Ein Satz über die zweite Funktionenklasse.

Von Celestyn Burstin in Wien.

Nach Baire¹⁾ heißt eine Funktion von nullter Klasse, wenn sie stetig ist, von erster Klasse, wenn sie Grenze von stetigen Funktionen ist, ohne selbst stetig zu sein, und von zweiter Klasse, wenn sie Grenze von Funktionen erster Klasse ist, ohne selbst eine Funktion nullter oder erster Klasse zu sein. Für die Funktionen nullter Klasse gilt bekanntlich folgender Satz: Aus der Gesamtheit aller stetigen Funktionen läßt sich eine abzählbare Menge von stetigen Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots$ herausgreifen, welche folgende Eigenschaft besitzt: ist $\varphi(x)$ irgend eine stetige Funktion, so kann man aus der Menge $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x) \dots$ eine Teilmenge $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots$ herausgreifen, so daß diese Teilmenge gleichmäßig gegen die Funktion $\varphi(x)$ konvergiert.²⁾

In dieser Arbeit wollen wir erstens zeigen, daß für Funktionen erster Klasse ein ähnlicher Satz gilt, zweitens, daß für die Funktionen zweiter Klasse keine abzählbare Menge im Sinne L meßbarer Funktionen existiert, welche die Eigenschaft hätte, daß jede Funktion der zweiten Klasse durch irgend eine Teilfolge dieser Funktionenmenge gleichmäßig approximierbar wäre.

Wir führen zunächst einige bekannte Sätze an, auf die wir uns nachher stützen werden.

1. Satz: Ist eine im Sinne B ³⁾ meßbare Funktion $f(x)$ gegeben, welche auf einer Menge M vom Inhalt $x > 0$ definiert ist, so gibt zu jeder positiven Zahl α , wobei $0 < \alpha < x$ ist, eine perfekte Menge P_α vom Inhalt $x - \alpha$, auf welcher $f(x)$ stetig ist.

Um den Satz zu beweisen, führen wir einen Hilfssatz an:

Hilfssatz: Konvergiert eine Funktionenfolge $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ gegen eine Funktion $f(x)$ auf der Menge M vom Inhalt $x > 0$, so gibt zu jeder positiven

¹⁾ R. Baire: Acta mathematica, Bd. 30, Seite 1.

²⁾ Den Satz hat zuerst bewiesen Weierstraß.

³⁾ Unter „im Sinne B meßbare Funktionen“ versteht man die Funktionen der Menge E . Die Menge E hat folgende Eigenschaften 1. sie enthält alle stetigen Funktionen, 2. sie enthält mit den Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ auch ihren limes superior und inferior, 3. sie ist die kleinste Menge, welche die Eigenschaften 1, 2 besitzt.

Zahl α , wobei $0 < \alpha < x$ ist, eine perfekte Menge P_α , welche in der Menge M enthalten ist und vom Inhalt $x - \alpha$ ist, wo die Funktionenfolge $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ gleichmäßig konvergiert.

In der Tat, sei $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$ eine Folge positiver Zahlen, wo $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ist, dann konstruieren wir zu einer zweiten Folge positiver Zahlen $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$, wo $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \alpha$ ist, eine neue Folge positiver Zahlen $\alpha'_1, \alpha'_2 \dots \alpha'_n \dots$, für welche erstens $\alpha'_n > \alpha_n$ ist und zweitens

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'_n = \alpha$$

ist.

Da die Funktionenfolge $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi^n(x), \dots$ auf der Menge M konvergiert, so gibt es bekanntlich zu jeder positiven Zahl ε und α eine natürliche Zahl n und eine Menge M_α vom Inhalt $x - \alpha$, so daß:

$$|\varphi_m(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ist wenn $m \geq n$ ist, und wenn x ein Punkt der Menge M_α ist, wobei M_α in der Menge M enthalten ist.

Es folgt daraus, daß zu jeder positiven Zahl ε_1 und α_1 eine natürliche Zahl n_1 und eine Menge M_1 existiert derart, daß

$$(I) |\varphi_m(x) - f(x)| < \varepsilon_1$$

ist, wenn $m \geq n_1$ ist und wenn x ein Punkt der Menge M_1 ist, wo die Menge M_1 in der Menge M enthalten ist und vom Inhalt $x - \alpha_1$ ist. Innerhalb der Menge M_1 gibt es eine perfekte Menge P_1 vom Inhalt $x - \alpha'_1 < x - \alpha_1$.¹⁾ Es gibt also die Ungleichung (I) für die Menge P_1 .

