Sulla generalizzazione delle frazioni continue algebriche.

(Di S. PINCHERLE, a Bologna.)

In una breve Nota pubblicata nel 1889 nei Rendiconti dell'Istituto Lombardo (*) e poi in una Memoria presentata alla R. Accademia delle Scienze di Bologna (**) ho indicato in qual modo, partendo da due o più funzioni date, sia possibile definire per esse un algoritmo analogo a ciò che è, per il caso di una sola funzione, lo sviluppo in frazione continua. Esso si genera quando si vogliono legare le due funzioni date σ_1, σ_2 mediante una relazione lineare a coefficienti razionali:

$$A\sigma_1 + B\sigma_2 + C = 0,$$

nel modo il più approssimato possibile per un dato grado dei coefficienti A, B, C .

Nel presente scritto espongo alcune nuove proprietà di cui gode quest'algoritmo, ed alcune applicazioni cui esso si presta. Per semplicità, mi limito al primo stadio della generalizzazione e cioè al caso che si parta da due funzioni date, nel quale caso la base della teoria è una relazione ricorrente a quattro termini; avvertendo però che presenterebbe lievi difficoltà, e di pura forma, l'estensione al caso generale in cui si parte da p funzioni date ed in cui la teoria si fonda sopra una relazione ricorrente a $p + 2$ termini.

Le proposizioni dei §§ 1-4, 6 e 8 della presente Memoria sono contenute come casi particolari nei teoremi dati nella citata Memoria dell'Accademia di Bologna del marzo 1890.

(*) Serie II, tomo 22, fasc. 12-13.

(**) Serie IV, tomo 10, marzo 1890.

È dovere gradito per me il cogliere questa occasione per esprimere la mia profonda riconoscenza verso il *ch.^{mo}* professore HERMITE che mi ha onorato, a proposito di queste ricerche, di preziosi e benevoli consigli. Occupatosi egli pure di ricerche consimili, l'illustre uomo è giunto dal canto suo ad un algoritmo che presenta con quello da me trovato la più grande analogia, e contemporaneamente, ed indipendentemente l'uno dall'altro, abbiamo trovato che l'algoritmo che serve a legare nel modo più approssimato possibile due funzioni σ_1, σ_2 mediante una relazione lineare a coefficienti razionali, è anche quello che serve a rappresentare nel modo più approssimato possibile le due funzioni σ_1, σ_2 mediante frazioni razionali di uguale denominatore. (Vedi § 9 di questa Memoria.) Dalle comunicazioni epistolari da lui gentilmente favoritemi, posso aggiungere che l'HERMITE lega queste sue ricerche a questioni interessanti di calcolo integrale, in ispecie a quelle profonde investigazioni sulle funzioni esponenziali che hanno servito di fondamento al suo celebre lavoro sulla irrazionalità della funzione e^x ; ho detto quanto basta perchè debba essere nel desiderio di tutti che i risultati ottenuti in questo campo dall'esimio analista vengano presto alla luce (*).

1. Siano:

$$\sigma_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{x^n}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s'_n}{x^n}, \quad (1)$$

due serie di potenze decrescenti di x ; s_1 ed s_2 siano essenzialmente diversi da zero, per modo che σ_1 sia del grado -1 e σ_2 del grado -2 . Pongo:

$$1 + a_0 \sigma_1 + b_0 \sigma_2 = \sigma_3; \quad (2)$$

posso sempre determinare il binomio di primo grado

$$a_0 = a'_0 x + a''_0,$$

e la costante b_0 in guisa che i termini in x^1, x^{-1}, x^{-2} spariscano dalla (2); la σ_3 si riduce allora al grado -3 . Essa potrebbe anche ridursi ad un grado inferiore, se i coefficienti delle serie (1) fossero legati da certe relazioni, di

(*) La generalizzazione delle frazioni continue intrapresa nel puro campo aritmetico dal JACOBI (Vedi Memoria postuma pubblicata dall'HEINE, J. de Crelle, tomo 69) sembra dovuta ad ispirazione dell'HERMITE stesso.

Eliminando fra queste le $\sigma_3, \sigma_4, \dots, \sigma_{n+2}$, si ottiene la relazione:

$$A_{n+3} + B_{n+3}\sigma_1 + C_{n+3}\sigma_2 = \sigma_{n+3}, \quad (5)$$

dove $A_{n+3}, B_{n+3}, C_{n+3}$ sono polinomii razionali interi in x la cui considerazione è importantissima per ciò che segue.

3. Anzitutto, sostituendo per $\sigma_{n+3}, \sigma_{n+2}, \sigma_{n+1}, \sigma_n$ le loro espressioni della forma (5) nella $n+1$.^a delle (4), viene:

$$\begin{aligned} A_n + a_n A_{n+1} + b_n A_{n+2} - A_{n+3} + \sigma_1(B_n + a_n B_{n+1} + b_n B_{n+2} - B_{n+3}) \\ + \sigma_2(C_n + a_n C_{n+1} + b_n C_{n+2} - C_{n+3}) = 0; \end{aligned}$$

ma questa uguaglianza si deduce dallo specchio di relazioni (4) in modo puramente *formale*, cioè qualunque siano le quantità σ_1 e σ_2 . Deve adunque essere:

$$\left. \begin{aligned} A_n + a_n A_{n+1} + b_n A_{n+2} &= A_{n+3}, \\ B_n + a_n B_{n+1} + b_n B_{n+2} &= B_{n+3}, \\ C_n + a_n C_{n+1} + b_n C_{n+2} &= C_{n+3}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

donde segue che A_n, B_n, C_n costituiscono, come pure σ_n , altrettanti integrali dell'equazione lineare, alle differenze:

$$f(n+3) - b_n f(n+2) - a_n f(n+1) - f(n) = 0. \quad (7)$$

Si dà uno specchio dei valori iniziali dei polinomii A_n, B_n, C_n :

