Über das Prinzip der Aktion und über die Klasse mechanischer Prinzipien, der es angehört.

Von

Dr. MORITZ RÉTHY aus Budapest*).

Ich habe der ung. wissensch. Akademie in den Jahren 1895—96 drei Arbeiten vorgelegt, die ich auch in den Berichten aus Ungarn und in den Math. Annalen publizierte; ich habe in diesen Arbeiten die Gültigkeit des Prinzips der Aktion und seine volle Äquivalenz mit dem Hamiltonschen im Bereich der ganzen Mechanik bewiesen. Herr Hölder publizierte im Jahre 1896 in den Göttinger gelehrten Anzeigen eine Arbeit über das Prinzip der Aktion, jedoch in anderer Fassung. Es scheint aber, daß bei dieser Formulierung das gegenseitige Verhältnis der genannten Prinzipien, und auch die eindeutige Umkehrbarkeit des von Hölder bewiesenen Satzes nicht deutlich genug hervortritt. Diese Fragen werden in § 1, I dieser Arbeit behandelt.

Seitdem ist außer den Arbeiten des Herrn Königsberger, die das Prinzip auf Kräfte höherer Ordnung ausdehnen, meines Wissens nur eine Arbeit über diesen Gegenstand erschienen: die ebenfalls in den Göttinger gelehrten Anzeigen im Jahre 1900 publizierte Note des Herrn A. Voss, die meinem Interesse aus zwei Ursachen begegnete. Die eine Ursache ist rein persönlicher Natur: Herr Voss scheint nämlich von meinen Arbeiten keine Kenntnis genommen zu haben. Die zweite Ursache ist objektiver Natur: die Wendung nämlich, die bei seiner Fassung der Grenzbedingung der Variation in Erscheinung tritt, ist neu; hingegen ist die Umkehrbarkeit des von ihm ausgesprochenen Satzes noch zu besprechen. Diese Note gab den Impuls zur vorliegenden Untersuchung, die auch auf Kräfte

*) Diese Arbeit ist die Zusammenfassung einer Abhandlung und einer kurzen Note, die ich der math. naturwiss. Klasse der ungarischen Akademie der Wissenschaften am 21. April 1902, resp. am 16. Februar 1903 vorgelegt habe. Erschienen in „Math. és Term. Értesítő“ 1902, 1903.

hherer Ordnung ausgedehnt wird. Das hauptschlichste Resultat lsst sich fr den Fall von Krften in gewhnlichem Sinn, in rein analytischer Fassung, wie folgt aussprechen:

1. Es mgen f, f_1, a_{ki} Funktionen der $q_i, \frac{dq_i}{dt}, t, (k = 1, \dots, \nu), (i = 1, \dots, n)$, und $\delta'x$ die Operation $\delta x - \frac{dx}{dt} \delta t$ bezeichnen; und es sei Q_i eine beliebige Gre; t_0 und t_1 zwei fest gegebene Zeitpunkte.

Die Forderung, da die simultanen Variationsgleichungen Bestand haben,

$$(a) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt = 0;$$

$$(b) \quad \int_{t_0}^{t_1} \left[\delta' (f - f_1) + \sum_1^n Q_i \delta' q_i \right] dt = 0,$$

$$(c) \quad \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

$$(d) \quad \sum_1^n a_{ki} \delta' q_i = 0, \quad (k = 1, \dots, \nu)$$

ist quivalent damit, da das System der q_i das System gewhnlicher Differentialgleichungen befriedigt

$$(e) \quad Q_i + \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q'_i} + \sum_1^\nu \lambda_k a_{ki} = 0, \quad (i = 1, \dots, n).$$

2. Werden smtliche Forderungen aufrecht erhalten, die Variationsbedingungen (b) und (c) ausgenommen, an deren Stelle die Forderung tritt, da

$$(b') \quad \delta' (f - f_1) + \sum_1^n Q_i \delta q_i = \frac{d}{dt} \sum_1^n a_i \delta' q_i,$$

$$(c') \quad \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial q'_i} - a_i \right) \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

sei, wo die a_i beliebige analytische Funktionen von t bedeuten, sollen ferner die Grenzzeiten t_0 und t_1 beliebig verschiebbar sein: so geschieht smtlichen Forderungen nur durch das simultane Gleichungssystem (e) Genge; es wre denn, da

$$\sum \left(\frac{\partial (f - f_1)}{\partial q'_i} - a_i \right) \delta' q_i$$

entweder an und für sich oder infolge des Gleichungssystems (d) verschwindet, in welchem Fall es außer dem System (e) auch noch andere Lösungen geben kann.

In § 1 wird nach einem Rückblick auf die erste Fassung des Prinzips bei Lagrange, ein abgekürzter Beweis des Satzes des Herrn Voss gegeben und dieser Satz besprochen. In § 2 wird nach Ableitung der vorangestellten Sätze eine Klasse von mechanischen Prinzipien entwickelt, welche das Prinzip der Aktion enthält. § 3 ist der Jacobischen Transformation des Prinzips der Aktion gewidmet. In § 4 ist die Verallgemeinerung auf kinetische Potentiale höherer Ordnung angedeutet.

§ 1.

Die Variation von $\int T dt$.

I. Es sei die lebendige Kraft T des Systems eine homogene quadratische Funktion der Geschwindigkeiten q_i' , deren Koeffizienten Funktionen bloß der q_i sind; und es bedeute δ eine Variation für $\delta t \geq 0$, während mit δ_i eine Variation bei der Festsetzung $\delta t = 0$ bezeichnet sei. Man hat dann

$$(1) \quad \delta(2T dt) \equiv (\delta T + \delta_i T) dt.$$

Es bestehen nämlich

$$(2) \quad \delta(T dt) \equiv \delta T dt + T \delta dt,$$

$$(3) \quad \delta(T dt) \equiv \delta_i T dt - T \delta dt.$$

Die Identität (2) ist unmittelbar evident; die Identität (3) ist eine Folge davon, daß T eine quadratische homogene Funktion der q_i' ist, also

$$T dt = \sum a_{ij} q_i' q_j' dt = \frac{\sum a_{ij} dq_i dq_j}{dt},$$

wo die a_{ij} von den q_i nicht aber von t abhängen. Durch Addition von (2) und (3) folgt (1).

Man schreibe die Identität (1) in der Form

$$(4) \quad \delta(2T dt) - \left(\delta T - \sum_1^n Q_i \delta q_i \right) dt \equiv \left(\delta_i T + \sum_1^n Q_i \delta q_i \right) dt,$$

und mittels Integration von t_0 bis t_1 in der Form

$$(5) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt - \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta T - \sum_1^n Q_i \delta q_i \right) dt \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta_i T + \sum_1^n Q_i \delta q_i \right) dt.$$

Bedeutend die Q_i die auf die Koordinaten q_i wirkenden Kräfte, so ist die rechte Seite dieser Gleichung das von Hamilton im Jahre 1835 entdeckte Integral, welches die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems liefert, sobald man fordert, daß es für alle kontinuierlichen virtuellen Verschiebungen δq_i verschwinde, deren Werte zur Zeit t_0 und zur Zeit t_1 verschwinden.