Allgemein gibt es zu den positiven Zahlen ε_n und α_n eine natürliche Zahl n_n und eine Menge M_n derart, daß

$$(II) |\varphi_m(x) - f(x)| < \varepsilon_n$$

ist, wenn $m \geq n_n$ ist, und wenn x ein Punkt der Menge M_n ist, wobei die Menge M_n in der perfekten Menge P_{n-1} enthalten ist, und wo die Menge M_n vom Inhalt $x - \alpha'_1 - \alpha'_2 - \dots - \alpha'_{n-1} - \alpha_n$ ist. Innerhalb der Menge M_n gibt es eine perfekte Menge P_n vom Inhalt $x - \alpha'_1 - \alpha'_2 - \dots - \alpha'_{n-1} - \alpha'_n < x - \alpha'_1 - \alpha'_2 - \dots - \alpha'_{n-1} - \alpha_n$. Es gilt also die Ungleichung (II) desto eher für die perfekte Menge P_n .

Bezeichnen wir den Durchschnitt aller perfekten Mengen $P_1, P_2, P_3, \dots P_n \dots$ mit Q_α , so ist erstens die Menge Q_α abgeschlossen

¹⁾ C. Burstin: Eigenschaften meßbarer und nichtmeßbarer Mengen. Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wiss. in Wien, math.-naturw. Klasse. Bd. 123, Abt. 2a, Seite 1526.

und zweitens vom Inhalt $\lim_{n=\infty} (x - \sum_{m=1}^n \alpha'_m) = x - \alpha$. Die Menge Q_α ist eine Summe einer abzählbaren Menge A und einer perfekten Menge P_α . Es ist also die Menge P_α auch vom Inhalt $x - \alpha$. Auf der perfekten Menge P_α ist die Funktionenfolge $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, wie man ohne weiteres einsehen kann, gleichmäßig konvergent.

Dadurch ist der Hilfssatz bewiesen, und aus ihm folgt die Richtigkeit des 1. Satzes. In der Tat, wäre der Satz für eine Funktion der Menge E falsch, es müßte eine Ordnungszahl β von der Eigenschaft existieren, daß für alle Funktionen der $\gamma < \beta$ Klassen der Satz richtig wäre, während er für die Funktionen der β^{ten} Klasse unrichtig wäre. Da aber die Funktionen der β^{ten} Klasse durch Grenzprozesse aus den Funktionen der $\gamma < \beta^{\text{ten}}$ Klassen entstehen, so muß der Satz 1 auch für die β^{ten} Klasse richtig sein.

2. Satz: Ist irgend eine abzählbare Menge von Funktionen der Menge E gegeben, welche auf der Strecke $0-1$ definiert sind, so gibt es dann zu jeder positiven Zahl $\varepsilon < 1$ eine perfekte Menge P vom Inhalt $1 - \varepsilon$, wo alle Funktionen dieser Menge stetig sind.¹⁾

In der Tat, da die Menge der Funktionen abzählbar ist, so kann man sie nach dem Typus ω ordnen. Es seien es die Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$. Es sei außerdem eine Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n \dots$ gegeben, wo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$$

ist.

Nach dem 1. Satz gibt es eine perfekte Menge P_1 vom Inhalt $1 - \varepsilon_1$, wo die Funktion $\varphi_1(x)$ stetig ist. Innerhalb der Menge P_1 gibt es wieder eine zweite perfekte Menge P_2 vom

¹⁾ Allgemein gilt für eine abzählbare Menge von Funktionen der Menge E der folgende Satz: Ist irgend eine abzählbare Menge A von Funktionen der Menge E gegeben, welche auf der Strecke $0-1$ definiert sind, so gibt es in jeder perfekten Menge P eine (nirgendwichtige in bezug auf die Menge P) Menge P_1 , welche perfekt ist und auf welcher alle Funktionen der Menge A stetig sind.

