Sur le produit de deux fonctions cylindriques.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

§ 1.

Développement du produit $J^\mu(x) J^\nu(x)$. Formules de M. Lommel.

La fonction cylindrique de la première espèce $J^\mu(x)$ peut être définie par la série

$$J^\mu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2n}}{\Gamma(n+1) \Gamma(\mu+n+1)},$$

définition qui est valable dans toute l'étendue du plan, pourvu que l'on ait défini x^μ d'une manière convenable. Nous supposons généralement que l'argument x et l'indice μ soient tous deux complexes.

Multiplions maintenant les deux séries obtenues pour $J^\mu(x)$ et $J^\nu(x)$, nous aurons en appliquant la règle de Cauchy

$$J^\mu(x) J^\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n A_n \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n},$$

où le coefficient A_n , après une réduction légère, peut s'écrire

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(\nu+n+1)} \cdot \sum_{p=0}^{p=\infty} \binom{\mu+n}{p} \binom{\nu+n}{n-p} \\ &= \frac{\binom{\mu+\nu+2n}{n}}{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(\nu+n+1)}, \end{aligned}$$

d'où finalement

$$(1) \quad J^\mu(x) J^\nu(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \binom{\mu+\nu+2n}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n}}{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(\nu+n+1)}.$$

De cette formule bien connue on peut en déduire une foule d'autres

sur les fonctions cylindriques, formules dont quelques-unes sont connues auparavant. Mais les démonstrations données pour ces formules sont peu directes et assez compliquées. Par notre procédé les formules en question se déduisent immédiatement de (1) qui est leur origine naturelle.

Supposons en effet que p soit un positif entier, nous aurons en vertu de (1)

$$(\alpha) \quad J^{-\mu}(x) J^{\mu-p}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n-p}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}}{\Gamma(n+1-\mu) \Gamma(n+1-p+\mu)},$$

$$(\beta) \quad J^{-\mu+p}(x) J^{\mu}(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n \binom{2n+p}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}}{\Gamma(n+1+p-\mu) \Gamma(\mu+n+1)}.$$

Divisons maintenant en deux parties la somme qui figure au second membre de (α) , la première de $n=0$ à $n=p-1$, la dernière de $n=p$ à $n=\infty$.

Nous voyons sans peine que cette dernière partie est égale à

$$(-1)^p J^{-\mu+p}(x) J^{\mu}(x).$$

Cela posé, appliquons la formule

$$\Gamma(m+1-\mu) \Gamma(m+1+\mu-p) = \frac{(-1)^m (\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-m)}{(\mu-1)(\mu-2)\dots(\mu-p+m+1)} \frac{\pi}{\sin \mu \pi}.$$

ce qui donne, après une réduction facile

$$(2) \quad J^{-\mu}(x) J^{\mu-p}(x) + (-1)^{p-1} J^{-\mu+p}(x) J^{\mu}(x) \\ = \frac{\sin \mu \pi}{\pi} \sum_{n=0}^{E\left(\frac{p-1}{2}\right)} (-1)^n \frac{(p-n-1)!}{n!} \binom{\mu-n-1}{p-2n-1} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2n},$$

où $E\left(\frac{p-1}{2}\right)$ désigne le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{p-1}{2}$.

De cette formule (2) on peut déduire immédiatement les formules démontrées par M. Lommel*).

Supposons par exemple $p=1$, nous aurons la formule fondamentale du même auteur**).

$$(3) \quad J^{-\mu}(x) J^{\mu-1}(x) + J^{-\mu+1}(x) J^{\mu}(x) = \frac{2 \sin \mu \pi}{\pi x},$$

démontrée d'une autre manière par M. N. Sonine***).

*) Mathematische Annalen, tome 4, p. 109—110.

**) Ibid. tome 4, p. 105.

***) Ibid. tome 16, p. 33.

Posons encore $p = 2m + 1$, $\mu = \frac{2m+1}{2}$, nous aurons en outre

$$(4) \quad \left(J^{-\frac{2n+1}{2}}(x)\right)^2 + \left(J^{\frac{2n+1}{2}}(x)\right)^2 \\ = (-1)^n \sum_{m=0}^{m=n} (-1)^m \frac{(2n-m)!}{m!} \binom{\frac{2n-2m-1}{2}}{2n-2m} \left(\frac{2}{x}\right)^{2n-2m+1},$$

formule qui est également due à M. Lommel*).