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \dots \dots \dots B_0 = 0, \dots \dots \dots C_0 = 0, \\ A_1 &= 0, \dots \dots \dots B_1 = 1, \dots \dots \dots C_1 = 0, \\ A_2 &= 0, \dots \dots \dots B_2 = 0, \dots \dots \dots C_2 = 1, \\ A_3 &= 1, \dots \dots \dots B_3 = a_0, \dots \dots \dots C_3 = b_0, \\ A_4 &= b_1, \dots \dots \dots B_4 = 1 + a_0 b_1, \dots \dots \dots C_4 = a_1 + b_0 b_1, \\ A_5 &= a_2 + b_1 b_2, \dots \dots B_5 = b_0 + a_0 a_2 + a_0 b_1 b_2, \dots \dots C_5 = 1 + a_2 b_0 + a_1 b_2 + b_0 b_1 b_2. \end{aligned}$$

ecc.

I valori di A_n, B_n, C_n per $n = 0, 1, 2$ mostrano che questi polinomii formano un sistema fondamentale d'integrali della equazione (7).

Dalle relazioni (6) si stabilisce facilmente il grado dei polinomii A_n , B_n , C_n . Essi sono dati dal seguente quadro:

Gradi di	per $n = 2r$	per $n = 2r + 1$	(8)
A_n	$r - 2$	$r - 1$	
B_n	$r - 1$	r	
C_n	$r - 1$	$r - 1$	

4. Se ora date le serie σ_1 , σ_2 , si proponesse di determinare i polinomii A , B , C del grado indicato dallo specchio precedente in modo che la relazione:

$$A + B\sigma_1 + C\sigma_2 = 0, \quad (9)$$

sia verificata fino ai termini in x^{-n+1} inclusivamente, si troverebbe senza difficoltà che A , B , C non possono differire da A_n , B_n , C_n che per un fattore costante. Il nostro algoritmo serve dunque a risolvere il

PROBLEMA I. *Date due funzioni, stabilire fra esse una relazione lineare a coefficienti razionali la più approssimata possibile per un grado dato dei coefficienti.*

5. Non è privo d'interesse il vedere come siano formati i coefficienti della massima potenza di x nei polinomii A_n , B_n , C_n . Indichiamo rispettivamente questi coefficienti con g_n , h_n , k_n . Nella relazione ricorrente (6), cioè:

$$A_{n+3} = A_n + a_n A_{n+1} + b_n A_{n+2},$$

si ha, per $n = 2r$, che A_n è di grado $r - 2$ ed A_{n+1} e A_{n+2} di grado $r - 1$, mentre A_{n+3} è di grado r ; e siccome

$$a_n = a'_n x + a''_n,$$

non vi è che un termine di grado r nel secondo membro, proveniente da $a_n A_{n+1}$. Si ha dunque:

$$g_{2r+3} = a'_{2r} g_{2r+1}. \quad (10)$$

Invece, per $n = 2r + 1$, si ha A_n del grado $r - 1$, A_{n+1} del grado $r - 1$, A_{n+2} ed A_{n+3} del grado r . Vi sono dunque due termini di grado r nel se-

condo membro, l'uno proveniente da A_{n+2} , l'altro da $a_n A_{n+1}$, onde

$$g_{2r+4} = a'_{2r+1} g_{2r+2} + b_{2r+1} g_{2r+3}. \quad (11)$$

Analogamente si trova:

$$\left. \begin{aligned} h_{2r+3} &= a'_{2r} h_{2r+1}, \\ h_{2r+4} &= a'_{2r+1} h_{2r+2} + b_{2r+1} h_{2r+3}. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} k_{2r+3} &= a'_{2r} k_{2r+1} + b_{2r} k_{2r+2}, \\ k_{2r+4} &= a'_{2r+1} k_{2r+2}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Da queste formole si deducono le seguenti espressioni, che sembrano abbastanza degne di nota:

$$\left. \begin{aligned} g_{2r+1} &= a'_2 a'_4 a'_6 \dots a'_{2r-2}, \\ h_{2r+1} &= a'_0 a'_2 a'_4 \dots a'_{2r-2}, \\ k_{2r+2} &= a'_1 a'_3 a'_5 \dots a'_{2r-1}. \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

6. Se si forma il determinante

$$(A_{n+1} \ B_{n+1} \ C_{n+1}) = \begin{vmatrix} A_{n+1} & B_{n+1} & C_{n+1} \\ A_{n+2} & B_{n+2} & C_{n+2} \\ A_{n+3} & B_{n+3} & C_{n+3} \end{vmatrix},$$

poi si sostituiscono agli elementi dell'ultima linea le loro espressioni tolte dalle (6), si trova senz'altro che il determinante stesso è uguale ad $(A_n \ B_{n+1} \ C_{n+2})$, e per conseguenza ad $(A_0 \ B_1 \ C_2)$, il quale è uguale all'unità. Onde si ha, qualunque sia n :

$$(A_n \ B_{n+1} \ C_{n+2}) = 1. \quad (15)$$

7. Ci conviene ora di studiare i polinomii:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= B_n C_{n+1} - C_n B_{n+1}, \\ Q_n &= C_n A_{n+1} - A_n C_{n+1}, \\ R_n &= A_n B_{n+1} - B_n A_{n+1}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Si ha dapprima, dalle (15):

