Applicazione della Memoria^(*)
« Sulla rappresentazione tipica delle forme binarie »
all'equazione modulare della trasformazione
di quinto ordine.

(del prof. P. GORDAN, a Giessen).

Nella Memoria suddetta si è data la rappresentazione tipica di una forma binaria di 6° grado, come anche la sostituzione quadratica da adoperarsi per ridurla ad un'equazione cubica, quando è nullo l'invariante del 15° ordine.

Qui io voglio applicare lo stesso metodo e la stessa notazione all'equazione modulare per la trasformazione di quinto ordine delle funzioni ellittiche.

Siccome i coefficienti nell'equazione modulare sono funzioni di una sola variabile u , anche gli invarianti hanno la stessa proprietà, ed invero essi possono essere formati coi quattro fattori:

$$u, \quad 1 - u^8, \quad 1 + u^8, \quad 1 + u^{16} - 6u^8.$$

Siccome poi le forme binarie di 6° grado non hanno alcun covariante lineare, così esse non si possono in generale rappresentare con un'espressione tipica, fra le cui variabili non sussista alcuna relazione. Invece le equazioni modulari posseggono dei covarianti quadratici, che hanno un fattor lineare comune: e assumendo questi covarianti quadratici come nuove variabili, l'equazione data diviene una forma tipica.

L'equazione modulare data nei *Fundamenta* di JACOBI è la seguente:

$$v^6 - 4u^5v^5 + 5u^2v^4 - 5u^4v^2 + 4uv - u^6 = 0,$$

(*) Pag. 23 del tomo presente di questi Annali.

dove u e v sono le radici quarte del modulo primitivo e del trasformato. Ponendo $v = x : y$, si ottiene la forma binaria del 6° grado:

$$x^6 - 4u^5x^5y + 5u^2x^4y^2 - 5u^4x^2y^4 + 4uxy^5 - u^6y^6 \equiv f,$$

alla quale si possono applicare tutte le operazioni di cui tratta la Memoria citata.

Allora si ottengono i covarianti:

$$\begin{aligned} k &= 2u(1-u^8)(4x^3y - 4u^2xy^3) && \text{del 4° grado} \\ \Delta &= -8u^2(1-u^8)(x^2 + u^2y^2)^2 && \text{» 4° »} \\ l &= -\frac{16}{3}u^2(1-u^8)(xu^3 - y)^2 && \text{» 2° »} \\ m &= -\frac{2^6}{3}u^3(1-u^8)^2[u^3x^2 + (1-u^8)xy - u^5y^2] && \text{» 2° »} \\ n &= -\frac{2^7}{3}u^4(1-u^8)^3[(1-u^8)x^2 + 4u^5xy - u^2(1-u^8)y^2] && \text{» 2° »} \end{aligned}$$

e gli invarianti:

$$\begin{aligned} A &= 0(*) && \text{del 2° ordine (nei coefficienti).} \\ B &= 16u^4(1-u^8)^2(*) && \text{» 4° »} \\ C &= 0(*) && \text{» 6° »} \\ D &= -\frac{2^{10}}{9}u^6(1-u^8)^4(1+u^8)^2 && \text{» 10° »} \\ R &= -\frac{2^{15}}{27}u^9(1-u^8)^6(1+u^8)(1+u^{16}-6u^8) && \text{» 15° »} \end{aligned}$$

fra i quali ha luogo la relazione:

$$R^2 = -D(D^2 - \frac{16}{81}B^5),$$

dove:

$$D^2 - \frac{16}{81}B^5 = \frac{2^{20}}{81}u^{12}(1-u^8)^8(1+u^{16}-6u^8)^2.$$

Questi invarianti fondamentali servono ad esprimere razionalmente gli altri che seguono; e si ha:

(*) Cfr. JOUBERT, *Sur l'équation du 6° degré* (Comptes rendus 20 et 27 mai, 17 juin 1867).

$$\begin{aligned}
A_{ll} &= 0, & A_{lm} &= \frac{4}{9} B^2, & A_{ln} &= A_{mm} = D, & A_{mn} &= \frac{4}{9} B^3, & A_{nn} &= B D, \\
B_{ll} &= B(D^2 - \frac{16}{81} B^5), & B_{lm} &= 0, & B_{mn} &= -D^2, & B_{ln} &= -(D^2 - \frac{16}{81} B^5), \\
B_{mm} &= \frac{4}{9} B^2 D, & B_{nn} &= -\frac{16}{81} B^4, \\
E &= \frac{2}{3} D, & F &= -\frac{16}{81} B^3 = \frac{B_{nn}}{B}.
\end{aligned}$$