Pour la fonction cylindrique de la seconde espèce $Y^\mu(x)$ prenons la définition de Schläfli**)

$$(y) \quad Y^\mu(x) = \frac{\pi}{\sin \mu \pi} (\cos \mu \pi J^\mu(x) - J^{-\mu}(x)),$$

expression qui, au facteur $1 + i \operatorname{tg} \mu \pi$ près, est identique à celle de Hermann Hankel***).

De cette définition (y) qui est valable pour toutes les valeurs de μ , on tire immédiatement, en vertu de (2) la formule

$$(5) \quad Y^{\mu-p}(x) J^\mu(x) - J^{\mu-p}(x) Y^\mu(x) \\ = \sum_{n=0}^{E\left(\frac{p-1}{2}\right)} (-1)^n \frac{(p-n-1)!}{n!} \binom{\mu-n-1}{p-2n-1} \left(\frac{2}{x}\right)^{p-2n},$$

qui pour μ positif entier est trouvée par M. Lommel†).

Posons $p = 1$, nous aurons

$$(6) \quad Y^{\mu-1}(x) J^\mu(x) - J^{\mu-1}(x) Y^\mu(x) = \frac{2}{x},$$

formule qui est due également à M. Lommel††), mais trouvé indépendamment par Hermann Hankel†††). Plus tard M. Sonine *†) a donné une autre démonstration de (6).

§ 2.

Développement d'une série de puissances positives.

Supposons que μ ne soit pas égal à un nombre entier négatif et désignons par ω le plus petit des modules

$$|\mu + n|, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

*) Mathematische Annalen, tome 2, p. 631.

**) Annali di Matematica, Serie II^a, tomo 6, p. 17.

***) Mathematische Annalen, tome 1, p. 472.

†) Ibid., tome 4, p. 111.

††) Ibid., tome 4, p. 108.

†††) Ibid., tome 8, p. 458.

*†) Ibid., tome 16, p. 33.

nous aurons en vertu de la définition même de $J^\mu(x)$:

$$(7) \quad |J^\mu(x)| < \left| \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\mu}{\Gamma(\mu+1)} \right| \cdot e^{\left|\frac{x^2}{4\omega}\right|}.$$

Cela posé, désignons par m et m' deux nombres positifs entiers quelconques et $m' > m$, nous aurons

$$(a) \quad \sum_{p=m}^{p=m'} |a_p J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x)| < e^{\left|\frac{x^2}{4\mu+4m+4}\right| + \left|\frac{x^2}{4\nu+4m+4}\right|} \\ \cdot \sum_{p=m}^{p=m'} \frac{\left| a_p \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p} \right|}{|\Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1)|},$$

pourvu que m soit supposé si grand que $R(\mu+m) \geq 0^*$, $R(\nu+m) \geq 0$. Le coefficients a_p sont des constantes quelconques.

De l'inégalité (a) on tire sans peine la proposition suivante:

Si la série

$$(\beta) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{a_p \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1)}$$

est supposée absolument convergente, la série plus compliquée

$$(\gamma) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x)$$

sera nécessairement absolument convergente.

Introduisons maintenant dans (γ) la série infinie obtenue pour $J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x)$, nous aurons une série à double entrée Δ . Or, si la série (β) est absolument convergente on peut ranger d'une manière quelconque les termes de Δ^{**} . En ordonnant ces termes selon les puissances de $\frac{x}{2}$ on aura une équation de la forme

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu} \sum_{p=0}^{p=\infty} b_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p},$$

où

$$(9) \quad b_p = \frac{(-1)^p}{\Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1)} \sum_{s=0}^{s=p} (-1)^s \binom{\mu+\nu+2p}{p-s} a_s.$$

*) $R(x)$ désigne la partie réelle de x .

**) Voir sur ce sujet un mémoire de M. Alfred Pringsheim inséré aux Sitzungsberichte der kgl. bayrischen Akademie d. Wissenschaften pour l'année 1897.

La série qui figure au second membre de (8) a encore les mêmes courbes de convergence que la série (β).