$$\begin{aligned} A_n P_n + B_n Q_n + C_n R_n &= 0, \\ A_{n+1} P_n + B_{n+1} Q_n + C_{n+1} R_n &= 0, \\ A_{n+2} P_n + B_{n+2} Q_n + C_{n+2} R_n &= 1; \end{aligned}$$

onde risulta che:

$$\left. \begin{aligned} A_n &= Q_n R_{n-1} - R_n Q_{n-1} \\ B_n &= R_n P_{n-1} - P_n R_{n-1} \\ C_n &= P_n Q_{n-1} - Q_n P_{n-1} \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Si determina poi facilmente il grado dei polinomii P_n , Q_n , R_n , per mezzo delle formole (16) e dello specchio (8) dato dianzi, e si trova che il grado di P_n è $n-1$ al più, ed il grado di Q_n e di R_n è al più $n-2$. Ma dalle proprietà dei coefficienti dei termini di più alto grado in x nelle A_n , B_n e C_n , proprietà date al § 5, si trova con un calcolo dei più elementari che il coefficiente di x^{n-1} in P_n e di x^{n-2} in Q_n è diverso da zero, mentre il coefficiente di x^{n-2} in R_n è nullo, ma non quello di x^{n-3} . Donde risulta che i gradi di P_n , Q_n , R_n sono rispettivamente $n-1$, $n-2$ ed $n-3$.

8. I polinomii P_n , Q_n , R_n sono integrali dell'equazione alle differenze:

$$f(n-1) - b_{n-1} f(n) - a_n f(n+1) - f(n+2) = 0; \quad (18)$$

a dimostrare ciò, basta riprendere le formole del § 3:

$$\begin{aligned} C_{n+3} &= b_n C_{n+2} + a_n C_{n+1} + C_n, \\ B_{n+3} &= b_n B_{n+2} + a_n B_{n+1} + B_n, \end{aligned}$$

moltiplicare la prima per B_{n+1} , la seconda per C_{n+1} e sottrarre, si ottiene in tal modo:

$$P_{n+2} = -a_n P_{n+1} + C_n B_{n+2} - B_n C_{n+2}.$$

Ma analogamente si ha:

$$C_n B_{n+2} - B_n C_{n+2} = -b_{n+1} P_n + P_{n-1},$$

onde sostituendo:

$$P_{n+2} = -a_n P_{n+1} - b_{n+1} P_n + P_{n-1}, \quad (19)$$

c. d. d.

Il teorema si dimostra nel modo stesso per Q_n e per R_n .

Osservazione. In varie ricerche sulle equazioni lineari alle differenze, accanto ad un'equazione della forma:

$$a_n f(n+m) + b_n f(n+m-1) + \dots + h_n f(n) = 0,$$

si presenta spontanea la considerazione dell'equazione:

$$a_{n-m} f(n-m) + b_{n-m+1} f(n-m+1) + \dots + h_n f(n) = 0;$$

questa seconda equazione l'ho chiamata *inversa* (*) della precedente. L'equazione alle differenze cui soddisfano P_n, Q_n, R_n è appunto l'inversa di quelle cui soddisfano A_n, B_n, C_n .

L'equazione ricorrente (18), insieme al sistema dei valori iniziali

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= 0, & Q_1 &= 0, & R_1 &= 1, \\ P_2 &= 1, & Q_2 &= 0, & R_2 &= 0, \\ P_3 &= -a_0, & Q_3 &= 1, & R_3 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

serve a determinare completamente i polinomii P_n, Q_n, R_n .

Dallo specchio precedente di valori iniziali risulta ancora che le P_n, Q_n, R_n costituiscono un sistema fondamentale d'integrali dell'equazione (18).

9. Riprendiamo le relazioni lineari della forma (5) fra σ_n, σ_{n+1} e σ_1, σ_2 ; esse sono:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= A_{n+1} + B_{n+1} \sigma_1 + C_{n+1} \sigma_2, \\ \sigma_n &= A_n + B_n \sigma_1 + C_n \sigma_2. \end{aligned}$$

Risolvendo rispetto a σ_1, σ_2 , se ne ricava:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{Q_n + C_{n+1} \sigma_n - C_n \sigma_{n+1}}{P_n}, \\ \sigma_2 &= \frac{R_n + B_n \sigma_{n+1} - B_{n+1} \sigma_n}{P_n}, \end{aligned}$$

e ponendo:

$$\lambda_n = C_{n+1} \sigma_n - C_n \sigma_{n+1}, \quad \mu_n = B_n \sigma_{n+1} - B_{n+1} \sigma_n,$$

si ha:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 - \frac{Q_n}{P_n} &= \frac{\lambda_n}{P_n}, \\ \sigma_2 - \frac{R_n}{P_n} &= \frac{\mu_n}{P_n}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

(*) Vedi per es. *Compte-Rendus de l'Académie des Sciences*, tome 107, pag. 986. Paris, 17 décembre 1888.

I gradi di λ_n , μ_n si calcolano senza difficoltà, e si trova che:

per $n = 2r$ il grado di λ_n è $-r-1$ e quello di μ_n è $-r$,
 „ $n = 2r+1$ „ λ_n „ $-r-1$ „ μ_n „ $-r-1$.