Introducendo questi valori nella forma tipica, otteniamo la formola:

$$R^2 \cdot f = \frac{2}{3} B D m^2 (n - 2 B l) + m \left\{ -\frac{16}{27} B^3 n^2 + \frac{32}{27} B^4 l n + 3 l^2 (D^2 - \frac{16}{81} B^5) \right\} + \frac{2}{3} D n^2 - \frac{4}{3} B D l n^2,$$

mentre i covarianti l, m, n sono legati dalla relazione:

$$-D^2 m^2 + \frac{8}{9} B^2 D m n - \frac{16}{81} B^4 n^2 + (D^2 - \frac{16}{81} B^5)(B l^2 - 2 l n) = 0.$$

Queste due equazioni si possono semplificare d'assai.

Eliminando fra esse m^2 e dividendo per $D^2 - \frac{16}{81} B^5$, si avrà:

$$\frac{3}{2} D^2 f = -\frac{5}{2} D l^2 m - n^3 + 4 B l n^2 - 5 B^2 l^2 n + 2 B^3 l^3. \quad (4)$$

La relazione fra i covarianti l, m, n , posta sotto la forma:

$$(D m - \frac{4}{3} B^2 n)^2 = (D^2 - \frac{16}{81} B^5) l (B l - 2 n),$$

mostra che i covarianti

$$l \quad \text{e} \quad -D m + \frac{4}{3} B^2 n$$

hanno un fattor comune, e che il covariante

$$2 n - B l$$

è un quadrato completo. Effettivamente si ha:

$$\frac{4}{9} B^2 n - D m = \frac{2^{16}}{27} u^9 (1 - u^8)^6 (1 + u^{16} - 6 u^8) (x u^3 - y) (x + y u^5),$$

$$l = -\frac{2^4}{3} u^2 (1 - u^8) (x u^3 - y)^2,$$

$$2 n - B l = \frac{2^8}{3} u^4 (1 - u^8)^3 (x + y u^5)^2,$$

mediante i quali valori la relazione sopradetta è identicamente soddisfatta.

Siccome i due covarianti quadratici l e $\frac{4}{9} B n^2 - D m$ hanno il fattor comune

$xu^3 - y$, così una relazione fra i medesimi ha tutte le proprietà di una forma tipica. Pongasi:

$$\frac{Dm - \frac{4}{9}B^2n}{l\sqrt{B(D^2 - \frac{16}{81}B^5)}} = \frac{x + u^5y}{u^4x - uy} = z;$$

ne verrà:

$$\frac{Bl - 2n}{Bl} = z^2,$$

epperò:

$$n = \frac{Bl}{2}(1 - z^2),$$

$$Dm = \frac{2}{9}B^3l(1 - z^2) + lz\sqrt{B(D^2 - \frac{16}{81}B^5)},$$

e introducendo questi valori di m ed n nella (1):

$$\frac{3}{2}D^2f = \frac{B^3l^3}{8} \left\{ z^6 + 5z^4 + 15z^2 - 5 - 36z\sqrt{\frac{D^2}{B^5} - \frac{16}{81}} \right\}.$$

Dividendo questa equazione per $\frac{3}{2} \cdot \frac{2^{20}}{81} u^{12}(1 - u^8)^8$, si ottiene:

$$(1 + u^8)^4 f = (u^3x - y)^6 \{ 16zu^2(1 + u^{16} - 6u^8) - 4u^6(1 - u^8)(z^6 + 5z^4 + 15z^2 - 5) \}. \quad (2)$$

Da questa equazione si apprende che per mezzo della trasformazione:

$$\frac{v + u^5}{vu^4 - u} = z,$$

l'equazione modulare si muta nella forma:

$$z^6 + 5z^4 + 15z^2 - 5 = 36z\sqrt{\frac{D^2}{B^5} - \frac{16}{81}} = 4z \frac{1 + u^{16} - 6u^8}{u^6(1 - u^8)},$$

nella quale mancano i coefficienti di z^5 e z^3 , e i coefficienti sono numerici ad eccezione di quello di z , il quale dipende soltanto dall'invariante assoluto; si apprende inoltre che questa trasformazione diviene impossibile solamente quando $u=0$ oppure $1 + u^8=0$.

