Formel gefunden und sie einer Reihe von Prüfungen unterworfen. Wenn die Resultate veröffentlicht seyn werden, wird man wissen, welche der drei Formeln, die von Fechner, die von Delboeuf oder die von mir, den Vorzug verdient.

XIV. *Notiz zu den Bessel'schen Pendelversuchen; von Dr. G. Lübeck.*

Assistent der Physik am Polytechnicum zu Carlsruhe.

Durch zahlreiche Versuche hat Bessel bekanntlich festgestellt, daß Körper verschiedenen Stoffes mit gleicher Kraft von der Erde angezogen werden¹⁾. Er bewies dies durch Pendelbeobachtungen, bei welchen ein Hohlcyylinder von Messing, in den die zu untersuchenden Körper eingeschlossen wurden, nach einander an zwei, um eine Toise verschieden langen Fäden als Pendelkörper aufgehängt war. Aus den beobachteten Schwingungszeiten berechnete er bei allen auf feste Körper bezüglichen Bestimmungen als Länge des einfachen Secundenpendels für Königsberg 440^L,8154, mit Abweichungen, welche den unvermeidlichen Beobachtungsfehlern allein zuzuschreiben sind.

Viel größere Abweichungen lieferten aber die drei Bestimmungen, bei welchen der Cylinder mit Wasser gefüllt war. Die an dem längeren Pendel beobachteten Schwingungszeiten des wassergefüllten Cylinders führten allerdings auch zu einem, mit dem angegebenen hinreichend übereinstimmenden Werthe der gesuchten Constanten; dagegen ergab sich aus den Versuchen am kürzeren Pendel eine um 0^L,0318 größere Länge.

Aus den Versuchen mit dem längeren Pendel folgte somit, daß das Wasser mit derselben Kraft, wie die festen

1) Math. Abhandlungen der Berliner Acad. vom Jahre 1830. „Versuche über die Kraft, mit welcher die Erde Körper von verschiedener Beschaffenheit anzieht.“

Körper von der Erde angezogen wird; am kürzeren Pendel aber wird die Schwingungsdauer durch eine zum Cylinder relative Bewegung in der Flüssigkeit merklich verringert. Letztere hat Bessel bei Berechnung seiner Beobachtungen nicht berücksichtigt.

Dies gab Anlaß zu einer Untersuchung über den Einfluß, welchen eine reibende Flüssigkeit, die in dem Hohlraum eines Pendels enthalten ist, auf seine Bewegung ausübt¹⁾, und zwar habe ich dabei, um die Integration der Differentialgleichungen ausführen zu können, den Hohlraum kugelförmig wählen müssen. Gleichwohl erhielt ich das mit den Bessel'schen Versuchen übereinstimmende Resultat, daß die Schwingungsdauer eines solchen Pendels kleiner ist, als wenn die Flüssigkeit im Hohlraume durch einen gleichmäßigen festen Körper ersetzt wäre. Ueberschreitet jedoch die Länge des Pendelfadens eine gewisse Grenze, so wird jener Unterschied unmerklich.

Auf Anregung des Hrn. Prof. O. E. Meyer versuchte ich eine Anwendung jener Rechnung auf die Bessel'schen Versuche, wobei ich annahm, daß die Flüssigkeitsmasse, welche außerhalb der in den Cylinder eingeschriebenen Kugel liegt (Durchmesser und Höhe desselben sind fast gleich), während der Pendelbewegung in zur Wandung relativer Ruhe bleibe²⁾. Der Kugelradius wurde mit Rücksicht auf die Mitteltemperatur des Cylinders in allen Versuchen mit Wasser ($18^{\circ},8$ C.) gleich $10^L,99$ angenommen, da seine innere Höhe $21^L,92441$, der innere Durchmesser $22^L,01438$ beträgt. Nach den Bestimmungen von O. E. Meyer ist die Quadratwurzel des Reibungsindex für Wasser von $18^{\circ},8$ C. : $\gamma = 0^L,44$ gesetzt worden.

Darnach ergibt die Berechnung der 3 mit Wasser als Cylinderfüllung ausgeführten Bestimmungen, der 11., 15. und 19. der ganzen Bessel'schen Reihe, wenn man mit

1) Borchardt's Journal für Mathematik, Bd. LXVII, 1. Heft

2) Das unter dieser Annahme der Bessel'schen Rechnung hinzuzufügende Correctionsglied ergibt sich aus Gleichung (85), der erwähnten Abhandlung in Borchardt's Journal, Bd. LXXVII, S. 35.

