ IV}; \qquad {}^2) \text{ IV, } +L, \text{ II,}$$

nel quale il simbolo $+L$ accenna al fatto che la funzione contemplata non si comporta sempre nella stessa guisa lungo l'arco L , laddove la $f(x, y)$ è di specie quarta in B_* nel primo disegno e di seconda nell'altro. Circa poi alla maniera di contenersi della funzione $f(x, y)$ dalle due parti dell'ente L giova rammentare l'ultima proposizione aggiungendovi le osservazioni che seguono.

Intorno ad un tratto $q (\geq 0)$ di minimo della $f(x, y)$ considerata nella sua dipendenza dalla curva $L - 0$ esiste nell'ipotesi del disegno $[\text{II}_1), 1]$ una varietà di linee chiuse, che tendono all'intervallo q , lungo ciascuna delle quali la $f(x, y)$ si mantiene costante. L'ente q può quindi considerarsi come un minimo anche per la funzione $f(x, y)$ considerata nella sua dipendenza dai punti dell'area A . Se poi sempre nella ipotesi del disegno $[\text{II}_1), 1]$ l'intervallo q fosse un massimo della nostra funzione considerata semplicemente lungo $L - 0$, ogni punto del tratto $q - 0$ sarebbe un minimo per la funzione data, nè la linea $f(x, y) = C$ si comporterebbe nel modo detto poco fa nei pressi del segmento q , tenderebbe bensì con una sua parte al medesimo, la quale però è formata da due tratti sconnessi tra loro.

Analogamente, guardando il disegno $[\text{II}_1), 2]$, avvertiremo tosto che, se il tratto $q (\geq 0)$ è un massimo per la $f(x, y)$ nella sua dipendenza dalla curva $L - 0$, sarà altresì tale per la funzione data ed esisterà un insieme di linee chiuse, che si riducono all'ente q , lungo ciascuna delle quali la $f(x, y)$ non muta di valore. Se all'incontro, stando ognora lo stesso disegno, il tratto $q (\geq 0)$

è un minimo della $f(x, y)$ rispetto al tratto $L - 0$, ogni punto dell'ente $q - 0$ è un massimo della $f(x, y)$.

Quando l'elemento L sia decrescente, si dovrà contemplare il quadro:

$$\text{III}_1) \quad {}^1) \text{ I, } -L, \text{ III}; \quad {}^2) \text{ III, } -L, \text{ I,}$$

circa al quale vanno fatte delle osservazioni analoghe a quelle relative allo specchio II_1).

Possiamo quindi enunciare i due teoremi:

Un tratto $q (\geq 0)$ di minimo della $f(x, y)$ nella sua dipendenza dall'arco $+L - 0$ è pure tale per la funzione data, se quest'ultima si contiene in modo naturale dalle due bande dell'ente $+L$ guardato nel verso in cui cresce l'ascissa, ed una asserzione analoga si faccia di un massimo, essendo però inverso il modo di comportarsi della $f(x, y)$ dalle due parti dell'ente $+L$.

Il secondo teorema è conforme al precedente, quando in esso si muti l'elemento $+L$ nell'altro $-L$.

4. Studiato il modo di contenersi della funzione $f(x, y)$ dalle due parti della linea $L - 0$, la quale appartenga in pari tempo alle due curve C_{B_σ} e C_{B_τ} ($\sigma \geq \tau$), vediamo adesso come essa si comporti ai suoi estremi. Potranno darsi due eventi, il termine contemplato, che dirò c , dell'ente L è *soltanto* l'estremo di due rami primitivi delle linee C_{B_σ} e C_{B_τ} , i quali considerati insieme non formano al certo un elemento primitivo, oppure tal fatto non ha luogo. Se mi muovo nella prima ipotesi lungo L verso c in guisa che l'ascissa cresca, ho dall'una parte, e precisamente alla destra, l'area B_σ e dall'altra l'elemento B_τ , mentre lo stesso avviene se continuo il mio cammino dopo il punto c nella curva C_{B_σ} . Chiamo poi per semplicità l una parte connessa del ramo L dotata di un termine in c e con l_1 un altro tratto primitivo connesso delle due curve C_{B_σ} e C_{B_τ} che è unito al primo solamente mediante il punto c . È chiaro che si può ammettere che lungo il segmento l verso c la funzione $f(x, y)$ sia ognora crescente o decrescente oppure costante, e la stessa cosa si dica dell'ente l_1 .

