Astronomische Nachrichten.

Expedition auf der Königlichen Sternwarte bei Kiel.

Herausgeber: Prof. Dr. C. A. F. Peters.

Band 96.

Nr. 2284.

4.

Ueber die Vertheilung der Vorzeichen der nach einer Ausgleichung übrig bleibenden Fehler. Von Dr. H. Seeliger.

1.

Wenn man eine Reihe von Beobachtungswerthen interpolatorisch durch die Anfangsglieder einer allgemeinen Reihenentwicklung darzustellen hat, so werden sich mehrere Kriterien dafür angeben lassen, ob eine genügende Anzahl von Gliedern der angesetzten Reihenentwicklung mitgenommen worden ist. Zuerst muss die Grösse der übrig bleibenden Fehler der Unsicherheit der gegebenen Beobachtungswerthe in der Weise entsprechen, dass der mittlere übrig bleibende Fehler nicht grösser ausfällt, als der mittlere Fehler einer Beobachtung. Sind nun ausserdem die gegebenen Daten nur von einer Variablen abhängig, ein Fall der in der Astronomie der bei Weitem häufigste ist, so wird eine gleichmässige Vertheilung der Vorzeichen der übrig bleibenden Fehler, wenn diese nach wachsenden oder abnehmenden Werthen der Variablen geordnet werden, die nothwendige Bedingung dafür sein, dass die Ausgleichung genügend weit getrieben ist. Sind im Ganzen gleich viel positive und negative Fehler vorhanden, so wird die gleichmässige Vertheilung ihrer Vorzeichen darin bestehen, dass nahezu gleich viel Zeichenwechsel und Zeichenfolgen stattfinden werden.

Dies ist eine längst allgemein bekannte Wahrheit, und bei jeder guten Ausgleichungsrechnung, wird auf sie Rücksicht genommen. Sie ist aber noch nie, soweit mir bekannt vom Standpunkte der Wahrscheinlichkeitsrechnung näher untersucht worden, auch ist mir nicht einmal ein strenger Beweis des erwähnten Hauptsatzes bekannt, und doch ist dieser durchaus nicht überflüssiger, wie etwa der Beweis des Bernoulli'schen Theorems in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Die Nothwendigkeit des letzteren ist aber bis jetzt noch von Niemandem geleugnet worden.

In dem Folgenden werde ich nun die erwähnte Untersuchung durchzuführen versuchen. Es soll dabei aber nicht bei dem einfachsten Falle, in welchem gleichviel positive und negative Fehler vorhanden sind, stehen

geblieben, sondern auch der allgemeinste Fall betrachtet werden.

2.

Zunächst wollen wir die folgende Aufgabe lösen: Es seien $\mu = n + m$ Kugeln, von denen n schwarz und m weiss seien, vorhanden. Diese werden, um ganz concret vorzugehen, nach einander aus einer Urne gezogen und dann der Reihe nach nebeneinander gelegt. Wir fragen nun nach der Wahrscheinlichkeit W_y dafür, dass eine Anordnung der Kugeln stattfindet, welche y Farbenwechsel d. b. Uebergänge von einer Farbe zu der andern, darbietet. Es sei $m \geq n$ dann können im günstigsten Falle $2n$ Farbenwechsel vorkommen d. h. es wird

$$y \leq 2n.$$

Ferner soll y von Null verschieden sein, dann ist der kleinste Werth den y erreichen kann $= 1$. Also:

$$1 \leq y \leq 2n.$$

Bekanntlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass irgend eine bestimmte Anordnung der Kugeln aus der Urne hervorgeht:

$$\frac{1.2.3\dots n. 1.2\dots m}{1.2.3\dots(m+n)} \quad (1)$$

unabhängig davon, welche Anordnung gerade gemeint ist. Um nun die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu finden haben wir (1) zu multiplizieren mit der Anzahl der Anordnungen, in welchen y Farbenwechsel vorkommen.

Es sei $f(y, n)$ die Anzahl der Fälle, wie oft n Elemente in y Gruppen, von denen jede wenigstens eines enthalten soll vertheilt werden können. Es sollen dabei nur jene Vertheilungen als von einander verschieden angesehen werden, die sich in der Anzahl der in den einzelnen Gruppen enthaltenen Elemente von einander unterscheiden. Um $f(y, n)$ zu bestimmen, kann man folgende Gleichungen aufstellen, deren Richtigkeit unmittelbar erhellt.

