3. *Ein Sender elektrischer Wellen im Innern einer metallischen Hülle*¹⁾; von J. B. Collo.

(Mitgeteilt von R. Gans.)

Da Hr. Loyarte am hiesigen Institut die Dämpfung kurzer Wellen studierte, die von einem im Inneren eines Metallkastens angebrachten Sender ausgehen und durch eine kleine Öffnung ins Freie treten, schlug mir Hr. Prof. Gans vor, das Problem theoretisch zu behandeln.

Wegen seiner Kompliziertheit blieb nichts anderes übrig, als den praktischen Fall wesentlich zu idealisieren, jedoch darf man wohl einige Resultate bedenkenlos verallgemeinern. Die Idealisierung besteht in folgendem.

Der „Sender“ sei ein Planckscher Oszillator der Eigenschwingungszahl ν_0 und des kleinen logarithmischen Dekrements σ . Er befinde sich im Mittelpunkt einer vollkommen leitenden Kugelhülle des Radius a .

§ 1. Die Formulierung des Problems und die Frequenzgleichung.

Es ist von vornherein klar, daß mögliche Schwingungen ungedämpft müssen bestehen können, da aus dem Kugelinnern keine Energie entweichen kann. Wir dürfen also die gesuchten Feldstärken dem Zeitfaktor $e^{2\pi i \nu t}$ mit reellem ν proportional setzen. Dagegen ist nicht ohne weiteres zu übersehen, was für Eigenschwingungszahlen das aus Oszillator und Kugelhülle bestehende System auszusenden vermag. Deshalb wollen wir dieser Aufgabe besonders unser Augenmerk zuwenden.

Wir können das elektromagnetische Feld im Inneren der Hülle als Überlagerung des Dipolfeldes $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{H}_1$ und eines

1) Vgl. auch Contribución al estudio des las ciencias. Univ. Nac. de La Plata 2. S. 301. 1918.

Störungsfeldes $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}_2$ auffassen, welch letzteres durch Reflexion der Wellen an der Kugeloberfläche entsteht.

Das Dipolfeld leitet sich aus einer einzigen Funktion F ab.¹⁾

Danach ist

$$(1) \quad \mathfrak{E}_{1x} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{1y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{1z} = \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2},$$

wo F für ungedämpfte Sinuswellen die Form hat

$$(2) \quad F = \frac{1}{r} f\left(t - \frac{r}{c}\right) = \frac{C}{r} e^{2\pi i \nu \left(t - \frac{r}{c}\right)}.$$

Dem elektrischen Felde (1) überlagert sich ein Feld

$$(3) \quad \mathfrak{E}_{2x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{2y} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial x}; \quad \mathfrak{E}_{2z} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

das auch zeitlich durch den Faktor $e^{2\pi i \nu t}$ charakterisiert ist und sonst, wie wir sehen werden, nur von r abhängt.

Da Φ der Gleichung

$$(4) \quad \Delta \Phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0$$

zu genügen hat, so kann in reeller Form

$$(5) \quad \Phi = A \cos 2\pi \nu t \frac{\sin kr}{kr}$$

mit

$$(6) \quad k = \frac{2\pi \nu}{c}$$

gesetzt werden, denn das andere partikuläre Integral mit dem Faktor $\frac{\cos kr}{kr}$ widerspräche der Endlichkeitsbedingung des Vektors $\mathfrak{E}_2$.

Folgende Grenzbedingungen sind zu erfüllen. Für $r = a$ muß $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$ senkrecht auf der Kugel stehen, und für $r = 0$ gilt eine dynamische Beziehung, welche ausdrückt, daß im Kugelmittelpunkt die erregende Kraft $\mathfrak{E}_2$ gerade die Schwingungen des Dipols aufrecht erhält.

1) M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung. Leipzig 1906. S. 103.

Diese Bedingung ist aber identisch mit der von Planck (a. a. O., S. 119, Gleichung (172)) formulierten. Ist $\mathfrak{f}$ das Moment des Oszillators, so muß

$$(7) \quad 16\pi^4 \nu_0^3 \mathfrak{f} + 4\pi^2 \nu_0 \mathfrak{f}'' - 2\sigma \mathfrak{f}''' = 3\sigma c^3 \mathfrak{E}_{2z}$$

sein.