Ora, se io posso tracciare pel punto O dell'area $A - 0$ due rami primitivi, che insieme ad un terzo non uscente dal medesimo mi limitino una parte semplicemente connessa B dell'elemento A , e se la $f(x, y)$ non raggiunge in B dei valori più grandi che in O , diremo che la funzione data ha un massimo parziale in O rispetto alla superficie B . Analogamente si definisce il *minimo parziale*.

Ciò premesso, se gli enti l ed l_1 sono crescenti andando verso c , daremo origine alla tabella (*):

¹⁾ II, $\overline{+l_1^{(+)}, I, +l^{(+)}}$, II;	²⁾ IV, $\overline{+l_1^{(+)}, I, +l^{(+)}}$, IV;
³⁾ I, $\overline{+l_1^{(+)}, II, +l^{(+)}}$, I;	⁴⁾ IV, $\overline{+l_1^{(+)}, II, +l^{(+)}}$, IV;
⁵⁾ I, $\overline{+l_1^{(+)}, IV, +l^{(+)}}$, I;	⁶⁾ II, $\overline{+l_1^{(+)}, IV, +l^{(+)}}$, II;
⁷⁾ III, $\overline{+l_1^{(-)}, II, +l^{(-)}}$, III;	⁸⁾ IV, $\overline{+l_1^{(-)}, II, +l^{(-)}}$, IV;
⁹⁾ II, $\overline{+l_1^{(-)}, III, +l^{(-)}}$, II;	¹⁰⁾ IV, $\overline{+l_1^{(-)}, III, +l^{(-)}}$, IV;
¹¹⁾ II, $\overline{+l_1^{(-)}, IV, +l^{(-)}}$, II;	¹²⁾ III, $\overline{+l_1^{(-)}, IV, +l^{(-)}}$, III;
¹³⁾ IV, $\overline{+l_1^{(-)}, II, +l^{(-)}}$, IV;	¹⁴⁾ II, $\overline{+l_1^{(-)}, IV, +l^{(-)}}$, II.

Ed alle due ultime figure si potrebbero aggiungere quelle che si ottengono scambiando gli enti $+l_1^{(+)}$, $+l^{(-)}$ per ordine negli altri $+l_1^{(-)}$, $+l^{(+)}$.

In ognuno dei primi sei disegni l'ente c è un massimo parziale rispetto ad un'area di semplice connessione limitata in parte dalle curve l ed l_1 e sita nel terzo quadrante di c , nelle sei successive all'incontro un minimo.

Allo specchio ora contemplato vanno aggiunti altri tre, i quali nascono supponendo che i due rami l ed l_1 cadano successivamente ed in pari tempo nel quarto, primo e secondo quadrante. Questi quattro quadri si indicheranno per ordine con le notazioni I_3 , I_1 , I_1 , I_2 .

Giova contemplare anche la tabella che segue, quando i due elementi l ed l_1 non cadono in uno stesso quadrante.

¹⁾ II, $\overline{+l^{(+)}}^c$, I, $\overline{-l_1^{(-)}}^c$, II;	²⁾ I, $\overline{+l^{(+)}}^c$, II, $\overline{-l_1^{(-)}}^c$, I;
³⁾ IV, $\overline{+l^{(+)}}^c$, I, $\overline{-l_1^{(+)}}^c$, IV;	⁴⁾ I, $\overline{+l^{(+)}}^c$, IV, $\overline{-l_1^{(+)}}^c$, I;
⁵⁾ IV, $\overline{+l^{(-)}}^c$, III, $\overline{-l_1^{(+)}}^c$, IV;	⁶⁾ III, $\overline{+l^{(-)}}^c$, IV, $\overline{-l_1^{(+)}}^c$, III;
⁷⁾ III, $\overline{+l^{(-)}}^c$, II, $\overline{-l_1^{(-)}}^c$, III;	⁸⁾ II, $\overline{+l^{(-)}}^c$, III, $\overline{-l_1^{(-)}}^c$, II.