$440^L,8154 + \Delta$ die Länge des einfachen Sekundenpendels bezeichnet, als Werthe von Δ .

Bestimmung No.	mit dem	
	längeren	kürzeren
Pendel		
	L	L
A.	11	— 0,0052
	15	— 0,0025
	19	— 0,0036
		+ 0,0018
		+ 0,0202
		+ 0,0197

Vernachlässigt man die Reibung der Flüssigkeit, setzt also $\gamma = 0$, so erhält man für Δ

Best.	No.	Langes Pendel	Kurzes Pendel
		L	L
B.	11	— 0,0054	— 0,0035
	15	— 0,0027	+ 0,0186
	19	— 0,0039	+ 0,0181

Die entsprechenden Werthe von Δ , wie sie Bessel ohne einen Unterschied zwischen dem Verhalten der Flüssigkeit und dem eines gleichmaafsigen festen Körpers anzunehmen, berechnet hat, sind:

Best.	No.	Langes Pendel	Kurzes Pendel
		L	L
C.	11	— 0,0031	+ 0,0172
	15	— 0,0003	+ 0,0394
	19	— 0,0015	+ 0,0389

Ferner sind die größten und kleinsten Werthe von Δ , welche sich durch die Bestimmungen mit den festen Körpern ergeben und als aus den Beobachtungsfehlern resultirend betrachtet werden müssen, beim

langen	kurzen
Pendel	
L	L
+ 0,0064	+ 0,0087
und — 0,0068	und — 0,0103

Vergleicht man damit die unter A) und B) gegebenen Werthe von Δ , so erkennt man, daß zur Darstellung der richtigen Länge des einfachen Secundenpendels die angebrachten Correctionen nicht genügen. Zugleich wird aber auch, was wichtiger ist, ersichtlich, daß der Einfluß der inneren Reibung der Flüssigkeit im vorliegenden Falle weit innerhalb der Beobachtungsfehler liegt. Der Hauptgrund davon ist die Kleinheit des Verhältnisses von γ zum Kugelradius. In ähnlicher Weise, wie in einer capillaren Röhre das über das äußere Niveau gehobene oder unter dasselbe gedrückte Flüssigkeitsvolumen unmerklich wird, wenn das Verhältniß der Capillaritätsconstante zur Weite der Röhre unter eine gewisse Grenze sinkt, nimmt hier mit zunehmender Weite des Gefäßes, welches die Flüssigkeit enthält, der Einfluß ihrer Reibung bis zum Verschwinden ab. —

Damit der Fehler Δ bei der 15. und 19. Bestimmung mit dem kürzeren Pendel zwischen den oben angeführten statthaften Grenzen von $+0^L,0087$ und $-0^L,0103$ liege, müßte der in die Rechnung einzuführende Kugeldurchmesser wenigstens um $1^L,7$ größer seyn als derjenige der in den Cylinder einschiebbaren Kugel. Dies spricht gegen die Annahme, daß die Flüssigkeit außerhalb der dem Cylinder eingeschriebenen Kugel in zu ihm relativer Ruhe bleibe.

Deßhalb habe ich den specifischen Einfluß der Flüssigkeit auf die Pendelbewegung ohne Rücksicht auf die innere Reibung, wie folgt, aufgesucht.

In den Cylinder denke man sich ein rechtwinkliges Coordinatensystem gelegt, dessen Y -Axe senkrecht auf der Ebene der Pendelbewegung steht und dessen Anfangspunkt im Cylindermittelpunkte liegt. Bedeuten u , v , w die nach den 3 Axen geschätzten Geschwindigkeitscomponenten eines Flüssigkeitstheilchens, so gelten, wenn die Flüssigkeit als eine vollkommene (nicht reibende) angenommen wird, bekanntlich die Bedingungsgleichungen

$$\frac{d u}{d z} - \frac{d w}{d x} = 0$$

$$\frac{d u}{d y} - \frac{d v}{d x} = 0 \quad \frac{d w}{d y} - \frac{d v}{d z} = 0.$$