In der Tat seien $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x) \dots$ sämtliche Funktionen der Menge A und es sei $x = \chi(z)$ eine eindeutige stetige Funktion, welche die Strecke $0-1$ in die Strecke $0-1$ überführt und dabei eine perfekte nirgendwichtige Menge Q vom Inhalt $\varkappa > 0$ in die Menge P transformiert. Die Funktionen $\varkappa_1(z) = \varphi_1\{\chi(z)\}$, $\varkappa_2(z) = \varphi_2\{\chi(z)\}$, $\dots \varkappa_n(z) = \varphi_n\{\chi(z)\} \dots$ sind dann wieder im Sinne B meßbar, es existiert also nach dem 2. Satze auf der Menge Q vom Inhalt $\varkappa > 0$, eine perfekte nirgendwichtige Menge Q_1 vom Inhalt $\varkappa_1 < \varkappa$, wo alle Funktionen $\varkappa_1(z), \varkappa_2(z), \dots \varkappa_n(z) \dots$ stetig sind. Der Menge Q_1 entspricht bei der Transformation $z = \varphi(z)$ eine perfekte nirgendwichtige Menge P_1 (in x). Man sieht ohne weiteres, daß auf dieser perfekten Menge P_1 alle Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ stetig sein müssen.

Inhalt $1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, wo die Funktion $\varphi_2(x)$ stetig ist, und allgemein innerhalb der Menge P_{n-1} gibt es eine perfekte Menge P_n vom Inhalt $1 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 - \dots - \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n$, wo die Funktion $\varphi_n(x)$ stetig ist. Bezeichnen wir jetzt den Durchschnitt aller dieser perfekten Mengen $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ mit Q , so ist die Menge Q erstens abgeschlossen

und zweitens vom Inhalt $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \sum_{m=1}^n \varepsilon_m) = 1 - \varepsilon$. Die abgeschlossene

Menge Q ist eine Summe einer abgeschlossenen Menge A und einer perfekten Menge P . Es ist also die Menge P vom Inhalt $1 - \varepsilon$. Man sieht aber ohne weiteres, daß auf der Menge P jede Funktion der Funktionenmenge $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ stetig ist.

Wir wollen jetzt den angekündigten Satz beweisen:

3. Satz: Für die Funktionen zweiter Klasse gibt es keine abzählbare Menge von meßbaren im Sinne *B* Funktionen, welche die Eigenschaft hätte, daß jede Funktion der zweiten Klasse durch irgendeine Teilmenge dieser Menge approximierbar wäre.¹⁾

In der Tat existierte eine abzählbare Menge von Funktionen $f_1(x), f_2(x) \dots f_n(x) \dots$, welche im Sinne *B* meßbar wären und welche die verlangte Eigenschaft hätten, so könnte man zu einem Widerspruch kommen. Denn nach den 2. Satz müßte eine perfekte Menge P vom Inhalt $1 - \varepsilon$ existieren, wo alle Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots$ stetig wären. Da andererseits jede Funktion der zweiten Klasse durch irgend eine Teilfolge der Menge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x) \dots$ approximierbar wäre, so müßte jede Funktion der zweiten Klasse auf der perfekten Menge P höchstens punktweise unstetig sein.²⁾ Das ist aber unmöglich, da es Funktionen der zweiten Klasse gibt, welche auf der Menge P total unstetig sind. Wir zeigen das, indem wir ganz einfach eine solche Funktion konstruieren.

Es sei A eine abzählbare Menge, welche in der Menge P enthalten ist und die Eigenschaft besitzt, daß ihre Ableitung mit der Menge P zusammenfällt. Wir konstruieren dann eine Funktion $f(x)$ folgendermaßen:

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ für die Punkte der Menge } A \\ f(x) &= 0 \text{ für alle anderen Punkte der Strecke} \end{aligned}$$

0—1. Man sieht ohne weiteres, daß die Funktion $f(x)$ von der zweiten Klasse ist und auf der Menge P total unstetig ist. Dadurch ist also der 3. Satz bewiesen.

¹⁾ Für Funktionen, welche im Sinne *L* meßbar sind, gilt dasselbe. Es gibt keine abzählbare Menge von im Sinne *L* meßbaren Funktionen, welche die Eigenschaft hätte, daß jede Funktion der zweiten Klasse durch irgendeine Teilmenge dieser Menge approximierbar wäre. Dies folgt unmittelbar aus dem Beweis des 3. Satzes, wenn man bemerkt, daß jede im Sinne *L* meßbare Funktion einer Funktion zweiter Klasse wesentlich gleich ist.