Ne consegue che le frazioni $\frac{Q_n}{P_n}$, $\frac{R_n}{P_n}$ sviluppate in serie di potenze intere negative di x coincidono rispettivamente con σ_1 e σ_2 fino ai termini di grado

$$\begin{aligned} -3r+1 & \text{ e } -3r+2 & \text{ per } n=2r, \\ -3r & \text{ „ } -3r & \text{ „ } n=2r+1, \end{aligned}$$

inclusivamente.

Se ora ci si propone, date le serie σ_1 , σ_2 , di determinare due frazioni razionali aventi lo stesso denominatore ed il cui sviluppo in serie di potenze decrescenti coincida con σ_1 , σ_2 fino ad un grado dato (lo stesso per le due frazioni o differente al più di un'unità) ed il massimo possibile compatibilmente col grado dei termini delle due frazioni, si trova facilmente, col metodo dei coefficienti indeterminati, che esse non possono differire da $\frac{Q_n}{P_n}$, $\frac{R_n}{P_n}$. Il nostro algoritmo serve dunque a risolvere il

PROBLEMA II. *Date due funzioni, rappresentarle mediante due frazioni razionali aventi il medesimo denominatore nel modo più approssimato possibile compatibilmente col grado dato del denominatore di queste frazioni.*

Osservazione. Le (20), che si possono scrivere:

$$P_n \sigma_1 - Q_n = \lambda_n, \quad P_n \sigma_2 - R_n = \mu_n, \quad (21)$$

mostrano che λ_n , μ_n sono anch'esse integrali dell'equazione ricorrente (18).

10. Le seguenti formole fanno risaltare sempre più l'analogia fra il nostro algoritmo e le frazioni continue algebriche. Si ricava infatti dalle (17):

$$\frac{Q_n}{P_n} - \frac{Q_{n-1}}{P_{n-1}} = -\frac{C_n}{P_n P_{n-1}}, \quad \frac{R_n}{P_n} - \frac{R_{n-1}}{P_{n-1}} = \frac{B_n}{P_n P_{n-1}},$$

dove i secondi membri sono rispettivamente dei gradi:

$$\begin{aligned} -3r+2, & \quad -3r+2 & \text{ se } n=2r, \\ -3r, & \quad -3r+1 & \text{ „ } n=2r+1. \end{aligned}$$

Ne segue:

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_n}{P_n} &= -\frac{C_2}{P_1 P_2} - \frac{C_3}{P_2 P_3} - \cdots - \frac{C_n}{P_{n-1} P_n}, \\ \frac{R_n}{P_n} &= \frac{B_3}{P_2 P_3} + \frac{B_4}{P_3 P_4} + \cdots + \frac{B_n}{P_{n-1} P_n}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Si può dunque scrivere:

$$\sigma_1 = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{n+1}}{P_n P_{n+1}}, \quad \sigma_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{P_n P_{n+1}}. \quad (23)$$

In queste formule, come in quelle analoghe della teoria delle frazioni continue, la convergenza delle serie non è dimostrata e dovrà verificarsi volta per volta. L'uguaglianza fra σ_1 , σ_2 e le serie dei secondi membri va intesa in questo senso: che prendendo in esse serie un numero di termini sempre crescente e sviluppando in serie di potenze negative di x , vi sarà un numero sempre maggiore di termini che andrà coincidendo coi termini di σ_1 e σ_2 .

11. Pongasi ora:

$$\sigma_1 = \int_l \frac{\varphi(y) dy}{x-y}, \quad \sigma_2 = \int_{l_1} \frac{\varphi_1(y) dy}{x-y}, \quad (24)$$

coll'ipotesi:

$$\int_{l_1} \varphi_1(y) dy = 0,$$

e dove l'integrazione va estesa alle linee l , l_1 di lunghezza finita e per altro qualunque (aperte o chiuse) nel piano della variabile y . Si deduce dalle (21):

$$\begin{aligned} \int_l \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi(y) dy + \int_l \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{x-y} &= Q_n + \lambda_n, \\ \int_{l_1} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi_1(y) dy + \int_{l_1} \frac{P_n(y) \varphi_1(y) dy}{x-y} &= R_n + \mu_n, \end{aligned}$$

ed uguagliando separatamente in queste formole le parti intere in x e le serie di potenze negative di x , si ottiene:

$$\left. \begin{aligned} Q_n(x) &= \int_l \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi(y) dy, \\ R_n(x) &= \int_{l_1} \frac{P_n(x) - P_n(y)}{x-y} \varphi_1(y) dy, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

e

$$\left. \begin{aligned} \lambda_n(x) &= \int_i \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{x-y}, \\ \mu_n(x) &= \int_{i_1} \frac{P_n(y) \varphi_1(y) dy}{x-y}. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Ma λ_n, μ_n sono dei gradi indicati al § 9, onde risulta che:

$$\left. \begin{aligned} \int_i P_n(y) \varphi(y) y^s dy &= 0 \\ \int_{i_1} P_n(y) \varphi_1(y) y^{s_1} dy &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

per

$$\left. \begin{aligned} s &= 0, 1, 2, \dots, r-1 \\ s_1 &= 0, 1, 2, \dots, r-2 \end{aligned} \right\} \quad \text{per } n = 2r,$$

e per

$$\left. \begin{aligned} s &= 0, 1, 2, \dots, r-1 \\ s_1 &= 0, 1, 2, \dots, r-1 \end{aligned} \right\} \quad \text{per } n = 2r + 1.$$

APPLICAZIONI.