$$f(y, n-1) + f(y, n-2) + \dots + f'(y, y) = f'(y+1, n) \quad (2)$$

$$f'(y, y) = 1, \quad f'(1, n) = 1 \quad (3)$$

Da $1 \leq y \leq 2n$ so sind diese Gleichungen zur Bestimmung von $f(y, n)$ ausreichend. Aus (2) folgt:
 $f(y, n-2) + f(y, n-3) + \dots + f(y, y) = f(y+1, n-1)$
 und durch Subtraction von (2):

$$\begin{aligned} 2x \text{ Farbenwechsel stattfinden} &= f(x+1, n) f(x, m) + f(x+1, m) f(x, n) \\ 2x+1 \quad " \quad " &= 2 f(x+1, n) f(x+1, m) \end{aligned}$$

die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich daraus durch Multiplication mit (1), je nachdem y gerade oder ungerade ist:

$$(I) \quad \begin{cases} W_{2x} = \frac{1.2 \dots n, 1.2 \dots m}{1.2 \dots (m+n)} \cdot \frac{n-1, n-2 \dots n-x+1}{1.2 \dots x-1} \cdot \frac{m-1, \dots m-x+1}{1.2 \dots x-1} \cdot \left(\frac{m+n-2x}{x} \right) \\ W_{2x+1} = 2 \cdot \frac{1.2 \dots n, 1.2 \dots m}{1.2 \dots m+n} \cdot \frac{n-1, n-2 \dots n-x}{1.2 \dots x} \cdot \frac{m-1, m-2 \dots m-x}{1.2 \dots x} \end{cases}$$

Die Richtigkeit von (I) kann direct geprüft werden, da entweder 1, oder 2, oder... $2n$ Zeichenwechsel stattfinden müssen, so muss die über diese Grenze ausgedehnte Summe aus den Wahrscheinlichkeiten W gleich der Gewissheit also gleich der Einheit sein d. h. es muss:

$$\sum_{x=1}^n W_{2x} + \sum_{x=0}^{n-1} W_{2x+1} = 1$$

oder

$$1 = \frac{1.2 \dots n. 1.2 \dots m}{1.2 \dots m+n} \cdot \sum_{x=1}^n \frac{n-1. n-2 \dots n-x+1}{1.2 \dots x-1} \cdot \frac{m-1 \dots m-x+1}{1.2 \dots x-1} \cdot \frac{n+m}{x}$$

die Richtigkeit dieser Formel ergibt sich aber sofort durch die Bemerkung, dass sich die vorkommende Summe auch in der Form:

$$(n+m) \quad F(-n+1, m+1, 2, 1)$$

also als hypergeometrische Reihe schreiben lässt, deren Summe die Gaus'sche Summationsformel sofort angibt.

3.

Es seien nun $m + n$ gegebene Beobachtungsdaten durch eine Function einer Variablen dargestellt, und zwar sollen m positive und n negative Fehler übrig bleiben. Sehen wir von der Grösse dieser Fehler ab, so wird es für uns a priori gleich wahrscheinlich sein, ob eine bestimmte der gegebenen Beobachtungen einen positiven oder negativen Fehler übrig lassen wird. Es ist daraus ohne Weiteres ersichtlich, dass, wenn wir W_y dem vorigen Artikel gemäss bilden, dieses W_y nichts anderes ist, als die Wahrscheinlichkeit, mit der wir y Zeichenwechsel erwarten dürfen, wenn wir uns die Fehler in einer beliebigen, aber vorher bestimmten Reihenfolge, welche in irgend welcher Weise von der unabhängigen Variablen der darstellenden Function abhängt, geordnet denken. So ist z. B. bei allen Bewegungsproblemen diese Variable die Zeit und man hat in diesem Falle die erforderliche Anordnung der Beob-

4.

Haben die einzelnen Beobachtungen gleiches Gewicht, so werden die gewöhnlichen Interpolations- und Ausgleichungsmethoden auf solche Fehler führen, dass die Summe der positiven nahe gleich sein wird der Summe der negativen. Da nun aber der gewöhnlichen Annahme über die Natur der Beobachtungsfehler gemäss, ein Fehler von bestimmter Grösse ebenso oft positiv als negativ vorkommt, so werden wir annehmen müssen, dass in diesem Falle $m = n$ ist, oder dass diese Gleichung wenigstens annähernd erfüllt werde. Dieser einfache Fall soll zuerst behandelt werden.