²⁾ R. Baire: Leçons sur les fonctions discontinues: Seite 80—83.

4. Satz: Für die Funktionen zweiter Klasse gibt es keine abzählbare Menge von Funktionen, welche die Eigenschaft hätte, daß jede Funktion der zweiten Klasse durch eine Teilmenge dieser Menge gleichmäßig approximierbar wäre.

In der Tat bezeichnen wir die abzählbare Menge von Funktionen, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, welche die verlangte Eigenschaft besitzt, mit A . Wir wählen dann eine Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \dots, \varepsilon_n, \dots$, wobei $\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0$ ist, und bilden eine Folge von Funktionenmengen, die wir mit $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}, \dots$ bezeichnen. Jede Funktionenmenge $A^{(n)}$ hat folgende Eigenschaften: erstens ist sie eine Teilmenge der Menge A , zweitens ist $f_{n_n}^{(n)}(x)$ irgendeine Funktion der Menge $A^{(n)}$, so existiert mindestens eine Funktion $\varphi_n^{(n)}(x)$ von der zweiten Funktionenklasse derart, daß

$$|f_{n_n}^{(n)}(x) - \varphi_n^{(n)}(x)| < \varepsilon_n$$

ist (für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$).

Bezeichnen wir die Funktion $f_{n_n}^{(n)}(x) - \varphi_n^{(n)}(x)$ mit $\varepsilon_n^{(n)}(x)$, so ist $f_{n_n}^{(n)}(x) = \varphi_n^{(n)}(x) + \varepsilon_n^{(n)}(x)$, wobei $|\varepsilon_n^{(n)}(x)| \leq \varepsilon_n$ ist.

Es sei $A^{(\omega)}$ die Menge aller Funktionen, welche in mindestens einer der Funktionenmenge $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(n)}, \dots$ vorkommen. Die Menge $A^{(\omega)}$ ist dann auch eine Teilmenge der Menge A , und hat dieselbe Eigenschaft, wie die Menge A , d. i. jede Funktion $\varphi(x)$ der zweiten Funktionenfolge wird durch irgendeine Teilmenge der Menge $A^{(\omega)}$ gleichmäßig approximiert. In der Tat ist $\varphi(x)$ irgendeine Funktion der zweiten Funktionenklasse und ist $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_r}(x), \dots$ eine Teilmenge der Menge A , welche die Funktion $\varphi(x)$ gleichmäßig approximiert, dann gibt es zu der Zahl ε_1 ein Index n_r von der Eigenschaft, daß

$$|\varphi(x) - f_{n_m}(x)| \leq \varepsilon_1$$

ist, wenn $n_m \geq n_r$ ist (für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$). Es gehören dann also alle Funktionen $f_{n_r}(x), f_{n_{r+1}}(x), \dots, f_{n_m}(x), \dots$ wobei $n_m > n_r$ ist, der Menge $A^{(\omega)}$ und approximieren gleichmäßig die Funktion $\varphi(x)$.

Andrerseits sieht man ohne weiteres, daß die Funktionenmenge $\varphi_n^{(n)}(x)$, wo $n = 1, 2, \dots, m, \dots$ und $x = 1, 2, \dots, m, \dots$ ist, auch dieselbe Eigenschaft besitzt, wie die Funktionenmenge $A^{(\omega)}$. In der Tat, es ist $f_{n_m}(x) = \varphi_{n_m}(x) + \varepsilon_{n_m}(x)$, wo die Funktionen $\varphi_{n_m}(x)$

und $\varepsilon_{n_m}(x)$ Funktionen der Menge $\varphi_{\kappa}^{(n)}(x)$ und $\varepsilon_{\kappa}^{(n)}(x)$ sind¹⁾, wo $n=1, 2 \dots m \dots$ und $\kappa=1, 2, \dots m \dots$ ist.