Das erste Integral zur Linken in der Identität (5) ist die erste Variation der Aktion des materiellen Systems. Fordert man, wie Lagrange in „Miscellanea Taurinensia“ 1760—1761, daß diese Variation verschwinde für alle soeben festgesetzten δq_i , vorausgesetzt nur, daß man aus ihr vorerst δt mittels der Gleichung

$$(U) \quad \delta T = \sum_1^n Q_i \delta q_i$$

eliminiert, — was man doch am einfachsten mit Anwendung der Identität (4) erreicht, — so ist diese Forderung, wie aus (5) ersichtlich, identisch mit der Hamiltonschen Forderung*), Die beiden Aussprüche unterscheiden sich eben nur formal.

II. Es sei Φ eine Funktion der q_i , q_i' , t , und δ' das Operationszeichen für $\delta \cdot - \frac{d}{dt} \cdot \delta t$, sodaß z. B.

$$(6) \quad \delta' q \equiv \delta q - \frac{dq}{dt} \delta t.$$

Aus dieser Identität folgt

$$\frac{d\delta' q}{dt} \equiv \frac{d\delta q}{dt} - \frac{dq'}{dt} \delta t - \frac{dq}{dt} \frac{d\delta t}{dt},$$

d. i.

$$(7) \quad \frac{d\delta' q}{dt} \equiv \delta q' - \frac{dq'}{dt} \delta t \equiv \delta' q'.$$

Man hat ferner

$$\delta \Phi dt \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \delta t + \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta q + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'} \delta q_i' \right) \right] \delta t,$$

$$d\Phi \delta t \equiv \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} dt + \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial q_i'} \frac{dq_i'}{dt} \right) dt \right] \delta t;$$

daher hat man aus diesen Formeln mittels Subtraktion und bei Heranziehung von (7),

*) Vergl. A. Mayer, Geschichte der kleinsten Aktion, 1877, pag. 29. Réthy, Princip der kleinsten Action. Berichte aus Ungarn, 1895, Bd. XIII, pagg. 1 u. 2 Fußnote.

$$(8) \quad \delta \Phi dt - d\Phi \delta t \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \delta' q'_i \right) dt$$

d. i.

$$(9) \quad \delta \Phi dt - d\Phi \delta t \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \frac{d}{dt} \delta' q_i \right) dt.$$

Ich schreibe diese Identität (9) noch in folgenden vier Formen:

$$(10) \quad \delta \Phi - \frac{d\Phi}{dt} \delta t \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \frac{d}{dt} \delta' q_i \right),$$

$$(10^*) \quad \delta' \Phi \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \frac{d}{dt} \delta' q_i \right),$$

$$(11) \quad \delta(\Phi dt) - d(\Phi \delta t) \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial \Phi}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \frac{d}{dt} \delta' q_i \right) dt,$$

$$(11^*) \quad \delta(\Phi dt) - d \left(\Phi \delta t + \sum_1^n \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \delta' q_i \right) \equiv \sum_1^n \left(\frac{d\Phi}{dt} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial q'_i} \right) \delta' q_i dt.$$

III. Indem man die nur formal verschiedenen Identitäten (11) und (11*) addiert, und an Stelle von Φ die lebendige Kraft T des materiellen Systems setzt, erhält man die Identität:

$$(12) \quad \delta(2T dt) - d \left(2T \delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta' q_i \right) \equiv \left(\delta' T + \sum_1^n \left(\frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) \delta' q_i \right) dt,$$

wo zur Rechten $\delta' T$ eine abgekürzte Bezeichnung ist im Sinne von (10*).

Aus dieser Identität (12) folgt nun aber der Voss'sche Satz:

Betrachtet man die Gleichungen

$$(V) \quad \delta' T = \sum_1^n Q_i \delta' q_i,$$

$$(V_1) \quad 0 = \left[2T \delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1}$$

als Variationsvorschrift für die virtuellen Verrückungen $\delta' q_i$ und für die δt zu den Zeiten t_0 und t_1 , so verschwindet $\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt$ jedenfalls, sobald die Bewegung des materiellen Systems die natürliche ist.

Infolge der Vorschrift (V) ist nämlich die Größe zur Rechten von (12)

$$= \sum_1^n \left[Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right] \delta' q_i dt,$$

eine Größe, die im Sinne des D'Alembertschen Prinzips für alle t verschwindet, sobald die Bewegung die natürliche ist. Daher verschwindet für diese Bewegungen die Größe zur Linken von (12) für alle Zeitpunkte des Intervalls t_0 bis t_1 ; und man hat aus ihr die Gleichung

$$(13) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt = \left[2T \delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1},$$

eine Gleichung, deren rechte Seite laut der Variationsvorschrift (V₁) verschwindet. Der Satz ist also bewiesen.

Betrachtet man den speziellen Fall, wo U das Potential der Kräfte Q_i ist und wohl von t nicht aber von den q_i' abhängt, so nimmt (V) die Form an

$$\delta' T = \delta' U,$$

eine Gleichung, die im Sinne der aus (10) und (10*) entspringenden Identität

$$\delta' (T - U) \equiv \delta (T - U) - \left[\frac{d}{dt} (T - U) \right] \delta t,$$

die Form annimmt

$$(14*) \quad \delta (T - U) - \left[\frac{d}{dt} (T - U) \right] \delta t = 0.$$

Die Variationsvorschrift (V) ist also in diesem Spezialfall, wenn man die Energie des Systems mit F bezeichnet, identisch mit

$$(14) \quad \delta F = \frac{dF}{dt} \delta t,$$

d. i.

$$(14*) \quad \delta' F = 0.$$

Herr Voss scheint nicht bemerkt zu haben, daß in meiner oben genannten Arbeit gerade diese Gleichung als Variationsvorschrift dient. Es verdient aber auch hervorgehoben zu werden, daß der Vossische Satz nicht umkehrbar, daher keinesfalls als Verallgemeinerung des oben genannten Lagrangeschen umkehrbaren Satzes zu bezeichnen ist. Sind nämlich die allgemeinen Vossischen Bedingungsgleichungen der Bewegung

$$(15) \quad \sum_1^n a_{ki} dq_i + a_{k0} dt = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, \nu),$$

so hat man zu setzen

$$(16) \quad \sum_1^n a_{ki} \delta q_i + a_{k0} \delta t = 0,$$

also

$$(16^*) \quad \sum_1^n a_{ki} \delta' q_i = 0.$$

Die Forderung, daß $\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T dt$ bei Einhaltung der Variationsvorschriften (V) und (V₁) verschwinde, ist äquivalent mit der einzigen Forderung

$$(17) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \left(Q_i + \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) \delta' q_i dt = 0.$$

Da nun in dieser Gleichung (17) die $\delta' q_i$ keiner anderen Bedingung unterliegen, als den durch das Gleichungssystem (16*) und der Gleichung (14*) auferlegten, so könnten die Bewegungsgleichungen des materiellen Systems z. B. wohl von der Form sein

$$(18) \quad Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_1^v \lambda_{ki} a_{ki} + \lambda_0 \frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\lambda_0 \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right),$$

wo $F \equiv T - U$ die Energie des materiellen Systems bedeutet, λ_0 aber keiner anderen Bedingung unterliegt, als zur Zeit t_0 und zur Zeit t_1 zu verschwinden. (S. pag. 179).

Soll der Satz des Herrn Voss umkehrbar sein, so muß eine neue Vorschrift hinzukommen; eine solche ist z. B. die Forderung, daß bei beliebiger Verschiebung der Zeitpunkte t_0 und t_1 innerhalb der Zeitdauer der Bewegung die Variation der Aktion bleibend verschwinde, wenn nur die oben genannten Variationsvorschriften eingehalten werden. Dies soll später bewiesen werden; sicher ist aber, daß das Prinzip der Aktion in der Vossischen Form nicht äquivalent ist dem Hamiltonschen Prinzip, welches die natürliche Bewegung, ohne jedwede Verrückung der Zeitpunkte t_0 und t_1 , eindeutig ausscheidet.