Da F nur von r und t abhängt, so geht (1) über in

$$(8) \quad \begin{cases} \mathfrak{E}_{1x} = z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{x}{r}, \\ \mathfrak{E}_{1y} = z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{y}{r}, \\ \mathfrak{E}_{1z} = z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right) \frac{z}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}. \end{cases}$$

$\mathfrak{E}_1$ setzt sich also aus zwei Vektoren zusammen, von denen der eine vom Betrage

$$z \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} \right)$$

im ganzen betrachteten Raum bereits die für $r = a$ verlangte Richtung von r hat, während der andere

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}$$

parallel z ist. Für $\mathfrak{E}_2$ gilt ganz Analoges; es ist nur F durch Φ zu ersetzen. Für $r = a$ muß der Teil des Vektors $\mathfrak{E}$, welcher z parallel ist, verschwinden, d. h. es muß sein für

$$(9) \quad r = a: \quad \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0.$$

Aus (5) berechnet sich mittels (8) für das Kugelzentrum mittels Entwicklung von $\frac{\sin kr}{kr}$ nach Potenzen von r

$$(10) \quad \mathfrak{E}_{2z} = \frac{2}{3} k^2 A \cos 2\pi \nu t,$$

und eine solche erregende Kraft gibt nach Planck (a. a. O. S. 114 (174)) als Lösung von (7) das Moment

$$(11) \quad \mathfrak{f}(t) = \frac{A}{k} \sin \gamma \cos(2\pi \nu t - \gamma),$$

wo

$$(12) \quad \operatorname{ctg} \gamma = \frac{\pi \nu_0}{\sigma \nu^3} (\nu_0^2 - \nu^2)$$

ist. Also wird nach (2)

$$(13) \quad F = \frac{A \sin \gamma}{kr} \cos \left[2\pi \nu \left(t - \frac{r}{c} \right) - \gamma \right].$$

Somit sind Φ und F gefunden; es ist nur noch ν zu bestimmen. Dazu braucht man nur (5) und (13) in (9) einzusetzen, und da diese Bedingung für jede Zeit gelten muß, die Faktoren von $\cos 2\pi \nu t$ und $\sin 2\pi \nu t$ einzeln Null zu setzen, so erhält man

$$(14) \quad \begin{cases} \sin \gamma [(1 - \varepsilon^2) \cos (\gamma + \varepsilon) + \varepsilon \sin (\gamma + \varepsilon)] \\ \quad + (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon - \varepsilon \cos \varepsilon = 0, \\ (1 - \varepsilon^2) \sin (\gamma + \varepsilon) - \varepsilon \cos (\gamma + \varepsilon) = 0, \end{cases}$$

wo ε eine Abkürzung für

$$(15) \quad \varepsilon = k a = \frac{2\pi \nu a}{c}$$

ist. Führt man die Bezeichnungen

$$(16) \quad \begin{cases} \varphi(\varepsilon) = \varepsilon \cos \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon, \\ \psi(\varepsilon) = \varepsilon \sin \varepsilon + (1 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon, \end{cases}$$

so gehen beide Gleichungen (14) in die eine

$$(17) \quad \psi \sin \gamma - \varphi \cos \gamma = 0, \quad \text{d. h.} \quad \text{ctg } \gamma = \frac{\psi}{\varphi}$$

über, und setzt man schließlich

$$(18) \quad P(\varepsilon) = \frac{\psi}{\varphi} = \frac{\varepsilon \sin \varepsilon + (1 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon}{\varepsilon \cos \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon}$$

und führt die Bezeichnung ein

$$(19) \quad \varepsilon_0 = \frac{2\pi \nu_0 a}{c},$$

so folgt aus (12), (17) und (18)

$$(20) \quad P(\varepsilon) = \frac{\pi}{\sigma} \frac{1 - \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2}}{\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^3}.$$

Diese transzendente Gleichung ist die Frequenzgleichung. Aus ihr sind bei gegebenem ε_0 und σ die Werte von ε zu berechnen.

§ 2. Die Funktion $P(\varepsilon)$.

Da die Frequenzgleichung (20) zwei Konstanten enthält, ist sie einigermaßen kompliziert. Wir erleichtern die Diskussion, indem wir uns zunächst einen Überblick über den Verlauf der Funktion $P(\varepsilon)$ verschaffen.