Se si osserva che i numeri 1, 2, 3, 4 dànno luogo alle sei combinazioni 1, 2; 1, 3; 1, 4; 2, 3; 2, 4; 3, 4, avvertiremo tosto che si possono formare altre cinque tavole analoghe alla precedente, che torna acconcio indicare col

(*) Il significato di questa tabella e delle successive mi sembra chiaro, quando si osservi che con le notazioni $\overline{\quad}^c$, $\overline{\quad}$, $\overline{\quad}^c$, $\overline{\quad}$ accenno per ordine ai quattro quadranti.

simbolo $I_{3,4}$. Di conseguenza, alle altre si accennerà coi segni $I_{1,2}$, $I_{1,3}$, $I_{1,4}$, $I_{2,3}$, $I_{2,4}$, dalle quali però vanno tolti i quadri $I_{1,3}$, $I_{2,4}$, poichè in essi gli elementi l ed l_1 formano un solo ramo primitivo, il che va per ipotesi escluso.

Per le ricerche precedenti possiamo quindi enunciare il teorema (*):

La funzione contemplata non ammette un massimo od un minimo relativo in un punto dell'area $A - 0$, nel quale si incontrano soltanto due rami primitivi della curva $\frac{1}{2}(\Sigma C_{B_s} - C_A)$, che non formano un ramo semplice. Può all'incontro essere dotata in esso di un massimo o di un minimo parziale.

In alcune delle figure di ciascuno dei quadri $I_{1,2}$, $I_{1,4}$, $I_{2,3}$, $I_{3,4}$ uno soltanto degli enti l ed l_1 potrebbe cadere sull'asse Y oppure sull'altro. Così, ad esempio, nella figura 1) dello specchio $I_{3,4}$ soltanto una delle linee l_1 ed l a piacere potrebbe ridursi ad un intervallo della retta $x = 0$, ed in allora si otterrebbe un caso limite di una delle figure del disegno I_1 oppure dell'altro I_3 per ordine.

Contempliamo ora il caso che la $f(x, y)$ sia costante lungo uno soltanto degli elementi l ed l_1 , chè per le nostre ipotesi circa alla medesima non può esser tale in amendue. Stando in tal modo le cose, i due enti l ed l_1 cadranno di necessità in uno stesso quadrante, poichè, se ciò non avesse luogo, ossia se uno degli elementi l fosse in un quadrante e l'altro nel contiguo la $f(x, y)$ dovrebbe essere della stessa specie da una banda e dall'altra della curva $l + l_1$. Infatti, se fosse, ad esempio $\overline{+l}^c, \overline{-l_1^{(-)}}^c$, la $f(x, y)$ non potrebbe essere nè di prima nè di terza specie nelle vicinanze del punto c in quanto non muta nell'arco $+l$ sito nel terzo quadrante, non sarebbe poi di quarta perchè la $f(x, y)$ decresce lungo $-l_1$ al crescere della variabile x . Adunque, vicino al punto c dovrebbe essere solamente di seconda, la qual cosa contrasta con la ipotesi che in due aree contigue B_ϵ e B_τ la $f(x, y)$ sia di specie diversa.

Supposto quindi che le curve l ed l_1 cadano nel terzo quadrante, si dovrà contemplare il quadro:

$$\begin{array}{ll} 1) \text{ II, } \overline{+l_1^{(+)}}^c, \text{ IV, } \overline{+l}^c, \text{ II;} & 2) \text{ II, } \overline{+l_1}^c, \text{ IV, } \overline{+l^{(+)}}^c, \text{ II;} \\ 3) \text{ IV, } \overline{+l_1^{(+)}}^c, \text{ II, } \overline{+l}^c, \text{ IV;} & 4) \text{ IV, } \overline{+l_1}^c, \text{ II, } \overline{+l^{(+)}}^c, \text{ IV;} \\ 5) \text{ IV, } \overline{+l_1^{(-)}}^c, \text{ II, } \overline{+l}^c, \text{ IV;} & 6) \text{ IV, } \overline{+l_1}^c, \text{ II, } \overline{+l^{(-)}}^c, \text{ IV;} \\ 7) \text{ II, } \overline{+l_1^{(-)}}^c, \text{ IV, } \overline{+l}^c, \text{ II;} & 8) \text{ II, } \overline{+l_1}^c, \text{ IV, } \overline{+l^{(-)}}^c, \text{ II.} \end{array}$$

(*) Vedi l'ultimo paragrafo della precedente Memoria.