IV. Man kann aber an Stelle der Vossischen Variationsvorschrift (V, V₁) eine andere setzen, die eine wahre Verallgemeinerung der Lagrangeschen Vorschrift (U) ist, — eine solche nämlich, bei deren Einhaltung das Verschwinden der Aktion selbst ohne Verrückung der Zeitpunkte t_0 und t_1 die natürliche Bewegung aus der Mannigfaltigkeit aller anderen eindeutig ausscheidet.

Eine solche Vorschrift bildet z. B. diese Gleichung:

$$(19) \quad d\left(2T\delta t + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta' q_i\right) - \left(\delta' T - \sum_1^n Q_i \delta' q_i\right) dt = 0;$$

oder auch diese:

$$(20) \quad d(T\delta t) - \sum_1^n Q_i \delta' q_i dt = 0; \quad \left[\sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta' q_i\right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

oder eine Gleichung, die aus (19) und (20) auf die Weise entsteht, daß man zur linken Seite $\delta' T dt$ multipliziert mit einer Konstanten hinzufügt.

Das Prinzip wird dann, falls (19) als Vorschrift dient, vom D'Alembertschen, falls (20) als Vorschrift dient, vom Hamiltonschen bloß in Betreff der Umständlichkeit des Ausdrucks verschieden. Diese Vorschriften stimmen nämlich mit der Lagrangeschen (U) darin überein, daß sie ebensowenig eine Abhängigkeit zwischen den $\delta' q_i$ festsetzen, als die Vorschrift (U) eine solche zwischen den δq_i bedingt; wohl aber ordnen sie dem System der Zeitfunktionen $\delta' q_i$ eine ganz bestimmte Zeitfunktion δt zu. Man überzeugt sich leicht, daß die Vorschrift (U) eigentlich die folgende Festsetzung ausspricht:

$$\begin{aligned} \delta t = \delta t_0 + \left[\frac{1}{2T} \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q'_i} \delta q_i \right]_{t_0}^t \\ + \int_{t_0}^t \sum_1^n \left[\frac{1}{2T} \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} - Q_i \right) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2T} \frac{\partial T}{\partial q'_i} \right) \right] \delta q_i dt. \end{aligned}$$

Die Vorschrift (19) lautet dem analog

$$[2T\delta t]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \sum_1^n \left(\frac{\partial T}{\partial q'_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q'_i} - Q_i \right) \delta' q_i dt = 0$$

und die erste der Gleichungen (20), wie folgt:

$$[T\delta t]_{t_0}^t - \int_{t_0}^t \sum_1^n Q_i \delta' q_i dt = 0.$$

§ 2.

Die Mannigfaltigkeit der mit dem Hamiltonschen äquivalenten Integralprinzipien; Formen des Aktionsprinzips.

V. Man substituiere in der Identität (11*) an Stelle von Φ das Hamiltonsche $f = T + U$, wo U eine Funktion der q_i, q'_i, t sei; und integriere nach t . Man hat dann

$$(21) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f dt - \left[f \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$(21*) \quad L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q'_i}.$$

Man zerlege f beliebig in additive Teile

$$f \equiv f_1 + f_2;$$

es besteht für f_1 und f_2 je eine Identität von der Form (21).

Ich setze fest, daß die Grenzwerte von δt der Vorschrift unterliegen

$$(22) \quad 0 \equiv \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Dann geht die Identität (21) in die folgende Gleichung über:

$$(23) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f dt - [f_2 \delta t]_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt.$$

Wirken auf das materielle System, dessen lebendige Kraft T ist, außer den zum Potential U gehörigen keine anderen Kräfte, so ist

$\sum_1^n L_i \delta' q_i = 0$. Bei der Festsetzung (22) ist daher die natürliche Bewegung des Systems derart, daß für alle virtuellen Verrückungen $\delta' q_i$

$$(24) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f dt - [f_2 \delta t]_{t_0}^{t_1} = 0$$

wird, eine Gleichung, die sich auch in der Form schreiben läßt:

$$(24*) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 dt = 0.$$

Man hat nämlich

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f_2 dt - [f_2 \delta t]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} [\delta(f_2 dt) - d(f_2 \delta t)] \equiv \int_{t_0}^{t_1} \left(\delta f_2 - \frac{df_2}{dt} \delta t \right) dt,$$

d. i.

$$(25) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f_2 dt - [f_2 \delta t]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 dt.$$

Die Gleichung (24*) spricht demnach den Satz aus:

Zerlegt man f in zwei additive Teile f_1 und f_2 , und trifft bezüglich der Grenzwerte von δt die Festsetzung (22), so ist die Summe gebildet aus der Variation von $\int f_1 dt$ und aus dem Zeitintegral von $\delta' f_2$ gleich Null für sämtliche virtuellen Verrückungssysteme $\delta' q_i$, sobald nur die Bewegung des Systems die vom Potential U bewirkte natürliche ist.

Dieser allgemeine Satz läßt sich aber auch, wie folgt, umkehren:

Zerlegt man f in zwei additive Teile f_1 und f_2 , trifft bezüglich der Grenzwerte von δt die Festsetzung (22), und fordert, daß die Summe gebildet aus der Variation von $\int f_1 dt$ und aus dem Zeitintegral von $\delta' f_2$ für sämtliche virtuellen Verrückungssysteme $\delta' q_i$ verschwinde, so ist die Bewegung des materiellen Systems jedenfalls die durch das Potential U bewirkte natürliche Bewegung, und nur diese.

Da nämlich die Gleichung (23), bei Rücksichtnahme auf die Identität (25), die Form annimmt

$$(23^*) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt;$$

da ferner die Gleichung (23), also auch diese Gleichung (23*), eine Folge der Identität (21) ist, sobald nur im Sinne der Prämissen die Variationsvorschrift (22) eingehalten wird; da endlich im Sinne der Prämissen die linke Seite der Gleichung (23*) für alle virtuellen $\delta' q_i$ Systeme = 0 sein soll: so muß für diese auch die Rechte von (23*) verschwinden. Man hat also

$$(23^{**}) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt = 0,$$

wenn nur die $\delta' q_i$ ein System virtueller Verrückungen bilden. Daraus folgt, daß der Integrand $\sum_1^n L_i \delta' q_i$ verschwindet. Die Gesamtheit der Forderungen ergibt daher die Forderung des D'Alembertschen Prinzips.

VI. Der Schlußsatz folgt aber aus (23**) nicht mehr, wenn nicht nur die Summe zur Linken von (24*), sondern auch $\int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 dt$ für sich verschwinden soll. Mit Rücksichtnahme auf die Identität (10*) wird nämlich so gefordert, daß $\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt$ nur dann verschwinde, wenn die Ver-rückungen $\delta' q_i$ virtuell sind, die Vorschrift (22) eingehalten wird, und die $\delta' q_i$ außerdem noch der Gleichung

$$(26) \quad \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} \frac{d}{dt} \delta' q_i \right) dt = 0$$

entsprechend gewählt werden. Diese Gleichung (26) bildet aber für die $\delta' q_i$ eine neue Beschränkung.