I. *Espressione dei coefficienti a'_n dell'algoritmo per mezzo delle funzioni $\varphi(y), \varphi_1(y)$ sotto il segno.*

12. Nella teoria delle frazioni continue algebriche se una funzione:

$$\sigma = \int_i \frac{\varphi(y) dy}{x-y},$$

ammette lo sviluppo:

$$\frac{1}{a'_1 x + a''_1} - \frac{1}{a'_2 x + a''_2} - \frac{1}{a'_3 x + a''_3} - \dots,$$

il coefficiente a'_n del quoziente incompleto n^{esimo} è dato dalla formola:

$$\frac{1}{a'_n} = \int_i P_n^2(y) \varphi(y) dy \quad (*),$$

o da altre in cui questa si può facilmente trasformare. Si domanda se per i coefficienti a'_n del presente algoritmo si possono dare formole analoghe.

A quest'effetto, deduciamo dalle (22), (23):

$$\begin{aligned} \lambda_n = \sigma_1 P_n - Q_n &= -\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{C_{n+2} P_n}{P_{n+1} P_{n+2}} - \frac{C_{n+3} P_n}{P_{n+2} P_{n+3}} - \dots \\ \mu_n = \sigma_2 P_n - R_n &= \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}} + \frac{B_{n+2}}{P_{n+1} P_{n+2}} + \frac{B_{n+3}}{P_{n+2} P_{n+3}} + \dots \end{aligned}$$

Il termine di più alto grado in x viene dato in questi sviluppi dal primo termine, cioè rispettivamente dal termine di più alto grado in

$$-\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}} \quad \text{e} \quad \frac{B_{n+1}}{P_{n+1}}.$$

Si supponga prima $n = 2r + 1$; il coefficiente del termine di più alto grado in C_{n+1} è k_{2r+2} , in P_{n+1} è $-h_{2r+3} k_{2r+2}$, onde per il coefficiente del termine di più alto grado in $-\frac{C_{n+1}}{P_{n+1}}$ cioè in λ_n si trova il valore:

$$\frac{1}{h_{2r+3}} = \frac{1}{a'_0 a'_2 a'_4 \dots a'_{2r}},$$

in forza delle (14). Ma il coefficiente della più alta potenza di x in λ_n viene dato, in conseguenza delle (26) e per essere λ_n del grado $-(r+1)$, da:

$$\int_i P_{2r+1}(y) \varphi(y) y^r dy,$$

onde:

$$\frac{1}{a'_0 a'_2 a'_4 \dots a'_{2r}} = \int_i P_{2r+1}(y) \varphi(y) y^r dy, \quad (28)$$

da cui si deduce:

$$a'_{2r} = \frac{\int_i P_{2r-1}(y) \varphi(y) y^{r-1} dy}{\int_i P_{2r+1}(y) \varphi(y) y^r dy}. \quad (29)$$

(*) Vedi per es. Possé, *Sur quelques applications des fractions continues algébriques*, pag. 5. S.^t Pétersbourg, 1886.

Si supponga ora $n = 2r$; il coefficiente del termine di più alto grado di B_{n-1} è h_{2r+1} , quello di P_{n+1} è $h_{2r+1} k_{2r+2}$, onde quello di μ_n è, tenuto conto delle (14):

$$\frac{1}{k_{2r+2}} = \frac{1}{a'_1 a'_3 a'_5 \dots a'_{2r-1}}.$$

D'altra parte, essendo μ_n del grado $-r$, il coefficiente della più alta potenza di x in μ_n è dato per le (26) da:

$$\int_{l_1} P_{2r}(y) \varphi_1(y) y^{r-1} dy,$$

onde:

$$\frac{1}{a'_1 a'_3 a'_5 \dots a'_{2r-1}} = \int_{l_1} P_{2r}(y) \varphi_1(y) y^{r-1} dy, \quad (30)$$

ed infine:

$$a'_{2r+1} = \frac{\int_{l_1} P_{2r}(y) \varphi_1(y) y^{r-1} dy}{\int_{l_1} P_{2r+1}(y) \varphi_1(y) y^r dy}. \quad (31)$$

Le formole (29) e (31) rispondono alla questione posta in principio del presente paragrafo.

II. *Rappresentazione simultanea (esatta od approssimata) di due integrali definiti mediante n valori di una medesima funzione.*

13. È facile mostrare come il nostro algoritmo sia atto a dare un'estensione del metodo classico di calcolo approssimato degli integrali definiti, mediante n valori di una stessa funzione. L'estensione consiste in ciò: che mentre il metodo detto dal GAUSS delle *quadrature meccaniche* vale a risolvere la questione:

« Dato un integrale definito

$$\int_l \varphi(y) \psi(y) dy,$$

« determinare n punti $a_1, a_2, \dots, a_n$ e le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ in modo tale
 « che l'integrale venga rappresentato colla massima possibile approssimazione
 « da un'espressione:

$$c_1 \psi(a_1) + c_2 \psi(a_2) + \dots + c_n \psi(a_n), \quad (32)$$

invece col nostro metodo risolveremo la seguente questione, di apparenza più complessa:

« *Dati due integrali definiti:*

$$\int_i \varphi(y) \psi(y) dy, \quad \int_{i_1} \varphi_1(y) \psi(y) dy,$$

« *determinare n punti $a_1, a_2, \dots, a_n$ e le costanti $c_1, c_2, \dots, c_n$ e $c'_1, c'_2, \dots, c'_n$ in modo tale che gl'integrali vengano rappresentati simultaneamente e colla massima possibile approssimazione da due espressioni della forma (32).* »

14. A risolvere questo nuovo problema, si prenda dapprima un polinomio $F(y)$ razionale intero in y , di grado non maggiore di $3r - 1$, essendo

$$n = 2r + 1.$$

La $P_n(y)$ è allora di grado $n - 1 = 2r$, e si può porre:

$$F(y) = P_n(y)q(y) + r(y), \quad (33)$$

dove il quoziente $q(y)$ è di grado $r - 1$, il resto $r(y)$ di grado non maggiore di $2r - 1$.