Se indico questo quadro con la notazione S_3 , sarà conveniente accennare a quelli che si riferiscono nello stesso modo agli altri tre quadranti coi simboli S_4 , S_1 , S_2 girando da sinistra a destra.

Per ultimo, osservo che nessuno dei due elementi l ed l_1 del quadro S_t ($t = 1, 2, 3, 4$) può ridursi ad un tratto parallelo ad uno degli assi. Quanto al ramo in cui la $f(x, y)$ è costante la cosa è manifesta, circa all'altro giova rammentare che la funzione contemplata non è dalle sue due parti di specie contigue.

5. Consideriamo ora un punto O dell'area $A = 0$, nel quale concorrono più di due rami primitivi della curva $\frac{1}{2}(\Sigma C_{B_s} - C_A) \equiv D$. Se contemplo uno di questi ultimi avverto subito che la $f(x, y)$ si comporta in maniera diversa dalle sue due bande, perchè non si possono assegnare per ipotesi due aree tra loro sconnesse B_σ e B_τ ($\sigma \geq \tau$) per modo, che la $f(x, y)$ si contenga egualmente in entrambe.

A portare un po' di luce circa il modo di comportarsi della funzione $f(x, y)$ intorno all'elemento O giovano le figure seguenti, nelle quali secondo la fatta convenzione la linea l_1 è alla sinistra dell'ente l .

$$\begin{array}{lll}
 1) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ I, } + l^{(+)}}; & 2) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ II, } + l^{(+)}}; & 3) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ IV, } + l^{(+)}}; \\
 4) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ II, } + l^{(-)}}; & 5) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ III, } + l^{(-)}}; & 6) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ IV, } + l^{(-)}}; \\
 7) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ II, } + l^{(-)}}; & 8) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ IV, } + l^{(-)}}; & 9) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ II, } + l^{(+)}}; \\
 10) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ IV, } + l^{(+)}}; & 11) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ II, } + \bar{l}}; & 12) \underbrace{0 \mid + l_1^{(+)}, \text{ IV, } + \bar{l}}; \\
 13) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ II, } + \bar{l}}; & 14) \underbrace{0 \mid + l_1^{(-)}, \text{ IV, } + \bar{l}}; & 15) \underbrace{0 \mid + \bar{l}_1, \text{ II, } + l^{(+)}}; \\
 16) \underbrace{0 \mid + \bar{l}_1, \text{ IV, } + l^{(+)}}; & 17) \underbrace{0 \mid + \bar{l}_1, \text{ II, } + l^{(-)}}; & 18) \underbrace{0 \mid + \bar{l}_1, \text{ IV, } + l^{(-)}}.
 \end{array}$$

Nei disegni 1), 2) e 3) del quadro precedente abbiamo un minimo della funzione $f(x, y)$ in O considerata nella sua dipendenza dai punti di un'area elementare limitata in parte dagli enti l ed l_1 e da un'altra linea che cade nel primo quadrante dell'elemento O . Nelle tre figure successive all'incontro si ha un massimo. Nei disegni 1), 5), 7), 10), ad esempio, il ramo l_1 potrebbe cadere sull'asse Y , laddove l'altro l potrebbe adagiarsi sulla retta $y = 0$.

Al quadro ora contemplato sono da aggiungere altri tre, i quali nascono nella ipotesi che i nostri due rami cadano per ordine nel secondo, terzo e quarto quadrante. Ed è manifesto che in taluni dei disegni di questi quadri amendue gli enti l ed l_1 potrebbero cadere sull'asse X od Y uno soltanto ed anche nessuno dei due.