Ich unterscheide zwei Fälle:

A) Ich fordere, daß die $\delta' q_i$ gemäß der Gleichung

$$(27) \quad \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} \delta' q_i + \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} \frac{d}{dt} \delta' q_i \right) = \frac{d}{dt} \sum_1^n a_i \delta' q_i$$

bestimmt sind, wo die a_i gegebene Funktionen bedeuten; dabei soll an Stelle von (22) die Grenzbedingung treten:

$$(27^*) \quad \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \left(\frac{\partial f}{\partial q_i'} - a_i \right) \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Unter diesen Fall subsummiert sich der bisher ausschließlich in Betracht gezogene Spezialfall, wo sämtliche $a_i \equiv 0$ sind.

B) Ich fordere ganz allgemein, daß $\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt$ für fixe t_0, t_1 und für alle virtuellen $\delta' q_i$ und δt verschwinde, die den Gleichungen (26) und (22) gemäß gewählt sind.

Ad A). Solange keine fernere Bedingung hinzutritt, entspricht sämtlichen Forderungen eine jede Bewegung, die den Gleichungen

$$L_i = \sum_k^n \lambda_{ki} a_{ki} + \lambda_0 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{da_i}{dt} \right) - \frac{d}{dt} \lambda_0 \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i \right),$$

$$(i = 1, \dots, n)$$

gemäß verläuft, wenn nur die Zeitfunktion λ_0 zu den Grenzzeiten t_0 und t_1 verschwindet.

Man hat nämlich bei Rücksichtnahme auf (16*) die Gleichung

$$\sum_1^n L_i \delta' q_i = \lambda_0 \sum_1^n \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d a_i}{dt} \right) \delta' q_i + \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i \right) \frac{d}{dt} \delta' q_i \right] - \frac{d}{dt} \lambda_0 \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i \right) \delta' q_i.$$

Da das erste Glied zur Rechten dieser Gleichung laut (27) verschwindet, so hat man aus ihr mittels Integration nach der Zeit

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt = \left[\lambda_0 \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i \right) \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

da doch λ_0 zu den Grenzzeiten verschwindet. q. e. d.

Lehrsatz. Tritt hingegen als fernere Bedingung hinzu, daß den Forderungen bei beliebig verschiebbaren Grenzzeiten t_0 und t_1 Genüge geschehen soll, so entspricht den Forderungen im Allgemeinen einzig und allein die natürliche Bewegung des materiellen Systems; eine Ausnahme bildet nur der Fall, wenn

$$F_2 \equiv \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i \right) \delta' q_i$$

entweder an und für sich oder in Folge der Bedingungsgleichungen (15), (16) verschwindet.

Wenn wir nämlich diesen Ausnahmefall ausschließen, so läßt sich F_2 mittels der genannten Bedingungsgleichungen jedenfalls auf die Form bringen

$$(28) \quad \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i'} - a_i \right) \delta' q_i = \sum_1^{n-r} N_i \delta' q_i,$$

wo die $\delta' q_i$ freie virtuelle Verrückungen bedeuten, und wo die N_i weder an und für sich noch mittels der Bedingungsgleichungen (15) verschwinden. Die Gleichung (27) reduziert sich dann auf

$$(27^{**}) \quad \sum_1^{n-r} \left(M_i \delta' q_i + N_i \frac{d}{dt} \delta' q_i \right) = 0.$$

Es sei N_j einer der nicht verschwindenden Koeffizienten; dann setze man $\delta' q_j$ als von 0 verschieden voraus, während alle übrigen $\delta' q$ verschwinden. Dann folgt aus der Gleichung (27**)

$$M_j \delta' q_j + N_j \frac{d}{dt} \delta' q_j = 0.$$

Daher ist

$$(29) \quad \delta' q_j = [\delta' q_j]_{t_0} e^{G_j},$$

wo

$$(29^*) \quad G_j \equiv - \int_{t_0}^{t_1} \frac{M_j}{N_j} dt$$

endlich ist.

Man hat daher für dieses System virtueller Verrückungen

$$\sum_1^n L_i \delta' q_i = \mathfrak{G}_j \delta' q_j = [\delta' q_j]_{t_0} \mathfrak{G}_j e^{G_j},$$

und gemäß der Gleichung (23**)

$$(30) \quad 0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt = [\delta q_j]_{t_0} \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{G}_j e^{G_j} dt.$$

Es ist aber $[\delta q_j]_{t_0}$ eine beliebige Konstante, ferner e^{G_j} positiv und nicht $= 0$, und die Gleichung soll für beliebig nahe gelegene t_0 und t_1 gültig sein. Daher ist notwendigerweise

$$(30^*) \quad \mathfrak{G}_j = 0.$$

Es sei ferner N_0 einer der verschwindenden Koeffizienten N_i ; dann setze man $\delta' q$ und auch $\delta' q_0$ als von 0 verschieden voraus, während alle übrigen $\delta' q$ verschwinden. Dann folgt aus der Gleichung (27**)

$$M_0 \delta' q_0 + M_j \delta' q_j + N_j \frac{d}{dt} \delta' q_j = 0;$$

es ist daher $\delta' q_0$ ganz beliebig; man kann nämlich aus dieser Gleichung $\delta' q_j$ immer dem beliebig gegebenen $\delta' q_0$ gemäß bestimmen.

Da nun sämtliche $\mathfrak{G}_j$ verschwinden (30*), und nur noch $\delta' q_0$ von 0 verschieden ist, so hat man gemäß der Gleichung (23**)

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt = \int_{t_0}^{t_1} \mathfrak{G}_0 \delta' q_0 dt.$$

Aus der Willkürlichkeit von $\delta' q_0$ folgt daher, daß auch

$$(30^*) \quad \mathfrak{G}_0 = 0$$

ist. Man hat demnach bei Einführung der $\delta' q$

$$\sum_1^n L_i \delta' q_i = \sum_1^{n-r} \mathfrak{G}_i \delta q_i = 0;$$

d. h. für das materielle System besteht das D'Alembertsche Prinzip.

Ad B.) Ich beweise den Satz mittels der in A) eingeführten Funktionen a_i , die ich den Beschränkungen unterwerfe, daß

$$F_2 \equiv \sum \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - a_i \right) \delta' q_i$$

weder an und für sich noch infolge der Bedingungsgleichungen verschwinde, und daß ferner $\sum_1^n a_i \delta' q_i$ zu den festen Zeiten t_0 und t_1 einen und denselben Wert annehme. Da die erste Beschränkung $n - \nu - 1$ Ungleichungen äquivalent, und die zweite sich nur auf die Grenzwerte der a_i bezieht, so kann diesen Bedingungen auf unendlich mannigfaltige Weise entsprochen werden. Dann sind aber die Schlüsse in (Ad A)) nicht nur bis zur Gleichung (30) erlaubt, sondern man kann weiter schließen, daß die G_j von der Wahl der a_i abhängen, daher Funktionen von t sind, die je nach Wahl der a_i von t_0 an bis t_1 ebensogut wachsen wie abnehmen können. Daher sind die $\mathfrak{C}_j = 0$; ebenso verschwinden auch die $\mathfrak{C}_0$; also ist das D'Alembertsche Prinzip eine Folge der in B) gestellten Forderungen.