Posons par exemple $a_s = 1$, nous aurons en appliquant une formule bien connue sur les coefficients du binôme

$$\sum_{n=0}^{x=\infty} J^{\mu+n}(x) J^{\nu+n}(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \binom{\mu+\nu+2p-1}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1)},$$

ou bien

$$(10) \quad \int x^{\mu-\nu} J^{\mu-1}(x) J^{\nu}(x) dx = x^{\mu-\nu} \sum_{n=0}^{n=\infty} J^{\mu+n}(x) J^{\nu+n}(x).$$

Posons encore $a_s = (-1)^s \binom{\varrho}{s}$, d'où

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\varrho}{n} J^{\mu+n}(x) J^{\nu+n}(x) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \binom{\mu+\nu+\varrho+2p}{p} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2p}}{\Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1)};$$

en mettant $\varrho = \frac{1}{2}$, $\nu = \mu - \frac{1}{2}$, nous aurons en appliquant la formule de multiplication de $\Gamma(2x)$:

$$(11) \quad J^{2\mu}(2x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} \cdot \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n} J^{\mu+n}(x) J^{\mu+n-\frac{1}{2}}(x).$$

En supposant que ni μ ni ν soit égal à un négatif entier, on voit que l'équation (9) et ses analogues pour les valeurs plus petites de l'indice p suffisent à déterminer les coefficients a_s à l'aide des coefficients b_p . On aura en effet une expression de la forme

$$(\delta) \quad a_p = \alpha_0^p b_p + \alpha_1^p b_{p-1} + \dots + \alpha_p^p b_0,$$

En portant (δ) dans (9) on aura

$$\alpha_0^p = \Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1),$$

$$\alpha_1^p = \frac{\mu+\nu+2p}{1!} \Gamma(\mu+p) \Gamma(\nu+p),$$

$$\alpha_2^p = \frac{(\mu+\nu+2p)(\mu+\nu+2p-3)}{2!} \Gamma(\mu+p-1) \Gamma(\nu+p-1).$$

. . . . .

De cette manière on aura, en appliquant par exemple la conclusion habituelle de s à $s+1$, l'expression générale

$$(\varepsilon) \quad \alpha_s^p = \frac{\mu+\nu+2p}{s!} (\mu+\nu+2p-s-1) (\mu+\nu+2p-s-2) \dots$$

$$\dots (\mu+\nu+2p-2s+1) \Gamma(\mu+p-s+1) \Gamma(\nu+p-s+1),$$

ou bien

$$(ξ) \quad \alpha_s^p = \frac{(\mu + \nu + 2p)(\mu + \nu + 2p - 2s + 1)}{2!} B(\mu + p - s + 1, \nu + p - s + 1) \\ \times \Gamma(\mu + \nu + 2p - s),$$

formule qui est aussi valable pour $s = 0$, $s = 1$. Ainsi nous aurons finalement

$$(12) \quad a_p = (\mu + \nu + 2p) \sum_{m=0}^{m=p} \frac{\mu + \nu + 2m + 1}{(p-m)!} B(\mu + m + 1, \nu + m + 1) \\ \times \Gamma(\mu + \nu + p + m) b_m.$$

Mais, si la série qui figure au second membre de (8) est supposée convergente en sera-t-il de même pour la série (β) ?

Pour répondre à cette question, écrivons l'expression trouvée pour a_p sous la forme développée

$$(13) \quad \frac{a_p}{\Gamma(\mu + p + 1) \Gamma(\nu + p + 1)} = b_p + \frac{\mu + \nu + 2p}{(\mu + p)(\nu + p)} b_{p-1} \\ + \sum_{m=2}^{m=p} \frac{b_{p-m}}{m!} \frac{(\mu + \nu + 2p)(\mu + \nu + 2p - m - 1) \dots (\mu + \nu + 2p - 2m + 1)}{(\mu + p)(\mu + p - 1) \dots (\mu + p - m + 1)(\nu + p)(\nu + p - 1) \dots (\nu + p - m + 1)}.$$

Posons ensuite $|\mu + \nu| = \beta$, tandis que α désigne le plus grand des modules $|\mu|$, $|\nu|$. De cette manière on obtiendra pour le terme générale A_m sous le signe de sommation

$$|A_m| < \frac{(2p + \beta)(2p - m - 1 + \beta)(2p - m - 2 + \beta) \dots (2p - 2m + 1 + \beta)}{m! (p - \alpha)^2 (p - 1 - \alpha)^2 \dots (p - m + q - \alpha)^2 B} |b_{p-m}|,$$