Nach (18) sind die Nullpunkte die Wurzeln der Gleichung

$$(21) \quad \psi(\varepsilon) = \varepsilon \sin \varepsilon + (1 - \varepsilon^2) \cos \varepsilon = 0,$$

während die Unendlichkeitspunkte sich aus

$$(22) \quad \varphi(\varepsilon) = \varepsilon \cos \varepsilon - (1 - \varepsilon^2) \sin \varepsilon = 0$$

ergeben.

Es sei übrigens bemerkt, daß die Wurzeln von (22) die sogenannten freien Schwingungen der Kugel darstellen¹⁾, wie man leicht sieht, wenn man annimmt, daß kein Dipol im Zentrum vorhanden ist ($F = 0$) und den Wert von Φ aus (5) in (9) einsetzt.

(21) ist gleichbedeutend mit der Gleichung

$$(21') \quad \omega(\varepsilon) = \operatorname{tg} \varepsilon - \varepsilon + \frac{1}{\varepsilon} = 0.$$

Man erhält ihre Lösungen graphisch, indem man die Schnittpunkte der Kurven $Y = \operatorname{tg} \varepsilon$ und $y = \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon}$ bestimmt.

Ist ε' ein Näherungswert, so ist

$$\varepsilon = \varepsilon' - \frac{\omega(\varepsilon')}{\varepsilon'^2 - 2}$$

nach der Regula falsi ein besserer Wert. Für große ε gilt genähert $\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon$, d. h.

$$\varepsilon_n = (2n + 1) \frac{\pi}{2}.$$

Eine genauere Formel für ε_n findet sich bei Euler, *Introductio in anal. inf.* II, 319; vgl. auch Jahnke und Emde, *Funktionentafeln*, Leipzig und Berlin 1909, S. 2, wo die numerischen Werte der Wurzeln angegeben sind. Es folgt

$$\begin{array}{ll} \varepsilon_1 = 4,480, & \varepsilon_3 = 10,90 \\ \varepsilon_2 = 7,723, & \varepsilon_4 = 14,07 \\ & \text{usw.} \end{array}$$

Beschränken wir uns auf vier Ziffern, so ist bereits die Lösung ε_3 von (21') mit der entsprechenden der Eulerschen Gleichung $\operatorname{tg} \varepsilon = \varepsilon$ identisch.

(22) ist gleichbedeutend mit

$$(22') \quad \varrho(\varepsilon) = \operatorname{ctg} \varepsilon - \frac{1}{\varepsilon} + \varepsilon = 0.$$

1) Besser gesagt, diejenigen freien Schwingungen, welche dem von uns behandelten Typ (Φ nur Funktion von r und t) entsprechen.

Eine erste Näherung ist

$$\varepsilon' = n\pi - \frac{1}{n\pi}.$$

Die Regula falsi gibt den besseren Wert

$$\varepsilon = \varepsilon' + \frac{q(\varepsilon')}{\varepsilon'^2 - 2}.$$

So berechnen sich die Wurzeln

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 0^1), & \varepsilon_5 &= 12,48, \\ \varepsilon_2 &= 2,744, & \varepsilon_6 &= 15,64, \\ \varepsilon_3 &= 6,117, & \varepsilon_7 &= 18,80. \\ \varepsilon_4 &= 9,817, \end{aligned}$$

Fig. 1.

Die nachfolgende Tabelle 1 gibt $P(\varepsilon)$ als Funktion von ε und Fig. 1 die entsprechende graphische Darstellung. Erleichtert wird die Berechnung durch die Bemerkung, daß für große Argumente

$$P(\varepsilon) = -\operatorname{ctg}\left(\varepsilon + \frac{1}{\varepsilon}\right)$$

ein guter Näherungswert ist.

§ 3. Lösungen der Frequenzgleichung.