Andrerseits ist irgendeine positive Größe ε gegeben, welche kleiner als die Größe ε_i ist, so können wir immer einen Index n_{κ} finden von der Eigenschaft,

$$|\varphi(x) - f_{n_m}(x)| \leq \varepsilon_i$$

ist (für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$), wenn nur $n_m \geq n_{\kappa}$ ist. Es ist aber $f_{n_m}(x) = \varphi_{n_m}(x) + \varepsilon_{n_m}(x)$, also

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_m}(x)| \leq |\varepsilon_{n_m}(x)| + \varepsilon_i.$$

Da aber $|\varepsilon_{n_m}(x)| < \varepsilon_i$ sein muß, so ist

$$|\varphi(x) - \varphi_{n_m}(x)| < 2\varepsilon_i$$

(für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$).

Es hat also die Menge der Funktionen $\varphi_{\kappa}^{(n)}(x)$, wo $n=1, 2, \dots m \dots$ und $\kappa=1, 2, \dots m \dots$ ist, dieselbe Eigenschaft, wie die Funktionenmenge $A^{(\omega)}$, und da diese Menge auch abzählbar ist und alle Funktionen $\varphi_{\kappa}^{(n)}(x)$ der zweiten Funktionenklasse angehören, so ist das nach dem 3. Satz unmöglich. Dadurch ist also der 4. Satz bewiesen.

Wir wollen jetzt einen Satz über die Funktionen erster Klasse beweisen:

5. Satz: Es existiert eine abzählbare Menge von Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x) \dots$, welche folgende Eigenschaft besitzt: ist $\varphi(x)$ irgend eine Funktion der ersten Klasse, so kann man eine Teilmenge von Funktionen $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots f_{n_{\kappa}}(x) \dots$ aus der Menge $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x), \dots$ herausgreifen, so daß diese Teilfolge gegen die Funktion $\varphi(x)$ konvergiert.

In der Tat sei $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x) \dots$ eine abzählbare Menge von stetigen Funktionen, welche die Eigenschaft besitzt, daß jede stetige Funktion gleichmäßig durch irgend eine Teilmenge dieser Menge approximiert wird. Es ist dann sehr leicht zu beweisen, daß diese Menge auch alle Funktionen der ersten Klasse approximiert. Ist nämlich $\varphi(x)$ irgend eine Funktion der ersten Klasse, so existiert

¹⁾ und zwar sollen die Funktionen $\varphi_{n_m}(x)$ und $\varepsilon_{n_m}(x)$ folgendermaßen gewählt werden: ist $|\varphi(x) - f_{n_m}(x)| \leq \varepsilon_r$ (für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$) aber nicht $|\varphi(x) - f_{n_m}(x)| \leq \varepsilon_{r+1}$ (für alle Punkte der Strecke $\overline{0-1}$), so sollen die Funktionen $\varphi_{n_m}(x), \varepsilon_{n_m}(x)$ mit irgendeiner Funktion $\varphi_1^{(r)}(x), \varphi_2^{(r)}(x) \dots \varphi_n^{(r)}(x) \dots, \varepsilon_1^{(r)}(x), \varepsilon_2^{(r)}(x), \dots \varepsilon_n^{(r)}(x) \dots$, (und auch die Funktion $f_{n_m}(x)$ mit irgendeiner Funktion der Menge $A^{(r)}$) zusammenfallen.

laut der Definition dieser Funktion eine Folge von stetigen Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$, welche gegen die Funktion $\varphi(x)$ konvergiert. Es ist also

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x).$$

Es sei $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \dots \geq \varepsilon_n \geq \dots$ eine Folge positiver Zahlen, wobei $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon$ ist, dann kann man zu jeder stetigen Funktion $\varphi_n(x)$ und jeder positiven Zahl ε_n eine stetige Funktion $f_{n_n}(x)$ aus der Menge $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ herausgreifen, so daß

$$|f_{n_n}(x) - \varphi_n(x)| < \varepsilon_n$$

ist. Wir wollen zeigen, daß

$$\lim_{n=\infty} f_{n_n}(x) = \varphi(x)$$

ist. In der Tat, ist x_0 irgend ein Punkt, so existiert zu jeder positiven Zahl ε eine natürliche Zahl r von der Eigenschaft, daß

$$|\varphi_m(x_0) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$$

ist, wenn $m \geq r$ ist. Andererseits ist aber

$$|f_{n_m}(x_0) - \varphi_m(x_0)| < \varepsilon_m;$$

es ist also

$$|f_{n_m}(x_0) - \varphi(x_0)| < \varepsilon + \varepsilon_m \leq \varepsilon + \varepsilon_r < 2\varepsilon$$

für alle $n_m \geq n_r$. Dadurch ist der 5. Satz bewiesen.