où q désigne le plus petit positif entier qui donne

$$2q - 2\alpha \geq 1 + \beta,$$

et généralement

$$2p - 2m + 2q - 2\alpha \geq 2p - 2m + 1 + \beta;$$

ainsi B reste toujours fini et différent de zéro. Cela posé, on aura

$$|A_m| < \frac{(2p + \beta)(2p - m + 1 + \beta)^{q-2} 2^{m-q+1}}{m! B (p - \alpha)(p - 1 - \alpha) \dots (p - m + q - \alpha)} |b_{p-m}|,$$

ce qui montre qu'il est possible de déterminer un nombre fini R_p de sorte que

$$(η) \quad \left| \frac{\alpha_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}}{\Gamma(\mu + p + 1) \Gamma(\nu + p + 1)} \right| < \left| b_p \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \right| \\ + \frac{(2p + \beta) \left|\frac{x^2}{4}\right|}{(p - \alpha)(p - 1 - \alpha)} \left| b_{p-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p-2} \right| + \frac{R_p}{(p - \alpha)(p - 1 - \alpha)} S_1^p,$$

où l'on a posé

$$S_q^p = \sum_{n=q}^{n=p} \left| b_n \left(\frac{x}{2} \right)^{2n} \right|.$$

Or, l'inégalité (η) nous donne sans peine

$$\begin{aligned} \sum_{p=n}^{p=n'} \left| \frac{a_p \left(\frac{x}{2} \right)^{2p}}{\Gamma(\mu+p+1) \Gamma(\nu+p+1)} \right| &< S_n^{n'} + \frac{\beta+2n}{(n-\alpha)(n-1-\alpha)} S_{n-1}^{n'-1} \\ &+ S_1^{n'} \sum_{p=n}^{p=n'} \frac{R_p}{(p-\alpha)(p-\alpha-1)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que la série auxiliaire (β) a le même cercle de convergence que $\sum b_r \left(\frac{x}{2} \right)^{2r}$. Ainsi nous avons démontré le théorème suivant:

Une série de puissances $\sum b_r x^{2r}$ qui est une fonction paire de x , peut être développée en série de la forme

$$(14) \quad \sum_{r=0}^{r=\infty} b_r x^{2r} = \left(\frac{x}{2} \right)^{-\mu-\nu} \sum_{s=0}^{s=\infty} a_s J^{\mu+s}(x) J^{\nu+s}(x),$$

où μ et ν désignent deux constantes quelconques, les négatifs entiers exclus. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances et les coefficients a_p sont déterminés par la formule

$$(15) \quad a_p = (\mu + \nu + 2p) \sum_{m=0}^{m=p} \frac{\mu + \nu + 2m + 1}{(p-m)!} B(\mu + m + 1, \nu + m + 1) \\ \times \Gamma(\mu + \nu + p + m) 2^{2m} b_m.$$

Supposons par exemple $b_n = 1$, tandis que tous les autres coefficients b s'évanouissent, nous aurons

$$(16) \quad \frac{\left(\frac{x}{2} \right)^{\mu+\nu+2n}}{\Gamma(\mu+n+1) \Gamma(\nu+n+1)} \\ = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\mu + \nu + 2n + 2p}{\mu + \nu + n + p} \binom{\mu + \nu + 2n + p}{p} J^{\mu+n+p}(x) J^{\nu+n+p}(x),$$

formule qui nous sera bien utile plus bas.

§ 3.

Sur certains cas particuliers. Théorèmes de M. Ch. Neumann.

Il est évident que l'on peut déduire de notre formule générale (14) une foule d'autres plus particulières. Ce paragraphe est destiné à traiter les plus intéressants entre ces cas particuliers.

1° Posons à cet égard $\nu = -\mu$, nous aurons en vertu de (15)

$$(17a) \quad a_0 = \frac{\pi\mu}{\sin \mu\pi} b_0,$$

$$(17b) \quad a_p = \frac{2p\mu\pi}{\sin \mu\pi} \left(\frac{b_0}{p} + \sum_{n=1}^{n=p} \frac{\binom{p+n}{p-n}}{p+n} (1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\dots(n^2-\mu^2)2^{2n}b_n \right),$$

et nous avons le théorème suivant:

Une série de puissance $\sum b_n x^{2n}$ qui est une fonction paire de x , peut être développée en série de la forme $\sum a_n J^{n+\mu}(x) J^{n-\mu}(x)$, où μ est une constante quelconque. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances, et les coefficients a_n sont déterminés à l'aide de (17).