Die Frequenzgleichung (20), die für jeden Wert ε_0 und für jeden Wert σ unendlich viele Lösungen, im ganzen also ∞^3 -Lösungen besitzt, ist der graphischen Behandlung und der Diskussion sehr viel zugänglicher, wenn wir

$$(23) \quad \varepsilon^2 = x; \quad \varepsilon_0^2 = x_0; \quad \varepsilon^3 P(\varepsilon) = y; \quad \frac{\sigma}{\pi \varepsilon_0} = \alpha$$

einführen (x_0 ist dem Quadrat der Eigenfrequenz des Oszillators proportional, x dem Quadrat der gesuchten Frequenzen des Systems). Dann ergibt sich nämlich aus (20)

$$(24) \quad y = -\frac{1}{\alpha} (x - x_0).$$

1) $\varepsilon_1 = 0$ ist dreifache Wurzel.

Tabelle 1.

ε	$P(\varepsilon)$	$x = \varepsilon^2$	$y = \varepsilon^3 P(\varepsilon)$	ε	$P(\varepsilon)$	$x = \varepsilon^2$	$y = \varepsilon^3 P(\varepsilon)$
0,2	185,3	0,04	1,48	6,2	- 12,32	38,44	- 2936
0,4	22,5	0,16	1,44	6,4	- 3,53	40,96	- 926
0,6	6,48	0,36	1,40	6,6	- 1,96	43,56	- 564
0,8	2,76	0,64	1,41	6,8	- 1,27	46,24	- 400
1,0	1,56	1,00	1,56	7,0	- 0,86	49,00	- 294
1,2	1,13	1,44	1,96	7,2	- 0,56	51,84	- 210
1,4	1,03	1,96	2,82	7,4	- 0,33	54,76	- 133
1,6	1,09	2,56	4,46	7,6	- 0,12	57,76	- 53,3
1,8	1,28	3,24	7,44	7,8	0,07	60,84	36,0
2,0	1,62	4,00	12,9	8,0	0,28	64,00	143,0
2,2	2,23	4,84	23,76	8,2	0,50	67,24	279,5
2,4	3,55	5,76	49,07	8,4	0,79	70,56	466
2,6	8,46	6,76	148,8	8,6	1,16	73,96	744
2,8	- 21,26	7,84	- 146,6	8,8	1,79	77,44	1218
3,0	- 4,56	9,00	- 123,2	9,0	3,09	81,00	2254
3,2	- 2,42	10,24	- 79,3	9,2	8,64	84,64	6728
3,4	- 1,56	11,56	- 61,3	9,4	- 12,11	88,36	- 10060
3,6	- 1,07	12,96	- 50,0	9,6	- 3,47	92,16	- 3079
3,8	- 0,74	14,44	- 40,6	9,8	- 1,93	96,04	- 1816
4,0	- 0,48	16,00	- 31,0	10,0	- 1,25	100,0	- 1247
4,2	- 0,27	17,64	- 20,1	10,2	- 0,84	104,0	- 887
4,4	- 0,08	19,36	- 6,6	10,4	- 0,54	108,2	- 612
4,6	0,11	21,16	10,9	10,6	- 0,31	112,4	- 369
4,8	0,31	23,04	34,5	10,8	- 0,102	116,6	- 130
5,0	0,54	25,00	67,1	11,0	0,096	121,0	128,4
5,2	0,82	27,04	114,8	11,2	0,30	125,4	426
5,4	1,20	29,16	189,3	11,4	0,54	130,0	796
5,6	1,83	31,36	321,0				
5,8	3,15	33,64	605,7				
6,0	8,78	36,00	1987,0				

Die Lösungen dieser Gleichung sind die Schnittpunkte der Kurve $y(x)$ und der Geraden

$$Y = -\frac{1}{a}(x - x_0),$$

die durch den Punkt x_0 der Abszissenachse geht und gegen diese eine sehr große Neigung hat, da das logarithmische Dekrement des Oszillators nach Voraussetzung klein ist und dasselbe nach (23) also auch für a gilt. Obige Tabelle enthält zusammengehörige Werte von y und x , und die Fig. 2 stellt y als Funktion von x dar. Die Null- und Unendlichkeitsstellen sind natürlich die Quadrate der für $P(\varepsilon)$ geltenden.

Fig. 2.

Fig. 3 gibt noch einmal schematisch y als Funktion von x . Wir wollen die Abszissen der Asymptoten $r_1, r_2, r_3, \dots$ die Resonanzpunkte nennen. Diese stellen die freien Schwingungen

Fig. 3.

der Kugel dar. Fällt x_0 mit einem dieser Werte zusammen, so wollen wir sagen, daß Resonanz zwischen dem Oszillator und der Kugel besteht.