VII. Die Forderung, daß die N_i nicht sämtlich verschwinden, ist zum Beweis des Satzes in VI. ad A) wesentlich. Hat man den entgegengesetzten Fall vor Augen, daß also

$$(31) \quad \sum_1^n \left(\frac{\partial f_2}{\partial q_i} - a_i \right) \delta' q_i = 0$$

ist, falls nur die q_i' und $\delta' q_i$ den Bedingungsgleichungen des materiellen Systems gemäß sind, so gehen die Gleichungen (27) und (27*) über in

$$(31^*) \quad \sum_1^n a_{0i} \delta' q_i = 0; \quad a_{0i} = \frac{\partial f_2}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f_2}{\partial q_i'},$$

$$(31^{**}) \quad \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1}.$$

Es sind zwei Fälle möglich: entweder ist zur Erfüllung der Gleichung (31*) auch noch die Heranziehung der zu bestimmenden Differentialgleichungen der Bewegung notwendig; oder es genügen zu ihrer Erfüllung schon die Bedingungsgleichungen für sich.

Im letzteren Fall ist die Bewegung notwendigerweise die natürliche. Da nämlich die Variationsvorschrift (27**) für sämtliche virtuellen Verrückungen erfüllt ist, wie auch sonst die Bewegungsgleichungen beschaffen sind, an Stelle von (22) aber die Vorschrift (31**) tritt, die bloß eine Beziehung zwischen δt_0 und δt_1 feststellt, so ist die Gleichung (23**) für sämtliche virtuellen Verrückungen $\delta' q_i$ zu erfüllen. Daraus folgt, selbst

wenn t_0 und t_1 fixe Zeitpunkte bedeuten, daß die Bewegung des Systems notwendigerweise die natürliche ist.

Im ersteren Fall ist hingegen die Bewegung nicht notwendigerweise die natürliche. In diesem Fall ist nämlich die Gleichung (31*) als neue Bedingungsgleichung zu betrachten, die für die Wahl der $\delta' q_i$ eine neue Beschränkung bildet. Daher sind die Bewegungsgleichungen von der Form

$$(32) \quad L_i + \lambda_0 a_{0i} + \sum_1^v \lambda_k a_{ki} = 0, \quad (i=1, \dots, n),$$

wo λ_0 ein Lagrangescher Koeffizient ist. Als Beispiel für diesen Fall diene, wenn $a_i \equiv \frac{\partial f_2}{\partial q_i}$ ist für sämtliche $i = 1, \dots, n$.

Der Koeffizient λ_0 läßt sich näher bestimmen, falls nur $\sum_1^n a_{0i} q'_i$ von Null verschieden ist. Substituiert man nämlich in (31*) $\delta' q_i = \delta q_i - q'_i \delta t$, so nimmt sie die Form an

$$\sum_1^n a_{0i} q'_i \delta t = \sum_1^n a_{0i} \delta q_i,$$

d. i.

$$\delta t = \sum_1^n A_{0i} \delta q_i; \quad A_{0i} \equiv \frac{a_{0i}}{\sum_1^n a_{0j} q'_j}.$$

Führt man dieses δt in den Vossischen Bedingungsgleichungen (16) ein, so hat man für diese

$$(16^{**}) \quad \sum_1^n (a_{ki} + a_{k0} A_{0i}) \delta q_i = 0.$$

Ebenso geht die Gleichung (23**) über in diese

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_1^n L_i \delta q_i - \sum_1^n L_j q'_j \sum_1^n A_{0i} \delta q_i \right) \delta t = 0,$$

d. i.

$$\int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \left(L_i - A_{0i} \sum_1^n L_j q'_j \right) \delta q_i \delta t = 0.$$

Da nun hier die δq_i im Zeitintervall t_0 bis t_1 bloß den Gleichungen (16**) unterliegen, so folgt aus dieser Gleichung, selbst bei festen t_0 und t_1 , für die Bewegungsgleichungen die Form:

$$L_i - A_{0i} \sum_1^n L_j q_j' + \sum_1^v \lambda_k (a_{ki} + a_{k0} A_{0i}) = 0;$$

d. i.

$$L_i - \frac{a_{0i}}{\sum_1^n a_{0j} q_j'} \left(\sum_1^n L_j q_j' - \sum_1^v \lambda_k a_{k0} \right) + \sum_1^v \lambda_k a_{ki} = 0;$$

also

$$(32^*) \quad \lambda_0 = \frac{1}{\sum_1^n a_{0j} q_j'} \left(- \sum_1^n L_j q_j' + \sum_1^v \lambda_k a_{k0} \right).$$

Die Bewegung des Systems ist daher gar nicht die natürliche, es wäre denn daß zu den Forderungen des Variationsproblems noch die Gültigkeit des Satzes von der lebendigen Kraft hinzukäme; dann ist nämlich $\lambda_0 = 0$.

VIII. Es seien die Gleichungen

$$(15) \quad a_{k0} + a_{k1} q_1' + a_{k2} q_2' + \cdots + a_{kn} q_n' = 0, \\ (k = 1, \dots, v)$$

die Bedingungsgleichungen des materiellen Systems; $c_1, c_2, \dots, c_n$ ein solches *nur* von den a_{ki} abhängiges *partikuläres* Lösungssystem dieser Gleichungen, daß die c_0 sämtlich verschwinden, wenn die a_{k0} sämtlich verschwinden. Dann bildet das System

$$\delta' q_i = (c_i - q_i') \delta t; \quad (i = 1, \dots, n)$$

ein partikuläres System von virtuellen Verrückungen. Wäre also f_2 von der Eigenschaft, daß bei entsprechenden Koeffizienten l_k

$$(33) \quad \sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} \delta' q_i + \sum_1^v l_k \sum_1^n a_{ki} \delta' q_i \equiv 0$$

ist, dann wäre auch

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} (c_i - q_i') + \sum_1^v l_k \sum_1^n a_{ki} (c_i - q_i') \equiv 0,$$

das ist

$$(33^*) \quad \sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q_i'} q_i' + \sum_1^v l_k \left(a_{k0} + \sum_1^n a_{ki} q_i' \right) \equiv \sum_1^n c_i \frac{\partial f_2}{\partial q_i'}.$$

Bedenkt man dies, so folgt aus dem Lehrsatz in VI, pag. 180 der

Lehrsatz. Ist $f_2 = f - f_1$ von der Eigenschaft, daß die $\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q'_i} q'_i$ mittels der linearen Substitution (15) nicht auf die Form $\sum_1^n c_i \frac{\partial f_2}{\partial q'_i}$ gebracht werden kann, wo die c_i , falls die Gleichungen (15) homogen, sämtlich verschwinden und auch sonst unabhängig von den q'_i sind: so ist die Forderung, daß die simultanen Gleichungen

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt &= 0, \\ \delta'(f - f_1) &= 0, \\ \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q'_i \right]_{t_0}^{t_1} &= 0, \\ \sum_1^n a_{ki} \delta' q_i &= 0, \quad (k=1, \dots, \nu) \\ a_{k0} + \sum_1^n a_{ki} q'_i &= 0, \quad ,, \end{aligned}$$

für beliebig verschiebbare t_0 und t_1 Bestand haben, äquivalent damit, daß die q_i das System gewöhnlicher Differentialgleichungen befriedigen

$$\frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q'_i} + \sum_1^\nu \lambda_k a_{ki} = 0, \quad (i=1, \dots, n)$$

wo die $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ Lagrangesche Koeffizienten sind.

IX. Zerlegt man demnach $T + U$ in zwei beliebige additive Teile f_1 und f_2 , so erhält man bei Anwendung der in VII bewiesenen Sätze Variationssätze, die dem Hamiltonschen Satz äquivalent sind.