Setzen wir in Formel (I) $m = n$, so wird:

$$\left. \begin{aligned} W_{2x} &= 2 \cdot \frac{(1.2..n)^2}{1.2..2n} \cdot \left(\frac{n-1.n-2..n-x+1}{1.2..x-1} \right)^2 \frac{n-x}{x} \\ W_{2x+1} &= 2 \cdot \frac{(1.2..n)^2}{1.2..2n} \cdot \left(\frac{n-1.n-2..n-x}{1.2..x} \right)^2 \end{aligned} \right\}$$

Aus diesen Formeln folgt:

$$\frac{W_{2x+1}}{W_{2x}} = \frac{n-x}{x}$$

$$\frac{W_{2x}}{W_{2x-1}} = \frac{n-x}{x}$$

W_y wächst demnach fortwährend bis zu einem Maximalwerthe, von welchem es wieder constant abzunehmen beginnt.

Obwohl nun die Behandlung des allgemeinen Falles gar keine Schwierigkeit darbietet, will ich doch die spezielle Annahme machen, dass $n = 2\mu$, also eine gerade Zahl sei, weil dadurch die Rechnung etwas vereinfacht wird. Wäre n ungerade, so hätte das Folgende nur ganz geringfügige Modificationen, die das Resultat durchaus nicht verändern, zu erfahren.

Unter der Voraussetzung $n = 2\mu$ ergeben sich nun folgende Sätze:

1) die Wahrscheinlichkeiten:

$$W_{2\mu-1} = W_{2\mu} = W_{2\mu+1}$$

sind die Maximalwerthe, welche W_y erreichen kann und nach beiden Seiten hin, d. h. gleichgültig ob man den Index y vergrößert oder verkleinert, immer nimmt W_y ab.

2) Das Verhältniss $\frac{W_y}{W_{y-1}}$ wird um so grösser, je mehr wir uns von dem Maximal-Grade nach links in Werthreihe:

$$\begin{array}{ccccccc} W_1 & W_3 & \dots & W_{2\mu+1} & \dots & W_{4\mu-1} \\ W_2 & W_4 & \dots & W_{2\mu} & \dots & W_{4\mu} \end{array}$$

immer bewegen und eben so wird das Verhältniss $\frac{W_y-1}{W_y}$ grösser, wenn wir uns vom Maximalgliede nach rechts hin entfernen.

3) Wenn μ unendlich gross wird, werden alle Wahrscheinlichkeiten W , auch die Maximalwerthe unendlich klein.

Die vollkommene Analogie dieser Sätze mit den bekannten von Jacob Bernoulli in der „Ars conjectandi“ angegebenen legt die Vermuthung nahe, dass auch hier ein dem berühmten Bernoulli'schem Theorem analoges Theorem für sehr grosse Werthe von μ bestehen werde. Dies findet in der That, wie das Folgende zeigen soll, statt und zwar ist der Beweissgang zum Theil ganz ähnlich dem von Jacob Bernoulli eingeschlagenen. Ich werde mich deshalb begnügen, im folgenden Artikel diejenigen

Resultate, welche mit Hülfe der Untersuchungen der „Ars conjectandi“ sofort abgeleitet werden können, kurz zusammenzustellen.

(5)

Es seien μ und t zwei sehr grosse Zahlen, dann nehme ich aus der im vorigen Artikel aufgestellten Werthreihe der W , 3 Glieder heraus:

$$W_{2\mu-(2t-1)}, \quad W_{2\mu}, \quad W_{2\mu+2t}$$

und bezeichne diese resp. mit L , M und L' . Dann geben die Formeln des Art. 4:

$$\frac{M}{L} = \frac{(\mu+t-1)(\mu+t-2)(\mu+t-3) \dots (\mu+1)^2}{(\mu-t+1)(\mu-t+2)(\mu-t+3) \dots (\mu-1)^2}$$

$$\frac{M}{L'} = \frac{(\mu+t)(\mu+t-1)(\mu+t-2) \dots (\mu+1)^2}{(\mu-t)(\mu-t+1)(\mu-t+2) \dots (\mu-1)^2} \dots (1)$$

Beide Gleichungen enthalten Factoren, die alle > 1 sind. Sie können demnach durch Vergrößerung von μ und t beliebig gross gemacht werden. Ferner ist:

$$\frac{M}{L'} : \frac{M}{L} = \frac{(\mu+t-1)(\mu-t)}{(\mu-t+1)(\mu-t)} > 1, \text{ also } \frac{M}{L'} > \frac{M}{L}$$

Nun lässt sich beweisen, dass:

die Summe aller Glieder zwischen M und $L >$

$\frac{M}{L} \left(\frac{2\mu-2t+1}{2t-1} \right)$ multiplicirt mit der Summe aller Glieder links von L und

die Summe aller Glieder zwischen M und $L' >$

$\frac{M}{L'} \left(\frac{2\mu-2t-1}{2t+1} \right)$ multiplicirt mit der Summe aller Glieder rechts von L' .