Passiamo ora al caso in cui le radici dell'equazione modulare siano in involuzione, cioè in cui è nullo l'invariante di 15° ordine:

$$R = -\frac{2^{15}}{27} u^9(1 + u^8)(1 - u^8)^6(1 + u^{16} - 6u^8).$$

La questione offre quattro casi, potendo annullarsi ciascuno dei quattro fattori di R . Siccome per $u=0$, si annullano del pari le diverse radici della equazione modulare, così prendiamo a dirittura il secondo caso, in cui

$$1 + u^8 = 0. \quad \text{II.}$$

In questo caso l'equazione (2) non può essere adoperata; perciò dobbiamo far uso delle formole del § 11 della nostra Memoria. Ne risultano le formole:

$$\begin{aligned} l &= -\frac{2^5}{3} u^2 (u^3 x - y)^2, \\ m &= -\frac{2^8}{3} (u^3 x + y)^2, \\ n &= -\frac{2^{11}}{3} u^6 (u^3 x - y)^2 = Bl, \\ S &= \frac{2^{14}}{9} u^5 (u^3 x + y) (u^3 x - y), \\ S^2 &= 2 A_{lm} l m = \frac{8}{9} B^2 l m; \end{aligned}$$

ed inoltre:

$$\begin{aligned} A = C = D = E = 0, \quad B &= 64u^4, \quad F = \frac{B_{nn}}{B} \\ A_{\vartheta\vartheta} = B_{nn} &= -\frac{16}{81} B^4, \quad A_{lm} = \frac{4}{9} B^2. \end{aligned}$$

L'ultima equazione (*) a pag. 65 della Memoria, dividendo per B_{nn} , diviene:

$$\begin{aligned} A_{\vartheta\vartheta} f &= 4S^2 \left(-\frac{m}{B} \right) - \frac{2}{3} n \left(m^2 + \frac{B}{3} l^2 \right) - \frac{2}{3} \left(-\frac{4}{3} B l m^2 + \frac{2}{3} B^2 l^3 \right) \\ \frac{8}{9} B^3 f &= 16 l m^2 + 3 l m^2 + B l^3 - 4 l m^2 + 2 B l^3 \\ &= 15 l m^2 + 3 B l^3, \end{aligned}$$

onde l'equazione modulare assume la forma:

$$\begin{aligned} l(B l^2 + 5 m^2) &= 0, \\ (u^3 x - y)^2 \{ 5(u^3 x + y)^4 - (u^3 x - y)^4 \} &= 0 \end{aligned}$$

(*) La quale deve leggersi così:

$$\begin{aligned} A^2_{\vartheta\vartheta} u &= 4S^2 \left(\frac{2}{3} B E l - F m - E n \right) - \left(\frac{2}{3} n A_{\vartheta\vartheta} + \frac{4}{9} R S \right) (m^2 - 2 A_{lm} + \frac{1}{3} B l^2) \\ &\quad - \frac{2}{3} A_{\vartheta\vartheta} \{ (8 A C + \frac{2}{3} B^2) l^3 - 5 C l^2 m - \frac{4}{3} B l m^2 + A m^3 \}. \end{aligned}$$

epperò ha le radici:

$$u^3 v_1 = u^3 v_2 = 1; \\ u^3 v_3 = \frac{1 - \sqrt[4]{5}}{1 + \sqrt[4]{5}}; \quad u^3 v_4 = \frac{1 + \sqrt[4]{5}}{1 - \sqrt[4]{5}}; \quad u^3 v_5 = \frac{1 + i\sqrt[4]{5}}{1 - i\sqrt[4]{5}}; \quad u^3 v_6 = \frac{1 - i\sqrt[4]{5}}{1 + i\sqrt[4]{5}}.$$

Se:

$$u^5 - 1 = 0, \quad \text{III.}$$

la (2) mostra che per $z = \frac{x + u^5 y}{u(u^3 x - y)}$, si ha $(u^3 x - y)^6 z = 0$, epperò in questo caso l'equazione modulare assume la forma:

$$(vu^3 - 1)^5 (v + u^5) = 1,$$

e le sue radici sono:

$$u^3 v_1 = u^3 v_2 = u^3 v_3 = u^3 v_4 = u^3 v_5 = 1, \quad u^3 v_6 = -1 (*).$$

Passiamo finalmente al caso in cui si annulli il quarto fattore di R :

$$u^{16} - 6u^8 + 1 = 0; \quad \text{IV.}$$

allora, per la sostituzione:

$$\frac{v + u^5}{vu^4 - u} = z,$$

l'equazione modulare diviene:

$$z^6 + 5z^4 + 15z^2 - 5 = 0.$$

Questa equazione si riduce di nuovo all'equazione modulare (astrazione fatta da un fattore superfluo), se si ponga per z il suo valore, indi si moltiplichi pel denominatore e si abbassino le potenze di u fin quando è possibile, adoperando la uguaglianza IV.

(*) Cfr. SOHNKE, G. di Crelle, t. 16, p. 112.