6. Giovandosi degli specchi di cui è parola nel paragrafo precedente risulta facile lo studio del modo di comportarsi della funzione data nei pressi di un punto O della linea $D \equiv \frac{1}{2} (\sum_s C_{B_s} - C_A)$, nel quale concorrono m (> 2) rami primitivi.

Suppongo prima che in O non cada un massimo o minimo parziale nè uno relativo della funzione $f(x, y)$ e che dal medesimo non esca un ramo in cui la $f(x, y)$ si mantiene costante od un tratto rettilineo parallelo ad uno degli assi. Nella fatta ipotesi avverto subito che nell'interno del primo quadrante del punto O e nelle sue immediate vicinanze si possono verificare soltanto i quattro casi

- ¹⁾ II, IV, II, IV, ..., IV; ²⁾ II, IV, ..., II; ³⁾ IV, II, IV, ..., II;
⁴⁾ IV, II, ..., IV,

quando si faccia astrazione dalle due aree B , in una delle quali penetra la parallela all'asse Y , mentre nell'altra si interna la parallela alla retta $y = 0$ uscente dall'elemento O .

Il primo evento ed il terzo si verificano quando da O esce un numero impari (≥ 3) di rami primitivi siti *entro* il primo quadrante, gli altri se il numero degli elementi i quali hanno un estremo in O è pari. E se esso è eguale a due, la $f(x, y)$ è in un'area elementare sita nel primo quadrante del punto O di specie II o IV. Analogamente si dica della seconda, terza e quarta regione rispetto alle specie I, III; II, IV; I, III per ordine.

Se due rami successivi l ed l_1 della curva D uscenti dal punto O cadono entro due quadranti distinti e contigui, la $f(x, y)$ potrà essere in un'area elementare limitata in parte dagli enti l ed l_1 di cui il contorno in O forma un angolo minore di 180° di due specie soltanto, perchè essa non ha per dato in O alcun minimo o massimo parziale o relativo. Così, ad esempio, si ha

$$\begin{aligned} & \overline{+l^{(+)}, I}, \overline{I, -l^{(-)}}; \quad \overline{+l^{(+)}, II}, \overline{II, -l^{(-)}}; \quad \overline{+l^{(-)}, III}, \overline{III, -l^{(+)}}; \\ & \overline{+l^{(-)}, IV}, \overline{IV, -l^{(+)}}. \end{aligned}$$

Se i due elementi successivi l ed l_1 cadessero *entro* due quadranti opposti, poniamo nel primo e terzo, e se l'area B limitata in parte dai medesimi non avesse alcun punto entro la quarta regione dell'ente O ed ad esso vicinissimo, la funzione $f(x, y)$ non potrebbe avere un minimo in O nella sua dipendenza dalla curva $l + l_1$, essendo in pari tempo di quarta specie in B . Ciò si verifica, perchè nel caso opposto la funzione contemplata avrebbe un minimo parziale in O . Così pure, la $f(x, y)$ non potrebbe avere un massimo in O rispetto all'ente $l + l_1$, essendo di quarta specie in un'area B terminata in parte ad esso ente, la quale non contiene vicino ad O dei punti siti entro il secondo quadrante di quest'ultimo. Analoghe riflessioni vanno fatte nella ipotesi che i due elementi l ed l_1 appartengano alla seconda e quarta regione dell'elemento O . Tolte queste restrinzioni la $f(x, y)$ potrebbe contenersi comunque nell'ente B , per quanto è possibile, ammesso che quest'ultimo sia limitato in parte dalla curva $l + l_1$ sita *entro* due regioni opposte.

Se poi l'angolo in O formato dalle linee l ed l_1 considerate come appartenenti al contorno C_B fosse maggiore di 180° gioverebbe rammentare le osservazioni dell'ultimo paragrafo della Memoria precedente.