Daraus ergibt sich, dass die Summe der zwischen L und L' liegenden Glieder grösser ist, als die Summe aller Glieder links von L und rechts von L' multiplicirt mit dem Factor:

$$(2) \quad a = \frac{2(\mu-t-1)}{2t+1} \cdot \frac{M}{L}$$

Wir wissen ferner, dass die Summe sämmtlicher W gleich der Gewissheit, also $= 1$ ist. Bezeichnet demnach Ω die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Anzahl von Zeichenwechseln stattfindet, die innerhalb der Grenzen:

$$2\mu-2(t-1) \text{ und } 2\mu+2t$$

liegt, so ist:

$$\Omega > \frac{9}{1+a}$$

(6)

Ich will nun zeigen, dass Ω sich beliebig nahe der Einheit bringen, also a so gross als man nur will machen, lässt. Stirling's Theorem wird uns sehr leicht dahin

bringen. Nach diesem ist bekanntlich, wenn n keine kleine Zahl bedeutet:

$$1.2.3 \dots n = e^{-n} \cdot n^n \sqrt{2\pi n}$$

Daraus folgt, wenn m ebenfalls eine grosse Zahl

$$\frac{M}{L} = \frac{\mu-t+1}{\mu+t-1} \binom{\mu+t-1}{\mu} 2^{\mu+2t-1} \binom{\mu-t}{\mu} 2^{\mu-2t+1} \mu - (2\mu+1) \binom{\mu-1}{\mu} - 2\mu+1$$

und weil μ u. t sehr gross sind und die weitere Annahme gemacht werden soll, dass μ gegen t sehr gross ist:

$$\frac{M}{L} = \left(1 + \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu+2t-2} \cdot \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu-2t+2}$$

Also:

$$a = \left(1 + \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu+2t-2} \cdot \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu-2t+2} \cdot \frac{2(\mu-t-1)}{2t+1}$$

Es lässt sich nun in der That zeigen, dass a gleich einer beliebig grossen Zahl γ gemacht werden kann und zwar allein durch Annahme eines genügend grossen μ , während das Verhältniss $\frac{t}{\mu}$ constant und zwar beliebig klein angenommen wird.

Setzen wir $\frac{t}{\mu} = c$ so ist zur Bestimmung des Werthes von μ die Gleichung aufzulösen.

$$\left(1+c\right)^{2\mu+2\mu c-2} \cdot \left(1-c\right)^{2\mu-2\mu c+2} \cdot \frac{2(\mu-\mu c-1)}{2\mu c+1} = \log \gamma$$

Eine Relation die durch Einführung der abkürzenden Bezeichnung:

$$\varphi(\mu) = \frac{2\mu}{2\mu c+1} - 1$$

auch geschrieben werden kann:

$$2\mu \cdot \log \left\{ (1+c)^{(1+c)} (1-c)^{(1-c)} \right\} + 2 \log \left(\frac{1-c}{1+c} \right) + \log \varphi(\mu) = \log \gamma \quad (1)$$

Diese Gleichung ist natürlich im Allgemeinen nur durch indirecte Methoden auflösbar. Besonders wichtig ist die Auflösung von (1) für kleine Werthe von c . Wird aber schon die 3. Potenz von c vernachlässigt, so kann gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \log(1+c) &= c + \frac{1}{2}c^2 \\ \log(1-c) &= -c + \frac{1}{2}c^2 \end{aligned} \right\} \log \frac{1+c}{1-c} = 2c$$

u. (1) wird dadurch:

$$2\mu c^2 + \log \varphi(\mu) = \log \gamma + 4c \quad (2)$$

Wird nun weiter angenommen, dass $2\mu c$ keine kleine Zahl ist, so darf gesetzt werden:

$$\varphi(\mu) = \frac{1-c}{c}$$

und dadurch wird die Gleichung (2)

$$(3) \quad 2\mu = \frac{\log \gamma c}{c^2} + \frac{5}{c}$$

die hier vorkommenden Logarithmen sind selbstverständlich natürliche. So gross muss also 2μ gewählt werden, damit die im vorigen Artikel mit Ω bezeichnete Wahrscheinlichkeit

$$> \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

ist und ausserdem $n > m$

$$(m+1)(m+2) \dots n = e^{-(n-m)} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot m^{-m-\frac{1}{2}}$$