Die beiden letzten reduciren sich, wenn wir der unendlich kleinen Geschwindigkeit wegen, mit welcher der Cylinder sich parallel der X-Z-Ebene bewegt, $v = 0$ setzen, auf

$$\frac{d u}{d y} = 0 \quad \frac{d w}{d y} = 0.$$

Auf einer zur Y-Axe parallelen Geraden haben also alle Theilchen dieselbe Geschwindigkeit. Nun sei h die innere Höhe des Cylinders, $2a$ die Breite eines der X-Z-Ebene parallelen rechteckigen Querschnitts des Cylinders. Der diesem parallele, nach dem Mittelpunkt hin nächst benachbarte Querschnitt hat dieselbe Höhe h und die Breite $2a + 2\alpha$, wo α eine beliebig kleine Größe ist.

Da nun $v = 0$ und $\frac{d u}{d y} = \frac{d w}{d y} = 0$, so müßten in der unendlich dünnen Flüssigkeitsschicht des zweiten Querschnitts die beiden seitlichen Flüssigkeitsfäden von der Breite α sich in sich selbst bewegen, die Theilchen eines jeden dieser beiden Fäden können also zu einander keine relative Bewegung haben. Fällt nun die Z-Axe mit der des Cylinders zusammen, so ergiebt sich, daß dasselbe für die Theilchen einer der Y-Z-Ebene parallelen Schicht gilt, und weil außerdem $\frac{d u}{d x} = 0$, $d a \frac{d w}{d x} = 0$, so verändert während der Pendelschwingungen kein Theilchen der ganzen Wassermasse seine Lage in Bezug auf seine Nachbartheilchen. Die ganze Wassermasse theiligt sich also *gleichmäßig* an etwaigen Translationen und Rotationen.

Der Hohlcyylinder bewegt sich nun, sich selbst parallel bleibend, mit der Geschwindigkeit seines Mittelpunktes in Richtung der Pendelbahn, welche wir wegen der unendlich kleinen Amplitude der Schwingungen als geradlinig ansehen; *gleichzeitig* aber oscillirt er auch um die Y-Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit, gleich derjenigen, mit welcher das Pendel sich bewegt.

Diese beiden gleichzeitigen Cylinderbewegungen können die Flüssigkeitsmasse nur zu einer Translation mit einer allen Theilchen gemeinsamen Geschwindigkeit U in Richtung der X -Axe veranlassen, sowie zu einer Drehung um die Y -Axe mit einer Winkelgeschwindigkeit ψ , welche ebenfalls für alle Theilchen dieselbe ist. Wird nun ψ in der Richtung als positiv angenommen, in welcher man von der positiven X -Axe auf dem kürzesten Wege zur positiven Z -Axe gelangt, so ist

$$u = U - z\psi \quad w = x\psi.$$

Aus der Gleichung $\frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx} = 0$ aber folgt: $\psi = 0$.

Wäre demnach keine Translation des Cylinders, sondern nur die Oscillation um die Y -Axe vorhanden, so müßte die eingeschlossene Flüssigkeit in absoluter Ruhe bleiben. Dieses Resultat läßt sich mit der Nothwendigkeit, daß im letzterwähnten Falle die Flüssigkeit an der Wandung während der Cylinderdrehung aus ihrer Lage gedrängt und bewegt wird, dadurch vereinbaren, daß man annimmt, ψ sey eine Funktion, welche im Innern der Flüssigkeit den Werth Null hat und davon verschieden, der Cylinderdrehung entsprechende Werthe erst für die Coordinaten der Wandung erlangt. Demnach werden, wenn der Cylinder aus einer Lage in die während seiner Oscillation unmittelbar folgende übergeht, die Flüssigkeitstheilchen, deren Ort im Raume nunmehr von der Cylinderwand eingenommen wird, in den von ihr freigegebenen Raum gedrängt, ohne daß die übrige Flüssigkeitsmasse in Bewegung geräth.

Um jetzt die Differentialgleichung für die Bewegung des Pendelsystems aufzustellen, bezeichnen wir mit m die Flüssigkeitsmasse, mit M die übrige, feste Masse des Pendels, mit l und L die Entfernungen ihrer Schwerpunkte von der Schneide. Ferner sey φ der augenblickliche Ablenkungswinkel des Pendels aus der Gleichgewichtslage, t bedeute die Zeit, g die Beschleunigung der Schwere,

$M(k^2 + L^2)$ das Trägheitsmoment von M in Bezug auf die Schneide.

