Zur Darstellung der Bernoullischen Zahlen durch bestimmte Integrale.

Von Karl Carda in Wien.

Beziehungen zwischen Bernoullischen Zahlen und bestimmten Integralen wurden von mehreren Autoren aufgestellt. Die einfachste derselben ist wohl durch die Formel

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2m-1} dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{B_m}{4m} \quad ^1)$$

gegeben. Hierin bezeichnet, wie üblich, B_m die m^{te} Bernoullische Zahl, also

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \dots$$

Die Gleichung (1) lässt sich, wie nun gezeigt werden soll, auch auf folgendem instructiven Wege ableiten, der durch die einfache Bemerkung, dass die Function

$$f(x) = e^{2\pi x}$$

die Transformation

$$x \parallel x + i \qquad i = \sqrt{-1}$$

gestattet, nahegelegt wird.

Wir erstrecken das Integral

$$\int \frac{(x + iy)^{2m-1}}{e^{2\pi(x+iy)} - 1} d(x + iy)$$

auf folgender geschlossenen Curve in der complexen Zahlenebene. Wir integrieren entlang der x -Axe von dem Punkte $(\varrho, 0)$ zu dem Punkte $(a, 0)$. Dabei ist $0 < \varrho < \frac{1}{2}$ und $a > \varrho$. Dann integriere

¹⁾ Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen. Berlin 1893, p. 110.
Monatsh. f. Mathematik u. Physik. V. Jahrg.

man parallel der y -Axe zu dem Punkte (a, k) , wobei k eine ganze positive Zahl bedeutet, sodann von (a, k) geradlinig nach (a, k) , dann auf einem Viertelkreise mit dem Radius ϱ nach dem Punkte $(0, k-\varrho)$, sodann geradlinig zu dem Punkte $(0, k-1+\varrho)$, dann im ersten Quadranten auf einem Halbkreise mit dem Radius ϱ zu dem Punkte $(0, k-2+\varrho)$ u. s. f., schließlich auf einem Viertelkreise von dem Punkte $(0, \varrho)$ zu dem Ausgangspunkte $(\varrho, 0)$. Die Summe dieser Integrale verschwindet. Das Integrationsgebiet wird durch die folgende Figur veranschaulicht.

Dass die Radien der Halbkreise und der beiden Viertelkreise gleich gewählt wurden, ist offenbar keine Beschränkung. Für $\lim a = \infty$ verschwindet ein Term der Integralsumme und man erhält somit

$$(2) \left\{ \int_{\varrho}^{\infty} \frac{x^{2m-1} dx}{e^{2\pi x} - 1} + \int_{\infty}^{\varrho} \frac{(x+ki)^{2m-1} dx}{e^{2\pi x} - 1} + \int_{((k i))} + \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k-1} \int_{(\lambda i)} + \right. \\ \left. + i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \int_{\lambda-\varrho}^{\lambda-1+\varrho} \frac{(iy)^{2m-1} dy}{e^{2\pi iy} - 1} + \int_{((0))} = 0. \right.$$

Man hat nun in (2) ϱ gegen Null convergieren zu lassen. Man findet zunächst

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{\substack{\varrho=0 \\ ((0))}} \int = 0; \\ \lim_{\substack{\varrho=0 \\ ((ki))}} \int = \frac{(-1)^{m+1}}{n} \cdot k^{2m-1}; \\ \lim_{\varrho=0} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k-1} \int_{(\lambda i)}^{\lambda=k-1} = \frac{(-1)^{m+1}}{2} \cdot \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k-1} \lambda^{2m-1}. \end{array} \right.$$

Ferner ist

$$i \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \int_{\lambda-\varrho}^{\lambda-1+\varrho} = (-1)^{m+1} \frac{i}{2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \int_{\varrho}^{1-\varrho} \frac{(y-\lambda)^{2m-1}}{\sin \pi y} (\cos \pi y - i \sin \pi y) dy.$$

Durch Vergleichung der reellen Theile in (2) ergibt sich also für $\lim \varrho = 0$, wenn wir

$$(4) \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{2\tau-1} dx}{e^{2\pi x} - 1} = T_{\tau}$$

setzen,

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \binom{2m-1}{2\nu} (-1)^{\nu} k^{2\nu} \cdot T_{m-\nu} + (-1)^m \left[\frac{k^{2m-1}}{4} - \frac{k^{2m}}{4m} + \frac{1}{2} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k-1} \lambda^{2m-1} \right] = 0.$$

Hieraus leitet man ab

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \lambda^{2m-1} = \frac{k^{2m}}{2m} + \frac{k^{2m-1}}{2} + 2 \sum_{\nu=1}^{\nu=m-1} \binom{2m-1}{2\nu} (-1)^{m-\nu+1} k^{2\nu} T_{m-\nu}.$$

Setzt man $m+1$ an Stelle von m , so folgt

$$(5) \quad \sum_{\lambda=1}^{\lambda=k} \lambda^{2m+1} = \frac{k^{2m+2}}{2m+2} + \frac{k^{2m+1}}{2} + \sum_{\nu=1}^{\nu=m} \binom{2m+1}{2\nu} (-1)^{m-\nu} k^{2\nu} \cdot 2T_{m-\nu+1}.$$

Nun hat man aber die bekannte Formel

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^{2m+1} k^{2m+1} &= \frac{k^{2m+2}}{2m+2} + \frac{k^{2m+1}}{2} + \sum_{\nu=1}^{m-1} \binom{2m+1}{2\nu} (-1)^{m-\nu} k^{2\nu} \\ &\quad + \frac{B_{m-\nu+1}}{2(m-\nu+1)}. \end{aligned} \right.$$

Durch Vergleichung von (5) und (6) ergibt sich nach einfacher Überlegung

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2m-1} dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{B_m}{4m}.$$

Zu demselben Ergebnis gelangt man, wenn man die analoge Betrachtung auf das Integral

$$\int \frac{(x+iy)^{2m} d(x+iy)}{e^{2\pi(x+iy)} - 1}$$

anwendet und dann die imaginären Theile vergleicht.

Schließlich sei noch bemerkt, dass Kronecker auf ähnlichem Wege die Gauß'schen Reihen summierte.¹⁾

¹⁾ Crelle's J., Bd. 105, p. 267.