Aus dem 2. Satz folgt noch weiter ein Satz über die Funktionen der ersten Klasse.

6. Satz: Es existiert keine abzählbare Menge von Funktionen, $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, welche folgende Eigenschaft besitzt; ist $\varphi(x)$ irgend eine Funktion der ersten Klasse, so kann man nicht aus der Menge der Funktionen $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ eine Teilmenge $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_m}(x), \dots$ herausgreifen, so daß diese Teilfolge gegen die Funktion gleichmäßig konvergiert.

In der Tat, wäre das der Fall und wende man die Beweisführung des Satzes 4 an, so müßte eine perfekte Menge P vom Inhalt $\kappa > 0$ existieren, wo alle Funktionen $\varphi_x^{(n)}(x)$ der ersten Klasse stetig wären. Dies ist aber unmöglich, da sonst alle Funktionen der ersten Klasse auf der Menge P stetig wären. Es ist also der 6. Satz richtig.¹⁾

¹⁾ Es existieren nämlich Funktionen erster Klasse, welche auf der perfekten Menge P punktweise unstetig sind.

Anhang.

Wir wollen in den Anhang ein Beispiel einer kompakten, abgeschlossenen Funktionenmenge T geben, für welche das Abzählbarkeitsprinzip¹⁾ nicht gilt. Wir zeigen dies unter der Voraussetzung der Wohlordnung des Kontinuums. In der Tat läßt sich das Kontinuum unter der Voraussetzung der Wohlordnung in $\aleph_\nu = c$ nichtmeßbare Mengen spalten.²⁾ Wir ordnen diese Menge der nichtmeßbaren Mengen $M_1, M_2, \dots$ nach dem Typus Ω_ν . Es ist also:

$$S = \{M_1, M_2, \dots M_n \dots M_\omega \dots M_\varepsilon \dots M_\zeta \dots\}$$

wo $\varepsilon, \zeta \dots < \Omega_\nu$ ist.

Ist ε irgend eine Ordnungszahl, welche kleiner als Ω_ν ist, so ordnen wir ihr die Menge P_ε zu, wo

$$P_\varepsilon = M_1 + M_2 + \dots + M_\omega + \dots + M_\varepsilon + \dots$$

ist, also wo die Menge P_ε alle Mengen M_ε enthält, deren Index ε kleiner als die Ordnungszahl ε ist. Wir ordnen jetzt jeder Ordnungszahl ε eine Funktion $f_\varepsilon(x)$ folgendermaßen:

$$f_\varepsilon(x) = 1 \text{ für alle Punkte der Menge } P_\varepsilon$$

$$f_\varepsilon(x) = 0 \text{ für alle anderen Punkte der Strecke}$$

0 — 1. Man sieht ohne weiteres, daß jede der Funktionen $f_\varepsilon(x)$ nichtmeßbar im Sinne L ist, da jede der Mengen P_ε nichtmeßbar ist. Andererseits sieht man ohne weiteres auch, daß die Menge der Funktionen $f_2(x), f_3(x) \dots f_n(x) \dots f_\omega(x) \dots f_\varepsilon(x), \dots$, die wir mit T bezeichnen, kompakt und abgeschlossen ist.

In der Tat, ist irgendeine unendliche abzählbare Menge T' von Funktionen, die in der Menge T enthalten ist, so ordnen wir sie zuerst nach dem wachsenden Index, es sei also

$$T' = \{f_\alpha(x), f_\beta(x), \dots f_\nu(x) \dots f_\lambda(x) \dots\}$$

wo $\alpha < \beta < \dots < \gamma < \dots < \lambda < \dots < \Omega_\nu$ ist. Aus der Menge der Indices $\alpha, \beta, \dots \gamma \dots \lambda \dots$ kann man eine Teilmenge von Indices herausgreifen, welche den Ordnungstypus ω besitzt. Es sei das die Folge $\alpha', \alpha'' \dots \alpha''' \dots \alpha^{(n)} \dots$; die Menge der Funktionen $f_{\alpha'}(x), f_{\alpha''}(x) \dots f_{\alpha^{(n)}}(x) \dots$ besitzt dann eine Grenze, und zwar ist das die Funktion $f_\xi(x)$ wo $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha^{(n)}$ ist, wie man ξ sehr leicht einsehen kann. Es ist also die Menge T kompakt und abgeschlossen.