Supponendo per semplicità le radici a_v di $P_n(y)$ distinte, e lasciando al lettore la facile modificazione delle formole che seguono nel caso che $P_n(y)$ abbia radici multiple, avremo dalla formola d'interpolazione di LAGRANGE:

$$r(y) = P_n(y) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{r(a_v)}{(y - a_v) P'_n(a_v)};$$

onde moltiplicando la (33) per $\varphi(y) dy$ ed integrando lungo l , si ha:

$$\begin{aligned} \int_i F(y) \varphi(y) dy &= \int_i P_n(y) q(y) \varphi(y) dy \\ &+ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{r(a_v)}{P'_n(a_v)} \int_i \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{y - a_v}. \end{aligned}$$

Ma essendo $q(y)$ del grado $r - 1$, risulta immediatamente dalle formole (27) che:

$$\int_i P_n(y) q(y) \varphi(y) dy = 0,$$

e dalle (21) e (26) che:

$$\int_i \frac{P_n(y) \varphi(y) dy}{y - a_v} = -\lambda_n(a_v) = Q_n(a_v);$$

onde infine, essendo ancora $r(a_v) = F(a_v)$, viene:

$$\int_i F(y) \varphi(y) dy = \sum_{v=1}^{n-1} \frac{F(a_v) Q_n(a_v)}{P'_n(a_v)},$$

ed indicando con c_v le quantità:

$$\frac{Q_n(a_v)}{P'_n(a_v)},$$

costanti indipendenti dalla speciale funzione $F(x)$ data, viene:

$$\int_i F(y) \varphi(y) dy = \sum_{v=1}^{n-1} c_v F(a_v). \quad (34)$$

Ma l'identico procedimento dà pure:

$$\int_{i_1} F(y) \varphi_1(y) dy = \sum_{v=1}^{n-1} c'_v F(a_v), \quad (34')$$

con

$$c'_v = \frac{R_n(a_v)}{P'_n(a_v)};$$

talchè le formole (34), (34') ci danno il seguente teorema:

« Se $F(y)$ è una funzione razionale intera di grado non maggiore di $3r - 1$, gl'integrali:

$$\int_i F(y) \varphi(y) dy, \quad \int_{i_1} F(y) \varphi_1(y) dy,$$

« si possono esprimere mediante funzioni lineari a coefficienti costanti di $F(a_1)$,
 « $F(a_2), \dots, F(a_{2r})$. I coefficienti di queste espressioni sono indipendenti dalla
 « speciale $F(y)$, ed i punti $a_1, a_2, \dots, a_{2r}$ sono le radici del polinomio P_{2r+1} ,
 « ottenuto coll'applicazione del nostro algoritmo alle funzioni:

$$\int_i \frac{\varphi(y) dy}{x - y}, \quad \int_{i_1} \frac{\varphi_1(y) dy}{x - y}.$$

15. Le formole (34) e (34'), che danno un'espressione esatta per il caso in cui $F(y)$ è un polinomio razionale intero, servono invece come formole di

approssimazione (*) per il caso che ad $F(y)$ si sostituisca una funzione analitica qualunque, rappresentata da una serie di potenze di y intere e positive. Sia $\psi(y)$ questa serie, il cui cerchio di convergenza comprenda le linee d'integrazione l ed l_1 , e si ponga:

$$\psi(y) = F(y) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} y^{\mu}. \quad (35)$$

essendo $F(y)$ l'insieme dei termini di grado $\leq 3r-1$. Moltiplicando per $\varphi(y)dy$ ed integrando lungo l , poi moltiplicando per $\varphi_1(y)dy$ ed integrando lungo l_1 , si avrà per le formole precedenti:

$$\begin{aligned} \int_l \psi(y) \varphi(y) dy &= \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} F(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \int_l y^{\mu} \varphi(y) dy, \\ \int_{l_1} \psi(y) \varphi_1(y) dy &= \sum_{\nu=1}^{n-1} c'_{\nu} F(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \int_{l_1} y^{\mu} \varphi_1(y) dy, \end{aligned}$$

e ponendo per le $F(a_{\nu})$ il loro valore tratto dalla (35):

$$\begin{cases} \int_l \psi(y) \varphi(y) dy = \sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} \psi(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \left\{ \int_l y^{\mu} \varphi(y) dy - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu}^{\mu} \right\}, \\ \int_{l_1} \psi(y) \varphi_1(y) dy = \sum_{\nu=1}^{n-1} c'_{\nu} \psi(a_{\nu}) + \sum_{\mu=3r}^{\infty} g_{\mu} \left\{ \int_{l_1} y^{\mu} \varphi_1(y) dy - \sum_{\nu=1}^{n-1} a_{\nu}^{\mu} \right\}. \end{cases} \quad (36)$$

Da ciò segue che le espressioni lineari:

$$\sum_{\nu=1}^{n-1} c_{\nu} \psi(a_{\nu}), \quad \sum_{\nu=1}^{n-1} c'_{\nu} \psi(a_{\nu}), \quad (37)$$

in cui i coefficienti e le a_{ν} sono indipendenti dalla speciale funzione $\psi(y)$, ma dipendono solo da $\varphi(y)$ e $\varphi_1(y)$, rappresentano *approssimativamente* gl'integrali del primo membro. Inoltre l'approssimazione, intesa nel debito senso, è la massima possibile compatibilmente col numero delle indeterminate a_{ν} , c_{ν} , c'_{ν} : infatti queste sono in numero di $6r$, e poichè i termini complementari delle

(*) In ciò che segue, quando si parla di *espressioni approssimate* riferendosi ad una certa serie di potenza $\sum g_{\nu} x^{\nu}$, si deve intendere che nelle espressioni formate colle g_{ν} , si trascurano queste g_{ν} da un certo indice in avanti. In questo senso è intesa l'approssimazione nelle questioni di *quadrature meccaniche* ed affini.