Posons $\mu = 0$, notre théorème donnera celui de M. Ch. Neumann*) sur les développement selon les carrés des fonctions cylindriques, tandis que $\mu = \frac{1}{2}$ donnera d'autres développements intéressants.

De (16) on tire dans notre cas particulier:

$$(18) \quad x^{2n} = \frac{2^{2n}\pi\mu(1^2-\mu^2)(2^2-\mu^2)\dots(n^2-\mu^2)}{\sin \mu\pi} \sum_{p=n}^{p=\infty} \frac{2p}{p+n} \binom{p+n}{p-n} \\ \times J^{p+\mu}(x) J^{p-\mu}(x), \quad n > 0;$$

pour $n = 0$ on aura au contraire

$$(19) \quad 1 = \frac{\pi\mu}{\sin \pi\mu} \left(J^{\mu}(x) J^{-\mu}(x) + 2 \sum_{p=0}^{p=\infty} J^{p+\mu}(x) J^{p-\mu}(x) \right).$$

Prenons encore la fonction

$$\Pi^{\mu}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \sin v) \cos \mu v dv,$$

de sorte que $\Pi^n(x)$ devient identique à $J^n(x)$, si n est un nombre pair.

*) Berichte über die Verh. der kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissensch. 1869, P. 221—257; Mathematische Annalen, tome 3.

Ainsi $\Pi^\mu(x)$ est une intégrale de Bessel comme l'a appelée M. Lommel*). Pour la fonction $\Pi^\mu(x)$ Anger**) a donné le développement

$$\Pi^\mu(x) = \frac{\sin \mu \pi}{\mu \pi} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2^2 - \mu^2)(4^2 - \mu^2) \dots (4n^2 - \mu^2)} \right).$$

Mettons maintenant 2μ au lieu de μ , nous aurons en vertu de (17)

$$a_p = 2 \cos \mu \pi \sum_{n=0}^{n=p} (-1)^n \frac{p}{p+n} \binom{p+n}{2n} = 2C_p \cdot \cos \mu \pi.$$

Or, on démontrera sans peine la formule

$$C_{p+1} = C_p - C_{p-1},$$

ce qui donne

$$C_p = (-1)^m, \quad p = 3m; \quad C_p = \frac{(-1)^m}{2}, \quad p = 3m \pm 1,$$

et nous aurons le développement

$$(20) \quad \Pi^{2\mu}(x) = \cos \mu \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(2J^{3n+\mu}(x) J^{3n-\mu}(x) \right. \\ \left. + J^{3n+1+\mu}(x) J^{3n+1-\mu}(x) - J^{3n+2+\mu}(x) J^{3n+2-\mu}(x) \right).$$

Pour $\mu = 0$, (19) donnera une formule due à P.-A. Hansen***), et (20) le développement de $J^0(x)$.

Posons $\mu = \frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (17), les formules

$$(21) \quad \cos 2x = \pi \left(J^{\frac{1}{2}}(x) J^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 2n J^{n+\frac{1}{2}}(x) J^{n-\frac{1}{2}}(x) \right),$$

$$(22) \quad \frac{2x + \sin 2x}{2x} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} J^{n+\frac{1}{2}}(x) J^{n-\frac{1}{2}}(x),$$

$$(23) \quad \frac{S_i(2x)}{2x} = \pi \left(J^{\frac{1}{2}}(x) J^{-\frac{1}{2}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n^2 - 1} J^{n+\frac{1}{2}}(x) J^{n-\frac{1}{2}}(x) \right),$$

où $S_i(x)$ désigne le sinus-intégral.

*) Mathematische Annalen, tome 16, p. 185.

**) Voir M. C. Wagner dans les Berner Mittheilungen, 1894, p. 245.

***) Voir M. Lommel: Studien über die Bessel'schen Functionen, p. 33.

2^o Posons encore $\nu = 1 - \mu$, nous aurons

$$(24a) \quad a_0 = \frac{\pi \mu (1 - \mu) b_0}{\sin \mu \pi},$$

$$(24b) \quad a_p = \frac{(2p+1)\pi\mu}{\sin \mu \pi} \left(\frac{1-\mu}{1} \cdot 2b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\binom{p+n}{p-n}}{2n+1} (1^2 - \mu^2)(2^2 - \mu^2) \dots \right. \\ \left. \dots (n^2 - \mu^2)(n+1-\mu) 2^{2n+1} b_n \right).$$

On aura dans ce cas le théorème suivant:

Une série de puissances $\sum b_r x^{2r+1}$ qui est une fonction impaire de x , peut être développée en série de la forme $\sum a_n J^{n+\mu}(x) J^{n+1-\mu}(x)$, où μ est une constante quelconque. Ce développement est valable à l'intérieur du cercle de convergence de la série de puissances, et les coefficients a_n sont déterminés à l'aide de (24).