Poniamo adesso che intorno al punto O cadano dei massimi e minimi parziali rispetto ad alcune aree B convergenti in esso, ma non un minimo o massimo relativo, nè un ramo in cui la $f(x, y)$ si mantiene costante. Ciò premesso, è evidente che un minimo parziale della $f(x, y)$ non può essere contiguo ad un massimo pure parziale. I casi poi che si possono offrire in questa ricerca, sono oltre ogni dire svariati, come tosto si avverte, e d'altra parte riesce assai facile l'addurre quanti esempi si vogliono. Io accennerò soltanto al seguente che si deduce tosto dai nostri quadri

$$\begin{array}{cccc} \overset{m}{\text{I}}, \overset{M}{\text{II}}, \overset{m}{\text{IV}}, \overset{M}{\text{III}}, \text{II}; & \text{II}, \overset{m}{\text{I}}, \text{II}; & \overset{O}{\text{II}}, \overset{O}{\text{I}}; & \overset{O}{\text{I}}, \overset{O}{\text{II}}, \overset{O}{\text{I}}. \\ \text{O} & \text{O} & \text{M} & \text{M} \end{array}$$

Nel caso contemplato dal punto O escono quattro rami di linea $f(x, y) = \text{cost.}$, due nel primo quadrante (IV, II), uno nel terzo (II) ed uno nel quarto (I).

La funzione $f(x, y)$ potrà esser dotata anche di un massimo o minimo relativo in O , come nei due esempi che seguono

$$\begin{array}{cc} \overset{O}{\text{III}}, \overset{O}{\text{IV}}, \overset{O}{\text{I}}, \overset{O}{\text{II}}; & \overset{O}{\text{I}}, \overset{O}{\text{II}}, \overset{O}{\text{III}}, \overset{O}{\text{IV}}. \\ \text{O} & \text{O} \end{array}$$

Tanto nella ipotesi del massimo relativo che in quella del minimo si può assegnare una varietà di linee chiuse, la quale circonda il punto O e tende al medesimo.

Nelle vicinanze dell'elemento O , quando in quest'ultimo cada un massimo o minimo relativo, la funzione $f(x, y)$ è al certo di seconda e quarta specie oppure di prima e terza.

Infatti, se consideriamo una linea $f(x, y) = C$, racchiudente il punto O , avvertiremo tosto che essa contiene al certo una parte $C^{(1)}$ analoga all'altra $C_A^{(1)}$ ed una seconda $C^{(2)}$ conforme all'elemento $C_A^{(2)}$ oppure due enti della forma $C^{(2)}$ e $C^{(4)}$ (*). Stando la prima ipotesi io posso torre dalla linea $C^{(1)}$ un tratto connesso p_σ che cade per intero *entro* una delle aree B_σ ed altrettanto si dica dell'elemento q_τ rispetto alla linea $C^{(2)}$. I tratti p_σ e q_τ appartengono per ordine ad una funzione di prima e terza specie o viceversa, secondo che il punto O è un minimo od un massimo. In maniera analoga si direbbe delle linee $C^{(2)}$ e $C^{(4)}$.

È chiaro che dal punto O potrebbero uscire anche dei rami in ciascuno dei quali la $f(x, y)$ non muta di valore, ecco due esempi

$$\underbrace{IV, II, I}_O; \quad \underbrace{I, III}_O; \quad \overbrace{III, IV, III}^O; \quad \overbrace{III, IV}^O.$$

Nel primo quadrante fra l'elemento IV e l'ente II vi è un ramo primitivo lungo il quale $f(x, y) = \text{cost.}$, nè un fatto simile ha luogo altrove. Ogni punto interno al ramo indicato è un minimo relativo della nostra funzione. Dall'ente O poi escono altre due linee $f(x, y) = C$ ($\underline{I}$, $\underline{III}$).

Il secondo esempio è:

$$\underbrace{II, IV}_O; \quad \overbrace{IV, I}^M; \quad \overbrace{I, II}^O; \quad \overbrace{II}^O.$$

Nel primo quadrante tra gli enti II e IV havvi un ramo primitivo in cui $f(x, y) = \text{cost.}$, ogni punto interno del quale è un massimo della nostra funzione, mentre è altresì tale l'elemento O . Il modo di comportarsi delle linee $f(x, y) = \text{cost.}$ nei pressi di quest'ultimo è manifesto.

(*) Vedi la Memoria che precede, N. VI, pag. 1.