Wirken auf das System auch Kräfte ohne Potential, so erleidet das Variationsprinzip die Modifikation, daß an Stelle von $\int \delta' f_2 dt$ der Ausdruck $\int \left(\delta' f_2 + \sum_1^n Q_i \delta q_i \right) dt$ tritt.

Die bisher untersuchten Fälle sind:

1. $f_1 = 2T, \quad f_2 = U - T,$
2. $f_1 = \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i, \quad f_2 = f - \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i \equiv -F.$

Herr Voss hat den Fall 1., wie oben erwähnt wurde, nur in dem Fall

untersucht, wenn U von den q_i' unabhängig ist. Bei der Beschränkung $\frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0$ wurde der Fall 2. von Herrn A. Mayer untersucht; ohne dieser Beschränkung von mir. Aus der unendlichen Mannigfaltigkeit möglicher Zerlegungen sind hervorzuheben

$$3. \quad f_1 = U, \quad f_2 = T;$$

$$4. \quad f_1 = f, \quad f_2 = 0.$$

Die Funktionen f_1 und f_2 sind natürlich auch umkehrbar. Die Umkehrung von 1. führt auf ein Prinzip, welches der Herzschen Form*) ähnelt, von dieser aber im Grunde genommen ganz verschieden ist. Die Zerlegung von f in

$$5. \quad f_1 = T - U, \quad f_2 = 2U$$

gibt ebenfalls ein Prinzip von solcher Form; diese, wie auch die Umkehrung von 3., nämlich

$$6. \quad f_1 = T, \quad f_2 = U,$$

liefern ein Beispiel für den Ausnahmefall VII, a), wenn das System nur von Kräften angegriffen wird, denen ein von Geschwindigkeiten unabhängiges Potential zukommt. Der Ausdruck des dem Hamiltonschen äquivalenten Prinzips lautet nämlich im Fall 6. wie folgt: Die Variation $\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt$ ist $= 0$ bei Einhaltung der Variationsvorschriften

$$\delta' U = 0, \quad \left[T \delta t + \sum_1^n \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

$$\sum_1^n a_{\nu i} \delta' q_i = 0, \quad (\nu = 1, \dots, \nu)$$

für die natürliche Bewegung und nur für diese, falls für die Bewegung die Erhaltung des Prinzips der lebendigen Kraft gültig sein soll. Man erhält von 5. aus ein gleichwertiges Prinzip: es ist dann $\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0$, wenn an Stelle der zweiten Vorschrift diese kommt

$$\left[(T - U) \delta t + \sum_1^n \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

während alles übrige unverändert bleibt.

Die Zerlegung 5. auf das Theorem VI, im Fall B) angewandt, führt auf einen korrekten arithmetischen Ausdruck des vielumstrittenen Ostwaldschen Prinzips. Fordert man nämlich, daß die Variationsgleichungen

*) Gesammelte Werke Bd. 3, pag. 363.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} T dt = 0, \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta'(T-U) dt = 0, \quad \left[T \delta t + \sum \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0$$

für jedes virtuelle Verschiebungssystem $\delta' q_i$ Bestand haben, so entspricht diesen Forderungen ausschließlich nur die natürliche Bewegung des Systems. T und U können ihre Rollen auch vertauschen, was dem Sinne des Ostwaldschen Ausspruchs gemäß ist.

Ad 1. Ich bezeichne im Falle 1. das $\int f_1 dt$ mit A_1 , also

$$A_1 \equiv \int_{t_0}^{t_1} 2 T dt;$$

es ist dies die Aktion des materiellen Systems im gewöhnlichen Sprachgebrauch.

In diesem Falle besteht für die Grenzwerte von δt im Sinne von (22)

$$(22_1) \quad \left[2 T \delta t + \sum_1^n \frac{\partial(T+U)}{\partial q_i'} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Ist U unabhängig von den q_i' , so geht diese in die Vossische Grenzgleichung über. Sind außerdem noch die Bedingungsgleichungen der Bewegung unabhängig von der Zeit, also $\sum \frac{\partial T}{\partial q'} q' = 2 T$, so geht (22₁) über in die bekannte Form

$$\left[\sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_i'} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Ad 2. Ich bezeichne im Falle 2. das $\int f_1 dt$ mit A_2 , also

$$A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' dt;$$

ich habe dieses Integral in meinen oben genannten Arbeiten mit dem Namen „Aktion des Systems“ belegt; ich werde es hier *Aktion* A_2 nennen. Für diesen Namen spricht der Umstand, daß das Integral im einfacheren Fall, wo die Bedingungsgleichungen der Bewegung unabhängig sind von der Zeit, und das Potential unabhängig ist von den Geschwindigkeiten, identisch ist mit A_1 . Sind aber die Bewegungsgleichungen der Bewegung auch von der Zeit abhängig, so ist dies dem Umstande zuzuschreiben, daß das System mit äußern beweglichen Massen in Verbindung steht; diesem *vollständigen* System kommt daher eine lebendige Kraft zu, die außer der Summe der lebendigen Kräfte der beiden Systeme auch noch additive Glieder enthält, in denen die Geschwindigkeiten des innern Systems

linear vorkommen. Enthält endlich das Potential auch die Geschwindigkeiten des Systems, so ist das nach Helmholtz der Bewegung verborgener Massen zuzuschreiben, mit denen das eigentliche System zu ergänzen ist: daher steht an Stelle von T die Summe $T + U$.

Zwischen den Grenzwerten von δt und den $\delta' q_i$ besteht in diesem Falle die Gleichung

$$\left[\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

das ist:

$$(22_2) \quad \left[\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Es gibt kaum eine andere wirkliche Zerlegung von f , zu der eine solch' einfache Grenzgleichung gehört.

Diese Zerlegung zeichnet sich auch durch andere Eigenschaften aus. Zu diesen gehört die Eigenschaft, daß die Funktion

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q'_i} q'_i,$$

die beim Ausspruch des Prinzips eine wichtige Rolle spielt, nur in singulären Punkten der natürlichen Bewegung verschwindet. Es ist nämlich, da $f_2 = f - f_1$,

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q'_i} q'_i \equiv \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i - \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial q'_i} q'_i \equiv f_1 - \sum_1^n \frac{\partial f_1}{\partial q'_i} q'_i,$$

also

$$\sum_1^n \frac{\partial f_2}{\partial q'_i} q'_i \equiv - \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial q'_i \partial q'_j} q'_i q'_j,$$

Es ist demnach $\sum \frac{\partial f_2}{\partial q'_i} q'_i$, wenn man die $\frac{\partial^2 f}{\partial q'_i \partial q'_j}$ als Koeffizienten auffaßt, eine quadratische Funktion der Geschwindigkeitskomponenten; und die Determinante dieser quadratischen Funktion ist die Funktionaldeterminante von f , nämlich

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_1 \partial q'_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial^2 f}{\partial q'_n \partial q'_1}, & \dots, & \frac{\partial^2 f}{\partial q'_n \partial q'_n} \end{vmatrix},$$

dieselbe Determinante, die bei der Lösung der Differentialgleichungen der zu $f = T + U$ gehörigen natürlichen Bewegung eine so wichtige Rolle spielt; die im Falle U das Potential von Kräften ist, wie sie in der Natur

vorkommen, und das materielle System, wie auch deren Bedingungsgleichungen natürliche sind, höchstens in isolierten Punkten, nie aber identisch verschwinden kann. Dasselbe kann also auch bezüglich $\sum \frac{\partial f_2}{\partial q'_i} q'_i$ ausgesprochen werden, auch diese verschwindet höchstens in isolierten Punkten. Bei dieser Zerlegung ist also f_2 von der im Lehrsatz zu VIII (pag. 185) vorausgesetzten Eigenschaft, da sonst, sobald die Bedingungsgleichungen (15) in homogene übergehen, die Funktionaldeterminante verschwinden müßte. *Bei dieser Zerlegung entspricht daher den im Lehrsatz aufgestellten Forderungen nur die natürliche Bewegung des materiellen Systems.* Der Lehrsatz umfaßt demnach das Prinzip der kleinsten Aktion, wenn man mit letzteren Namen das Integral

$$A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i dt$$

belegt.