(36) non dipendono dai primi $3r$ termini della serie $\psi(y)$, con esse si soddisfa appunto a $6r$ condizioni.

Di più si noti che nei termini complementari i coefficienti $g_{3r}, g_{3r+1}, \dots$ della $\psi(y)$ sono moltiplicati per quantità pure indipendenti dalla $\psi(y)$ stessa.

Se i limiti d'integrazione fossero reali, come pure le quantità a , e se queste fossero comprese fra i limiti d'integrazione, l'applicazione testuale di un metodo del MARKOFF (*) fondato sull'uso di un notevole teorema di calcolo integrale dovuto all'HERMITE (**) permetterebbe di trovare due limiti fra i quali è compreso l'errore che si commette sostituendo le espressioni (37) agl'integrali definiti.

III. *Rappresentazione (esatta o approssimata) della somma di due integrali definiti mediante n valori di due funzioni date.*

16. Il nostro algoritmo si presta ancora alla applicazione esposta nei seguenti paragrafi, e che mi sembra non meno interessante della precedente. Cominciamo col sostituire nella (5) alle σ_1 e σ_2 le loro espressioni (24) in forma d'integrale definito, ed avremo:

$$\sigma_n = A_n(x) + B_n(x) \int_l \frac{\varphi(y) dy}{x-y} + C_n(x) \int_{l_1} \frac{\varphi_1(y) dy}{x-y},$$

donde con una trasformazione semplice e spesso usata si deduce:

$$\sigma_n = \int_l \frac{B_n(y) \varphi(y) dy}{x-y} + \int_{l_1} \frac{C_n(y) \varphi_1(y) dy}{x-y}, \quad (38)$$

e

$$A_n(x) = - \int_l \frac{B_n(x) - B_n(y)}{x-y} \varphi(y) dy - \int_{l_1} \frac{C_n(x) - C_n(y)}{x-y} \varphi_1(y) dy \quad (***). \quad (39)$$

Supponiamo ora, per fissare le idee, n pari e eguale a $2r$ (****); allora B_n e C_n sono del grado $r-1$ come dallo specchio (8), σ_n è del grado $-2r$.

(*) Vedi POSSÉ, Opera citata, pag. 76.

(**) Lettre à M. BORCHARDT. J. de Crelle, tomo 84.

(***) Queste formole (38) e (39) sono un caso particolare di quelle date sotto i numeri (34) e (35) nella mia citata Memoria: *Saggio di una generalizzazione*, ecc.

(****) La trattazione del caso di n dispari procederebbe perfettamente analoga e si tralascia per brevità.

Dalla (38) risulta:

$$\int_i B_n(y) \varphi(y) y^s dy + \int_{i_1} C_n(y) \varphi_1(y) y^s dy = 0, \quad (40)$$

per $s = 0, 1, 2, \dots, 2r - 2$; per conseguenza se $h(y)$ è un polinomio razionale intero arbitrario d'ordine non maggiore di $2r - 2$, si avrà pure:

$$\int_i B_n(y) \varphi(y) h(y) dy + \int_{i_1} C_n(y) \varphi_1(y) h(y) dy = 0. \quad (40')$$

17. Ciò posto, siano $G(y)$ ed $H(y)$ due polinomii razionali interi d'ordine α non superiore a $3r - 3$ e non inferiore ad $r + 1$, e poichè le considerazioni che seguono hanno importanza soprattutto per valori grandi di r , si può supporre senza restrizione $r > 2$.

Si possono allora determinare tre polinomii razionali interi $q(y)$, $G_1(y)$, $H_1(y)$, il primo di grado non maggiore di $2r - 2$, il secondo ed il terzo di grado β inferiore ad α , tali che sia identicamente:

$$\begin{aligned} G(y) &= B_n(y)q(y) + G_1(y), \\ H(y) &= C_n(y)q(y) + H_1(y). \end{aligned} \quad (41)$$

Infatti questo sistema porta a $2\alpha + 2$ relazioni fra i coefficienti indeterminati di q , H , H_1 , i quali sono in numero di $\alpha - r + 2\beta + 4$; ma uno di questi potendosi fare uguale all'unità, per poter soddisfare al sistema deve essere:

$$\alpha - r + 2\beta + 3 \geq 2\alpha + 2 \quad \text{con} \quad \beta < \alpha,$$

donde:

$$\alpha > \beta \geq \frac{\alpha + r - 1}{2}.$$

Ne viene che i due numeri α , $\frac{\alpha + r - 1}{2}$ devono dare:

$$\alpha \geq \frac{\alpha + r - 1}{2} + 1,$$

risultato che collima coll'ipotesi $\alpha \geq r + 1$ già fatta su α ; le equazioni (41) si possono dunque soddisfare.