Mit Ausnahme einer unendlich kleinen, der Cylinderwand anliegenden Flüssigkeitsmenge hat in jedem Moment jedes Flüssigkeitstheilchen die Geschwindigkeit des geometrischen Cylindermittelpunktes $U = l \frac{d\varphi}{dt}$ in Richtung der geradlinigen Pendelbahn. Die Beschleunigungen, welche alle Theilchen in ihrer Bahn erfahren ($l \frac{d^2\varphi}{dt^2}$), sind demnach sämmtlich gleich und gleich gerichtet. Daher ist nach dem D'Alembert'schen Prinzip:

$M(k^2 + L^2) \frac{d^2\varphi}{dt^2} + m l^2 \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \cdot \varphi \cdot (M \cdot L + m \cdot l) = 0$,
woraus für T , die Schwingungsdauer des Pendels im luftleeren Raume, sich ergibt

$$\frac{T^2}{\pi^2} = \frac{M(k^2 + L^2) + m l^2}{g(ML + ml)}$$

Diese Formel unterscheidet sich von der von Bessel angewandten dadurch, daß in der Summe der Trägheitsmomente dasjenige der Flüssigkeit in Bezug auf die durch ihren Schwerpunkt zur Schneide gelegte Parallele fehlt.

Zu demselben Resultate würden wir übrigens, wenn auch auf anderem Wege, gelangen, wenn die Flüssigkeit in einem beliebigen anderen Hohlraume enthalten wäre.

Berechnen wir nach unserer Formel die Länge des einfachen Sekundenpendels durch die 11., 15. und 19. Bestimmung, ebenfalls mit Anwendung sämmtlicher von Bessel gebrauchten Correctionen, so erhalten wir für Δ :

Best. No.	Langes Pendel	Kurzes Pendel
	L	L
11	— 0,0080	— 0,0265
D.) 15	— 0,0053	— 0,0045
19	— 0,0064	— 0,0049

Die aus den beiden letzten Bestimmungen erhaltenen Werthe von Δ liegen innerhalb der statthaften Fehlergrenzen, dagegen werden letztere von den aus der 11. Bestimmung, besonders am kürzeren Pendel, berechneten

Werthen erheblich überschritten. Bessel selbst aber giebt die Resultate der 11. Bestimmung als unsicher an, weil bei dieser die Wasserfüllung des Cylinders nur 1564,61 Gran wog, während bei der 15. und 19. Bestimmung ihr Gewicht 1571,10 resp. 1571,54 Gran betrug.¹⁾

Abgesehen von einer Störung durch die eingeschlossenen Luftblasen, wird während der Versuche der 11. Bestimmung die Bewegung in der Flüssigkeit, welche den Hohlcyylinder nicht vollständig ausfüllte, voraussichtlich eine andere gewesen seyn, als während der Versuche der beiden letzten Bestimmungen.

Wir haben also ohne Berücksichtigung der inneren Flüssigkeitsreibung die richtige Länge des einfachen Secundenpendels auch durch die Bestimmungen mit dem wassergefüllten Cylinder gefunden.

Carlsruhe, November 1873.

XV. Ueber galvanische Polarisation in gas-freien Flüssigkeiten; von H. Helmholtz.

(Aus den Monatsberichten der Akademie.)

Ich will mir erlauben, der Akademie Mittheilung zu machen von den Ergebnissen einer Reihe von Versuchen, die ich über die galvanische Polarisation des Platins angestellt habe. Diese Versuche erforderten meist sehr lange Zeit, und ich bitte deshalb um Verzeihung, wenn ich eine Anzahl weiterer Fragen, die sich dabei aufdrängen, vorläufig unbeantwortet lassen muß.

Es ist bekannt, daß wenn ein Daniell'sches Zinkkupferelement durch eine Wasserzersetzungszone mit Platin-elektroden geschlossen wird, ein Strom entsteht von schnell abnehmender Stärke, der bei der gewöhnlichen Art den Versuch anzustellen, nach kurzer Zeit zwar sehr schwach wird, aber selbst nach sehr langer Zeit nicht ganz aufhört.

1) Bessel, a. a. O. pag. 98.