Posons $\mu = 0$, nous aurons un autre théorème de M. Ch. Neumann. Pour $\mu = \frac{1}{2}$, notre théorème donnera le développement d'une fonction impaire selon les carrés de $J^{n+\frac{1}{2}}(x)$. Ainsi nous venons de donner la démonstration nécessaire du postulat de M. Lommel*).

De (16) on tire dans notre cas particulier

$$(25) \quad x^{2n+1} = \frac{2^{2n+1} \pi \mu (1^2 - \mu^2)(2^2 - \mu^2) \dots (n^2 - \mu^2)(n+1-\mu)}{\sin \mu \pi} \\ \cdot \sum_{p=n}^{\infty} \frac{2p+1}{2n+1} \binom{p+n}{2n} J^{p+\mu}(x) J^{p+1-\mu}(x).$$

Pour l'autre intégrale de Bessel

$$\chi^\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin v) \sin \mu v dv$$

Anger a donné le développement

$$\chi^{1-2\mu}(x) = \frac{\sin 2\mu\pi}{2\mu\pi} \left(\frac{\frac{x}{2}}{1-\mu} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+1}}{(1^2 - \mu^2)(2^2 - \mu^2) \dots (n^2 - \mu^2)(n+1-\mu)} \right),$$

ce qui donne

$$(26) \quad \chi^{1-2\mu}(x) = \cos \mu \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (J^{3n+\mu}(x) J^{3n+1-\mu}(x) \\ + 2 J^{3n+1+\mu}(x) J^{3n+2-\mu}(x) + J^{3n+2+\mu}(x) J^{3n+3-\mu}(x)).$$

*) Mathematische Annalen, tome 2, p. 633.

Pour $\mu = 0$, (26) donnera le développement de $J^1(x)$.

Posons $\mu = \frac{1}{2}$, nous aurons, en vertu de (24), les formules que voici

$$(27) \quad \sin 2x = \pi \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1) \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x) \right)^2,$$

$$(28) \quad S_i(2x) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x) \right)^2,$$

dont la première est donnée par M. Lommel*).

§ 4.

Développement d'une série de puissances négatives.

Au paragraphe 2 nous avons donné le développement de $\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2n}$. Posons maintenant dans cette formule $n = 0$, nous aurons

$$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu+1)\Gamma(\nu+1)} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\mu+\nu+2p}{\mu+\nu} \binom{\mu+\nu+p-1}{p} J^{\mu+p}(x) J^{\nu+p}(x).$$

Cela posé, mettons $\mu - n$ au lieu de μ et $-\mu - n$ au lieu de ν , n étant un positif entier, nous aurons après une réduction légère

$$(29) \quad \frac{1}{x^{2n}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin \mu \pi}\right)^2 2^{-2n}}{\Gamma(n+\mu)\Gamma(n-\mu)} \sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \frac{2n-2p}{2n} \binom{2n}{p} \\ \times \left(J^{\mu+n-p}(x) J^{-\mu+n-p}(x) - J^{\mu-n+p}(x) J^{-\mu-n+p}(x) \right).$$

On aura de la même manière

$$(30) \quad \frac{1}{x^{2n+1}} = \frac{\left(\frac{\pi}{\sin \mu \pi}\right)^2 2^{-2n-1}}{\Gamma(\mu+n)\Gamma(-\mu+n+1)} \sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \frac{2n-2p+1}{2n+1} \binom{2n+1}{p} \\ \times \left(J^{\mu+n-p}(x) J^{-\mu+n-p+1}(x) + J^{\mu-n+p-1}(x) J^{-\mu-n+p}(x) \right).$$

Ainsi nous avons donné le développement des puissances négatives de x . On voit que ces développements sont finis, tandis que les séries analogues obtenues pour les puissances positives sont infinies.

On peut regarder les formules (29), (30) comme une généralisation de la formule (4) de M. Lommel.

*) Mathematische Annalen, tome 2, p. 633.