Moltiplicando ora la prima di queste formole per $\varphi(y)dy$, la seconda

per $\varphi_i(y)dy$, integrando lungo l ed l_i rispettivamente e sommando, si avrà:

$$\int_i G(y) \varphi(y) dy + \int_{l_i} H(y) \varphi_i(y) dy = \int_i G_i(y) \varphi(y) dy + \int_{l_i} H_i(y) \varphi_i(y) dy, \quad (42)$$

essendo nulla la somma degl'integrali che contengono la $q(y)$, in forza della (40').

La formola (42) ci dimostra dunque che l'espressione:

$$S = \int_i G(y) \varphi(y) dy + \int_{l_i} H(y) \varphi_i(y) dy,$$

si può ricondurre ad un'espressione S_i della stessa forma, in cui in luogo dei polinomii G, H , figurano i polinomii G_i, H_i di grado inferiore.

Seguitando ad applicare questo procedimento, si finirà dunque col giungere ad un'espressione:

$$S_i = \int_i G_i(y) \varphi(y) dy + \int_{l_i} H_i(y) \varphi_i(y) dy,$$

in cui il grado dei polinomii sarà r , se nella precedente era il minimo valore $r+1$ supposto per α ; ed oltre a questo punto non si potrà più applicare la riduzione. Ma si può scrivere:

$$\left. \begin{aligned} G_i(y) &= B_n(y)(y+a) + G_{i+1}(y), \\ H_i(y) &= C_n(y)(y+b) + H_{i+1}(y), \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

essendo G_{i+1}, H_{i+1} del grado $r-1$: infatti le relazioni da soddisfare per verificare le (43) sono $2r+2$, e le quantità disponibili, cioè a, b ed i coefficienti di G_{i+1} ed H_{i+1} sono pure $2r+2$. Allora, tenuto conto della (40):

$$S_i = a \int B_n(y) \varphi(y) dy + b \int_{l_i} C_n(y) \varphi_i(y) dy + S_{i+1},$$

e posto:

$$a \int B_n(y) \varphi(y) dy = c, \quad b \int_{l_i} C_n(y) \varphi_i(y) dy = c',$$

si ha:

$$S = S_i = c + c' + S_{i+1}.$$

Ora per la formola d'interpolazione di LAGRANGE, essendo G_{i+1}, H_{i+1} del grado

$r - 1$ ed indicando con α_v le radici di $B_n(y)$ e con β_v quelle di $C_n(y)$, (che si supporranno anche qui distinte, lasciando al lettore la facile generalizzazione) si ha:

$$G_{i+1}(y) = B_n(y) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{G_{i+1}(\alpha_v)}{(y - \alpha_v) B'_n(\alpha_v)},$$

$$H_{i+1}(y) = C_n(y) \sum_{v=1}^{n-1} \frac{H_{i+1}(\beta_v)}{(y - \beta_v) C'_n(\beta_v)},$$

onde:

$$S_{i+1} = \sum_{v=1}^{n-1} c_v G_{i+1}(\alpha_v) + \sum_{v=1}^{n-1} c'_v H_{i+1}(\beta_v),$$

posto:

$$c_v = \int \frac{B_n(y) \varphi(y) dy}{y - \alpha_v}, \quad c'_v = \int \frac{C_n(y) \varphi_1(y) dy}{y - \beta_v};$$

ma per le (41), ... (43) segue che:

$$G_{i+1}(\alpha_v) = G(\alpha_v), \quad H_{i+1}(\beta_v) = H(\beta_v),$$

onde infine:

$$\int G(y) \varphi(y) dy + \int H(y) \varphi_1(y) dy = c + c' + \sum_{v=1}^{n-1} \left(c_v G(\alpha_v) + c'_v H(\beta_v) \right), \quad (44)$$

formola che esprime la somma dei due integrali mediante una somma di valori della funzione $G(y)$ in $r - 1$ punti e della funzione $H(y)$ in $r - 1$ altri punti convenientemente scelti.

È facile vedere che il problema risoluto dalla formola (44) è determinato. Essendo infatti G del grado $3r - 3$, ed indicando con R una funzione razionale intera di grado $r - 1$, $\frac{G}{R}$ è esprimibile mediante la somma

$$\sum_{v=1}^{n-1} \frac{G(\alpha_v)}{(y - \alpha_v) R'(\alpha_v)}$$

aumentata di un polinomio di grado $2r - 2$ in y : moltiplicando per $\varphi(y) R(y) dy$ ed integrando, viene una sommatoria della forma:

$$\sum_{v=1}^{n-1} c_v G(\alpha_v),$$

aumentata di una somma di $2r - 1$ nuove costanti, ed altrettante ne porta l'integrale relativo ad H . Ma di queste $4r - 2$ nuove costanti ne spariscono

$4r - 4$ nella formola (44), che non ne conserva che la c_- e la c' ; ed infatti le quantità che concorrono ad ottenere questo risultato sono le $c_v, c'_v, \alpha_v, \beta_v$, in numero precisamente di $4r - 4$.

18. La formola precedente è esatta nel caso di due polinomii G, H di grado non superiore a $3r - 3$. Se ora questi polinomii fossero di grado maggiore, o se ad essi si sostituissero due funzioni analitiche qualunque rappresentate dalle serie di potenze intere e positive $\psi(y), \psi_1(y)$, si otterrebbe la formola di approssimazione

$$\int \psi(y) \varphi(y) dy + \int \psi_1(y) \varphi_1(y) dy = c + c' + \sum_{v=1}^{n-1} (c_v \psi(\alpha_v) + c'_v \psi_1(\beta_v)) + \rho, \quad (45)$$

in cui il termine complementare ρ non dipende che dai coefficienti delle serie ψ, ψ_1 il cui indice è superiore a $3r - 3$.