¹⁾ d. i. es existiert eine abzählbare Menge von Funktionen, welche die Eigenschaft besitzt, daß ihre Teilmengen jede Funktion der vorgegebenen Menge T approximieren.

²⁾ C. Burstin: Die Spaltung des Kontinuums in c im Sinne L nichtmeßbare Mengen. Sitzber. der Kaiserl. Akad. in Wien, Bd. 125, 3. Heft, Abt. II a.

Wir wollen jetzt noch zeigen, daß für diese Funktionenmenge das Abzählbarkeitsprinzip nicht gilt. Die Behauptung folgt unmittelbar aus dem 2. Satz, indem man eine dem 4. Satze analoge Beweisführung auf die Funktionenmenge T anwendet. In der Tat sei $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ diese abzählbare Menge von Funktionen, dann wählen wir eine positive Größe $\varepsilon < \frac{1}{4}$ und greifen aus dieser abzählbaren Menge nur solche Funktionen heraus, für welche mindestens eine Funktion der Menge T existiert, die von irgendeiner Funktion $\varphi_1(x) \dots \varphi_n(x) \dots$ sich nur um Größe ε auf irgendeiner Menge vom Inhalt $\frac{1}{2} + \delta$ ($\delta > 0$) unterscheidet. Die so gebildete Funktionenmenge hat dieselbe Eigenschaft wie die Menge der Funktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots \varphi_n(x) \dots$. Bezeichnen wir diese Funktionen mit $\varphi_1^{(1)}(x), \varphi_2^{(1)}(x), \dots \varphi_n^{(1)}(x) \dots$, dann muß mindestens eine Funktion $\varphi_n^{(1)}(x)$ existieren von der Eigenschaft, daß sie mindestens zwei Funktionen $f_\alpha(x), f_\beta(x)$ der Menge T approximiert, und zwar so, daß

$$(I) |\varphi_n^{(1)}(x) - f_\alpha(x)| < \varepsilon \text{ und } (II) |\varphi_n^{(1)}(x) - f_\beta(x)| < \varepsilon$$

ist, auf zwei Mengen vom Inhalt $\frac{1}{2} + \delta$. Diese zwei Mengen haben eine Menge P gemeinsam, welche mindestens vom Inhalt δ ist, und für diese Mengen gelten beide Ungleichungen (I) und (II) zugleich. Aus (I) und (II) folgt dann für die Menge $\bar{P}: |f_\alpha(x) - f_\beta(x)| < 2\varepsilon < \frac{1}{2}$. Dies ist aber unmöglich, da auf der Menge $D(P_\beta - P_\alpha, P)$, $|f_\alpha(x) - f_\beta(x)| = 1$ ist (wobei $\beta > \alpha$ ist), wie man ohne weiteres aus der Konstruktion der Funktionen $f_\varepsilon(x)$ einsehen kann. Es ist also unsere Behauptung richtig.¹⁾

¹⁾ Ist $c > \aleph_1$, so können wir innerhalb der Funktionenmenge T eine Teilmenge von der Mächtigkeit $\aleph_1$ herausgreifen, und zwar es sei das der erste Abschnitt innerhalb der Funktionenmenge T , der die Mächtigkeit $\aleph_1$ besitzt. Wir bezeichnen diesen Abschnitt mit A . Man sieht ohne weiteres, daß die Funktionenmenge kompakt und abgeschlossen ist. Wir haben also 1. unter der Voraussetzung der Wohlordnung des Kontinuums und 2. unter der Voraussetzung, daß $c > \aleph_1$ ist, eine abgeschlossene Funktionenmenge A definiert, welche nicht abzählbar und von der Mächtigkeit $\aleph_1 < c$ ist und für diese Menge gilt das Abzählbarkeitsprinzip auch nicht, wie man ohne weiteres einsehen kann.