En appliquant les expressions (29) ou (30) on aura pour les séries $\sum b_n x^{-2n}$ ou $\sum b_n x^{-2n-1}$ deux développements qui sont tous deux valables dans les domaines où les séries mêmes sont convergentes. En prenant pour point de départ l'inégalité (7) au paragraphe 2 on démontrera sans peine la vérité de notre assertion, de sorte que cette démonstration peut être supprimée.

De cette manière on aura le développement

$$(31) \quad \begin{cases} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{b_n}{x^{2n}} = \left(\frac{\pi}{\sin \mu \pi} \right)^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \left(J^{n+\mu}(x) J^{n-\mu}(x) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. - J^{-n+\mu}(x) J^{-n-\mu}(x) \right), \\ A_n = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{2n}{2n+2p} \binom{2n+2p}{p} \frac{b_{n+p} \cdot 2^{-2n-2p}}{\Gamma(\mu+n+p) \Gamma(-\mu+n+p)}. \end{cases}$$

On aura en outre les formules analogues

$$(32) \quad \begin{cases} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{b_n}{x^{2n+1}} = \left(\frac{\pi}{\sin \mu \pi} \right)^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} B_n \left(J^{\mu+n}(x) J^{-\mu+n+1}(x) \right. \\ \qquad \qquad \qquad \left. + J^{-\mu-n}(x) J^{\mu-n-1}(x) \right), \\ B_n = \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p \frac{2n+1}{2n+2p+1} \binom{2n+2p+1}{p} \frac{b_{n+p} \cdot 2^{-2n-2p-1}}{\Gamma(\mu+n+p) \Gamma(-\mu+n+p+1)}. \end{cases}$$

Dans ces développements μ est une constante quelconque *qui ne doit pas être égale à un nombre entier*.

Posons par exemple $\mu = \frac{1}{2}$, $b_s = \frac{\alpha^{2s+1}}{2s+1}$, (32) peut s'écrire

$$B_n = \frac{2n+1}{4} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{(-1)^p \binom{2n+2p+1}{p} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^{2n+2p+1}}{\Gamma\left(n+p+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(n+p+\frac{3}{2}\right)} = \frac{2n+1}{4} \left(J^{n+\frac{1}{2}}(x) \right)^2,$$

et nous aurons finalement

$$(33) \quad \log \frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \pi^2 \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{2n+1}{4} \left(J^{n+\frac{1}{2}}(\alpha) \right)^2 \left(\left(J^{n+\frac{1}{2}}(x) \right)^2 + \left(J^{-n-\frac{1}{2}}(x) \right)^2 \right),$$

pourvu que $|x| > |\alpha|$.

§ 5.

Sur le produit $J^{\mu+p}(x) J^{\nu-p}(x)$. Séries de Schläfli.

Au paragraphe 1 nous avons démontré la formule générale

$$J^{\mu}(x) J^{\nu}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu+\nu+2m}{m} \left(\frac{x}{2} \right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1) \Gamma(\nu+m+1)}.$$

Supposons maintenant que p soit un positif entier, nous aurons en appliquant la formule fondamentale de $\Gamma(\mu)$

$$(34) \quad J^{\mu+p}(x) J^{\nu-p}(x) \\ = \sum_{m=0}^{m=\infty} (-1)^m \binom{\mu + \nu + 2m}{m} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)} \\ \cdot \frac{(\nu+m)(\nu+m-1)\dots(\nu+m-p+1)}{(\mu+m+1)(\mu+m+2)\dots(\mu+m+p)}.$$

Cela posé, désignons par $a_0, a_1, a_2, \dots$ des constantes quelconques, et supposons que la série

$$F(\mu, \nu) = a_0 + \sum_{s=1}^{s=\infty} a_s \frac{\nu(\nu-1)\dots(\nu-s+1)}{(\mu+1)(\mu+2)\dots(\mu+s)}$$

soit absolument convergente, pourvu que $R(\mu + \nu)$ soit plus grand que Ω , il viendra la formule

$$(35) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} a_p J^{\mu+p}(x) J^{\nu-p}(x) \\ = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu + \nu + 2m}{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)} F(\mu+m, \nu+m),$$

qui est vraie si $R(\mu + \nu) > \Omega$. La série qui figure au second membre, est absolument convergente à la même condition.