Ad 4. In diesem Fall besteht zwischen den Grenzwerten von δt und von den δq_i die Gleichung

$$\left[f \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

und bei Einhaltung dieser einzigen Variationsvorschrift liefert die Gleichung

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f dt = 0$$

die natürliche Bewegung, und nur diese.

Ist hingegen $f_1 = 0$, $f_2 = f$, so besteht die Grenzggleichung

$$\left[\sum \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0,$$

und bei Einhaltung dieser einzigen Variationsvorschrift liefert die Forderung

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta' f dt = 0$$

die natürliche Bewegung, und nur diese.

Dies ist das Hamiltonsche Prinzip.

X. Aus der Identität (21) folgt mittels (25) die Identität

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 dt - \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} \equiv \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt.$$

Aus dieser folgen die Sätze:

1. Fordere ich, daß $\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt = 0$ sei für jedes virtuelle System $\delta' q_i$, vorausgesetzt nur, daß zwischen δt und den $\delta' q_i$ zu jeder Zeit die Gleichung

$$(19^*) \quad \delta' f_2 - \frac{d}{dt} \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i = \frac{d}{dt} (f_2 \delta t) - \sum_1^n Q_i \delta' q_i$$

als Variationsvorschrift gilt, so ist die Bewegung notwendigerweise und ausschließlich die zum kinetischen Potential $f = T + U$ und dem Kräftesystem Q_i gehörige natürliche Bewegung.

2. Dasselbe gilt auch, wenn die Variationsvorschrift (19*) durch die folgenden zwei Gleichungen ausgedrückt wird:

$$(20^*) \quad \delta' f_2 = \frac{d}{dt} (f_1 \delta t) - \sum_1^n Q_i \delta' q_i; \quad \left[\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

3. Diese Variationsvorschrift kann ebenso ersetzt werden durch

$$(20^{**}) \quad \delta' f_2 = \frac{d}{dt} \left[\left(f_1 - \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} q'_i \right) \delta t \right] - \sum_1^n Q_i \delta' q_i; \\ \left[\sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q'_i} \delta q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Diese Vorschriften bestimmen nämlich (auf dieselbe Weise, wie (19) und (20) in IV) die Variation δt , welche dem System der Zeitfunktionen $\delta' q_i$ im Verlauf der ganzen Bewegung zugeordnet wird. Demzufolge sind diese Aussprüche des Prinzips vom D'Alembertschen resp. Hamiltonschen bloß durch ihre Weitschweifigkeit verschieden.

XI. *Bemerkung zur Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren.* Behandelt man das Problem, alle Systeme von Differentialgleichungen zu finden, für welche bei beliebig verschiebbaren t_0 und t_1 die Variation

$\delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt = 0$ ist, falls $f_2 =$ einer gegebenen Zeitfunktion ist und zwischen

den Grenzwerten von δt und δq_i die Gleichung (22) bestehen soll, mittels der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren, so kommt man zu denselben Resultaten. Diese Methode läßt sich aber auf das in VI. behandelte allgemeinere Problem nicht anwenden. Dies ist die Ursache, weshalb ich von der genannten Methode hier keinen Gebrauch gemacht habe.

§ 3.

Die Jacobische Transformation der Aktion A_2 .

XII. Es sei $f = T + U$ eine quadratische Funktion der q_i' . Ich schreibe f in der Form

$$(34) \quad f \equiv f^{(0)} + f^{(1)} + f^{(2)},$$

wo die Indizes (0), (1), (2) den Grad des Gliedes in q_i' bedeuten. Man hat so

$$(35) \quad f_1 \equiv \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' \equiv f^{(1)} + 2f^{(2)},$$

daher

$$(36) \quad f_2 \equiv f - f_1 \equiv f^{(0)} - f^{(2)}.$$

Demnach ist die Energie

$$(37) \quad F \equiv \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i'} q_i' - f \equiv f^{(2)} - f^{(0)},$$

und

$$(38) \quad A_2 \equiv \int_{t_0}^{t_1} (2f^{(2)} + f^{(1)}) dt.$$

Ich schreibe

$$(39) \quad f^{(1)} \equiv \sum_1^n b_i \frac{dq_i}{dt}, \quad 2f^{(2)} \equiv \sum_1^n b_{ij} \frac{dq_i}{dt} \frac{dq_j}{dt},$$

ferner die Gleichungen (37) und (38) in der Form

$$\frac{1}{2} \frac{\sum_1^n b_{ij} dq_i dq_j}{dt^2} \equiv f^{(0)} + F;$$

$$A_2 \equiv \int \left[\frac{\sum b_{ij} dq_i dq_j}{dt} + \sum b_i dq_i \right];$$

d. i.

$$(40) \quad dt = \sqrt{\frac{\sum b_{ij} dq_i dq_j}{2(f^{(0)} + F)}},$$

$$(40^*) \quad A_2 \equiv \int \left(\sqrt{2(f^{(0)} + F)} \sum b_{ij} dq_i dq_j + \sum b_i dq_i \right);$$

und mit s eine nicht zu variierende Variable bezeichnet

$$(41) \quad A_2 \equiv \int_{s_0}^{s_1} \left(\sqrt{2(f^{(0)} + F)} \sum_1^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_1^n b_i \dot{q}_i \right) ds.$$

Diese nach der Jacobischen Methode transformierte Form der Aktion A_2 hat nun die Eigenschaft, daß sie formal zu den natürlichen Bewegungsgleichungen führt, wenn man fordert, daß ihre bei der Supposition $\delta t = 0$, $\delta F = 0$ gebildete Variation verschwinde, sobald nur die Grenzwerte der δq_i verschwinden. Ich setze, um dies zu beweisen

$$(42) \quad \varphi^{(1)} \equiv \sum_1^n b_i \dot{q}_i; \quad \varphi^{(2)} \equiv \sum_1^n b_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j;$$

dann ist

$$(42^*) \quad \frac{dt}{ds} = \sqrt{\frac{\varphi^{(2)}}{2(f^{(0)} + F)}}; \quad A_2 \equiv \int_{s_0}^{s_1} (\sqrt{2(f^{(0)} + F)} \varphi^{(2)} + \varphi^{(1)}) ds.$$

Man hat

$$2\sqrt{2} \delta \sqrt{(f^{(0)} + F)} \varphi^{(2)} = \frac{ds}{dt} \delta_t \varphi^{(2)} + 2 \frac{dt}{ds} \delta_t f^{(0)}.$$