Die Dissonanzpunkte $d_1, d_2, d_3, \dots$ seien die Nullstellen der Funktion y . Fällt x_0 mit einem dieser Werte zusammen,

so wollen wir, um einen einfachen Ausdruck zur Verfügung zu haben, sagen, daß Dissonanz zwischen dem Oszillator und der Kugel besteht.

Wie aus Fig. 3, in welche der Punkt x_0 und die durch ihn gehende Gerade eingezeichnet sind, unmittelbar hervorgeht, gibt es im allgemeinen eine Wurzel (Abszisse des Schnittpunktes B), welche — wegen der starken Neigung der Geraden — sehr nahe bei x_0 liegt, d. h. fast der Eigenschwingung des Dipols entspricht, während die anderen Wurzeln (Abszissen der Schnittpunkte $A, C, D \dots$) sehr nahe bei den Eigenschwingungen der Kugel liegen. Die Verstimmung ist um so geringer, je kleiner die Dämpfung des Dipols ist, weil dann α kleiner, d. h. die Gerade steiler ist. Ist die Dämpfung des Dipols Null, die Gerade also vertikal, so haben wir als mögliche Schwingungen die unveränderten freien Perioden der Kugel sowie des Dipols.

Die Eigenschwingungen der Kugel, welche kleiner als die des Dipols sind, werden durch die Koppelung mit dem Dipol verkleinert, die anderen vergrößert.

Die Eigenschwingung des Dipols wird durch die Koppelung mit der Kugel vergrößert bzw. verkleinert, je nachdem die Eigenschwingung des ungekoppelten Dipols als linken Nachbarn einen Resonanz- oder Dissonanzpunkt hat.

Je näher x_0 einem Dissonanzpunkte rückt, um so geringer fällt die Verstimmung des Dipols infolge Anwesenheit der Hülle aus. Ist der Dipol genau in der Dissonanz mit der Kugel, so wird er nicht verstimmt; außerdem treten die Eigenschwingungen der Kugel, leicht verstimmt, auf.

Fällt dagegen x_0 mit einem Resonanzpunkte zusammen, so löst dieser sich in zwei auf (Schwebungen), und dazu kommen die leicht verstimmten anderen Resonanzpunkte als mögliche Schwingungen.

Rechnerisch gestaltet sich die Ermittlung der Verstimmung des Dipols infolge Vorhandenseins der Kugel folgendermaßen. Aus (20) folgt für den Wert ε , der ε_0 sehr nahe liegt, so daß $\varepsilon + \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0$ gesetzt werden darf,

$$\varepsilon^3 P(\varepsilon) = -\frac{\pi \varepsilon_0}{\sigma} (\varepsilon^2 - \varepsilon_0^2),$$

d. h.

$$(25) \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{\sigma}{2\pi} P(\varepsilon_0) \right],$$

wenn nicht ϵ_0 sehr nahe bei einem Resonanzpunkte [$P(\epsilon_0)$ sehr groß] liegt. Für große ϵ_0 geht $P(\epsilon_0)$ in $-\text{ctg } \epsilon_0$ über, so daß dann

$$(25') \quad \epsilon = \epsilon_0 \left[1 + \frac{\sigma}{2\pi} \text{ctg } \epsilon_0 \right]$$

gilt.

Für große Wurzeln, die den verstimmten Eigenschwingungen der Kugel entsprechen, dürfen wir $\epsilon = n\pi + \xi$ setzen, und es folgt genähert

$$\xi = \frac{n\pi\alpha}{1 - \frac{\epsilon_0^2}{n^2\pi^2}},$$

d. h.

$$(26) \quad \epsilon_n = n\pi \left[1 + \frac{\alpha}{1 - \frac{\epsilon_0^2}{n^2\pi^2}} \right].$$

Die Differenz zweier aufeinander folgender großer ϵ ist also genähert

$$(26') \quad \epsilon_{n+1} - \epsilon_n = \pi(1 + \alpha).$$

La Plata, 15. August 1920.

Instituto de Física.

(Eingegangen 13. Dezember 1920.)