Prenons par exemple $a_s = (-1)^s$, et une formule bien connue qui est due à Stirling nous donne

$$F(\mu, \nu) = \frac{\mu}{\mu + \nu}, \quad R(\mu + \nu) > 0,$$

d'où

$$(36) \quad \sum_{p=0}^{p=\infty} (-1)^p J^{\mu+p}(x) J^{\nu-p}(x) \\ = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu + \nu + 2m}{m} \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+\nu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1)\Gamma(\nu+m+1)} \cdot \frac{\mu+m}{\mu+\nu+2m},$$

formule qui pour $\mu = \nu$ peut s'écrire

$$(37) \quad \frac{1}{2} (J^\mu(x))^2 = \sum_{p=1}^{p=\infty} (-1)^{p-1} J^{\mu+p}(x) J^{\mu-p}(x), \quad R(\mu) > 0.$$

La formule fondamentale nous donne en outre

$$(\alpha) \quad J^{\mu+p}(x) J^{-p}(x) = \sum_{m=p}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu+2m}{m-p}}{\Gamma(\mu+m+1) \Gamma(m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2m},$$

$$(\beta) \quad J^{\mu-p}(x) J^p(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \binom{\mu+2m}{m}}{\Gamma(\mu+m+1) \Gamma(m+1)} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2m}.$$

En supposant ensuite $|a| < 1$, nous aurons en vertu de (α) , (β)

$$\sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a^{-2p-\mu} J^{\mu+p}(x) J^{-p}(x) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\mu+2m} a^{-\mu-2m} (1+a^2)^{\mu+2m}}{\Gamma(\mu+m+1) \Gamma(m+1)}.$$

Or, le second membre de cette équation n'est autre chose que $J^{\mu}\left(ax + \frac{x}{a}\right)$, donc nous aurons la formule

$$(38) \quad J^{\mu}\left(ax + \frac{x}{a}\right) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} a^{-2p-\mu} J^{\mu+p}(x) J^{-p}(x), \quad |a| < 1.$$

Posons maintenant $xa = \alpha$, $\frac{x}{a} = \beta$, ce qui donne $x = \sqrt{\alpha\beta}$, $a = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$, et il viendra, en vertu de (38), la formule d'addition

$$(39) \quad J^{\mu}(\alpha + \beta) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-p-\frac{\mu}{2}} J^{\mu+p}(\sqrt{\alpha\beta}) J^{-p}(\sqrt{\alpha\beta}), \quad |\alpha| < |\beta|,$$

formule qui n'est pas identique à celles de Bessel*), de Schläfli**), et de M. Gegenbauer***).

Si μ est supposé égal au nombre positif entier n , la condition $|a| < 1$ peut être supprimée, de sorte que dans ce cas (38) deviendra valable pour toutes les valeurs finies de a . En mettant $e^{i\theta}$ au lieu de a on tire de (38) les séries de Schläfli†)

$$(40) \quad \begin{cases} J^{2r}(2x \cos \theta) = (J^r(x))^2 + 2 \sum_{m=1}^{m=\infty} J^{r+m}(x) J^{r-m}(x) \cos 2m\theta, \\ J^{2r+1}(2x \cos \theta) = 2 \sum_{m=0}^{m=\infty} J^{r+m+1}(x) J^{r-m}(x) \cos (2m+1)\theta. \end{cases}$$

*) Voir M. C. Wagner dans les Berner Mittheilungen, 1894, p. 220.

**) Mathematische Annalen, tome 3, p. 137.

***) Sitzungsberichte der Wiener Academie, Bd. 70, math. naturw. Classe II, p. 14.

†) Mathematische Annalen, tome 3, p. 139.

Posons dans (38) $\frac{e^{i\Theta}}{i}$ au lieu de a ou, dans (40) $\frac{\pi}{2} - \Theta$ au lieu de Θ , nous aurons les développements analogues des fonctions $J^{2r}(2x \sin \Theta)$, $J^{2r+1}(2x \sin \Theta)$.

Ensuite en intégrant (40) de 0 à π , nous aurons

$$(41) \quad \int_0^\pi J^{2r}(2x \cos \Theta) d\Theta = \pi (J^r(x))^2,$$

formule que M. Ch. Neumann a prise comme point de départ dans ses recherches sur les développements selon les carrés des fonctions $J^n(x)$. On aura de la même manière les formules intégrales trouvées par Schläfli.

Örslev, le 30 juillet 1898.