Nun ist bei Rücksichtnahme auf (42) und (39)

$$\delta_t \varphi^{(2)} \frac{ds}{dt} ds = \delta_t \varphi^{(2)} \frac{ds}{dt} \frac{ds}{dt} dt = 2 \delta_t f^{(2)} dt.$$

Da endlich

$$\begin{aligned} \delta \varphi^{(1)} ds &= \delta_t f^{(1)} dt, \\ ds \cdot \sqrt{2} \delta \sqrt{(f^{(0)} + F)} \varphi^{(2)} &= (\delta_t f^{(2)} + \delta_t f^{(0)}) dt, \end{aligned}$$

so hat man als Ausdruck der ersten Variation der Aktion A_2 bei der genannten Supposition

$$(43) \quad \delta A_2 = \int_{t_0}^{t_1} \delta_t f dt.$$

Die Forderung, daß dieses δA_2 verschwinde, wenn die Grenzwerte der δq_i verschwinden, ist demnach mit dem Hamiltonschen Prinzip formal äquivalent; sie führt daher zu denselben Differentialgleichungen der Bewegung. Die Rechnungen hören aber auf, rein formale zu sein, und haben reelle Bedeutung, wenn man das Problem wie folgt auffaßt:

Man denke sich, $F = E(t)$ als numerische Funktion gegeben, so wie sie bei der wahren Bewegung, bei den numerisch gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten zum Vorschein kommt; aus $F = E(t)$ die numerisch feste Zeitfunktion $t = z(F)$ berechnet; und in den b_i , b_{ij} , $f^{(0)}$ an Stelle von t überall diese Zeitfunktion gesetzt. Man betrachte alsdann die Gleichung (40) als Definitionsgleichung für dt , und frage nach dem System von Differentialgleichungen, die der Aktion

$$(44) \quad A_2 \equiv \int_{F_0}^{F_1} \left(\sqrt{2(f^{(0)} + F)} \sum b_{ij} \frac{dq_i}{dF} \frac{dq_j}{dF} + \sum b_i \frac{dq_i}{dF} \right) dF$$

ihren größten oder kleinsten Wert verschaffen, wenn F die unabhängig variable ist, und die Anfangs- und Endwerte der δq_i verschwinden.

Die Lösung dieses Problems ist ein System von Differentialgleichungen, die sich von den Bewegungsgleichungen der Dynamik nur dadurch unterscheiden, daß an Stelle der im kinetischen Potential explizit vorkommenden Zeit t die Zeitfunktionen $z(F)$ zu stehen kommt. Es sind dies dieselben Gleichungen, zu denen ich durch die Interpretation des Helmholtz'schen Verfahrens gelangt bin; die Gleichungen, von denen ich gezeigt habe, daß nur ihre von jenen numerisch gegebenen Anfangslagen und Anfangsgeschwindigkeiten ausgehenden partikulären Lösungen mit den wahren Bewegungen des materiellen Systems sich decken. Demzufolge gehen diese Gleichungen, wenn man hinzufügt, daß nur von diesen partikulären Lösungen die Rede ist, in die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen über*).

§ 4.

Verallgemeinerung für kinetische Potentiale höherer Ordnung.

XIII. Es sei f eine beliebige Funktion der Variablen

$$t, q_i, q_i', \dots, q_i^{(k)}, \dots, q_i^{(m)} \quad (i=1, \dots, r);$$

und es sei q_i mit $q_i^{(0)}$ bezeichnet. Man hat dann

$$(47) \quad \delta' f \equiv \sum_0^m \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i^{(k)}} \frac{d^k}{dt^k} \delta' q_i.$$

Es ist nämlich, wie bekannt,

$$\delta f dt - df \delta t \equiv \sum_0^m \sum_1^n \frac{\partial f}{\partial q_i^{(k)}} (\delta q_i^{(k)} - q_i^{(k+1)} \delta t) dt;$$

aus dieser folgt der Satz (47), wenn man die Gleichung (7) in der Form schreibt

$$\delta q_i' - \frac{\partial q_i'}{\partial t} \delta t \equiv \frac{d}{dt} (\delta q_i - q_i' \delta t),$$

an Stelle von q_i die Differentialquotienten $q_i^{(k-1)}, \dots$ substituiert und so die Identitäten verifiziert:

$$(48) \quad \delta' q_i^{(k)} - \frac{d q_i^{(k)}}{dt} \delta t \equiv \frac{d}{dt} \left(\delta q_i^{(k-1)} - \frac{d q_i^{(k-1)}}{dt} \delta t \right) \equiv \frac{d^2}{dt^2} \left(\delta q_i^{(k-2)} - \frac{d q_i^{(k-2)}}{dt} \delta t \right) \\ \equiv \dots \equiv \frac{d^k}{dt^k} \delta' q_i.$$

*) Siehe § 3 und § 6 meines in den Math. Ann. Bd. 48 erschienenen Aufsatzes. Ich bemerke, daß pag. 526 Z. 6 v. u. und pag. 529 Z. 8 v. o. an Stelle von „ δq_i “ zu schreiben ist „ δq_i und δt “; pag. 529 Z. 19 v. o. sind die Worte „nothwendige und“ zu streichen; pag. 530 Z. 7 v. u. ist an Stelle von „des Satzes (2)“ zu schreiben „der Sätze (1) und (2)“.

Da ferner

$$\delta' f dt \equiv \delta f dt - df \delta t \equiv \delta(f dt) - d(f \delta t),$$

so erhält man von (47) aus auf bekanntem Wege

$$(49) \quad \delta(f dt) \equiv d \left(f \delta t + \sum_1^n \sum_0^{m-1} L_{ik} \frac{d^k}{dt^k} \delta' q_i \right) + \sum_{1,}^n L_i \delta' q_i dt,$$

wo

$$L_i \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i'} + \cdots + (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}},$$

$$L_{ik} \equiv \frac{\partial f}{\partial q_i^{(k+1)}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial q_i^{(k+2)}} + \cdots + (-1)^{m-k-1} \frac{d^{m-k-1}}{dt^{m-k-1}} \frac{\partial f}{\partial q_i^{(m)}}.$$

Aus (49) folgt mittels Integration

$$(50) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f dt \equiv \left[f \delta t + \sum_1^n \sum_0^{m-1} L_{ik} \frac{d^k}{dt^k} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt,$$

eine Identität, die sich von der von Herrn Königsberger zum Ausgangspunkt genommenen Form nur dadurch unterscheidet, daß hier die Variationen $\delta' q_i$ eingeführt sind.

Man zerlege f in zwei beliebige additive Teile f_1 und f_2 und treffe für die Grenzwerte der δt und $\delta' q_i$ die Festsetzung

$$(51) \quad \left[f_1 \delta t + \sum_1^n \sum_0^{m-1} L_{ik} \frac{d^k}{dt^k} \delta' q_i \right]_{t_0}^{t_1} = 0.$$

Die Gleichung (50) läßt sich dann mit Rücksichtnahme auf die Identität (25) in der Form schreiben

$$(52) \quad \delta \int_{t_0}^{t_1} f_1 dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta' f_2 dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n L_i \delta' q_i dt.$$

Diese Gleichung ist der äußern Form nach mit (23*) identisch; da die Identität (47) bloß eine Verallgemeinerung der Form (10*) bildet, wie auch die bezüglich der Grenzwerte getroffene Festsetzung (51) bloß eine Verallgemeinerung von (22) ist, so ergeben sich die Verallgemeinerungen der in § 2 ausgesprochenen und bewiesenen Sätze von selbst.