Mit Hülfe dieser Formel lässt sich $\frac{M}{L}$ so schreiben:

$$\frac{M}{L} = \frac{\mu-t+1}{\mu+t-1} \binom{\mu+t-1}{\mu} 2^{\mu+2t-1} \binom{\mu-t}{\mu} 2^{\mu-2t+1} \mu - (2\mu+1) \binom{\mu-1}{\mu} - 2\mu+1$$

und weil μ u. t sehr gross sind und die weitere Annahme gemacht werden soll, dass μ gegen t sehr gross ist:

$$\frac{M}{L} = \left(1 + \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu+2t-2} \cdot \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu-2t+2}$$

Also:

$$a = \left(1 + \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu+2t-2} \cdot \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)^{2\mu-2t+2} \cdot \frac{2(\mu-t-1)}{2t+1}$$

Es lässt sich nun in der That zeigen, dass a gleich einer beliebig grossen Zahl γ gemacht werden kann und zwar allein durch Annahme eines genügend grossen μ , während das Verhältniss $\frac{t}{\mu}$ constant und zwar beliebig klein angenommen wird.

Setzen wir $\frac{t}{\mu} = c$ so ist zur Bestimmung des Werthes von μ die Gleichung aufzulösen.

$$\left(1+c\right)^{2\mu+2\mu c-2} \cdot \left(1-c\right)^{2\mu-2\mu c+2} \cdot \frac{2(\mu-\mu c-1)}{2\mu c+1} = \log \gamma$$

Eine Relation die durch Einführung der abkürzenden Bezeichnung:

$$\varphi(\mu) = \frac{2\mu}{2\mu c+1} - 1$$

auch geschrieben werden kann:

$$2\mu \cdot \log \left\{ (1+c)^{(1+c)} (1-c)^{(1-c)} \right\} + 2 \log \left(\frac{1-c}{1+c} \right) + \log \varphi(\mu) = \log \gamma \quad (1)$$

Diese Gleichung ist natürlich im Allgemeinen nur durch indirecte Methoden auflösbar. Besonders wichtig ist die Auflösung von (1) für kleine Werthe von c . Wird aber schon die 3. Potenz von c vernachlässigt, so kann gesetzt werden:

$$\left. \begin{aligned} \log(1+c) &= c + \frac{1}{2}c^2 \\ \log(1-c) &= -c + \frac{1}{2}c^2 \end{aligned} \right\} \log \frac{1+c}{1-c} = 2c$$

u. (1) wird dadurch:

$$2\mu c^2 + \log \varphi(\mu) = \log \gamma + 4c \quad (2)$$

Wird nun weiter angenommen, dass $2\mu c$ keine kleine Zahl ist, so darf gesetzt werden:

$$\varphi(\mu) = \frac{1-c}{c}$$

und dadurch wird die Gleichung (2)

$$(3) \quad 2\mu = \frac{\log \gamma c}{c^2} + \frac{5}{c}$$

die hier vorkommenden Logarithmen sind selbstverständlich natürliche. So gross muss also 2μ gewählt werden, damit die im vorigen Artikel mit Ω bezeichnete Wahrscheinlichkeit

$$> \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

sei. Ω war die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der unter 4μ vorhandenen Fehlern vorkommenden Zeichenwechsel zwischen:

$$2\mu - 2(t-1) \text{ und } 2\mu + 2t$$

liege. Bezeichnen wir allgemein mit w und f die Anzahl der Zeichenwechsel und Zeichenfolgen bei 4μ Elementen, so ist

$$w + f = 4\mu - 1$$

den obigen Grenzen für die Zeichenwechsel entsprechen demnach

$$2\mu + 2t - 3 \text{ und } 2\mu - 2t - 1$$

als Grenzen für die Anzahl der Zeichenfolgen. Es.

ist demnach Ω die Wahrscheinlichkeit für das Bestehen der Ungleichheit:

$$\frac{2\mu - 2t + 2}{2\mu + 2t - 3} < \frac{w}{f} < \frac{2\mu + 2t}{2\mu - 2t - 1}$$

und bei Annahme der schon früher gebrauchten Voraussetzungen, indem $\frac{t}{\mu} = c$ gesetzt wurde:

$$\frac{1-c}{1+c} < \frac{w}{f} < \frac{1+c}{1-c}$$

Es sei z. B. $c = \frac{1}{50}$ und es soll Ω dafür dass die Ungleichheit:

$$\frac{49}{51} < \frac{w}{f} < \frac{51}{49}$$

bestehe grösser als $\frac{1000}{1001}$ sein. Dann ist in der Formel

3) $\gamma = 1000$ zu setzen. Man erhält dadurch:

$$2\mu = 250 + 2500 \log \text{nat } 20 = 7740$$

Auf gleiche Weise ergibt sich wenn $\Omega < \frac{10000}{10001}$ sein soll:

$$2\mu = 13497$$

Es wächst demnach in dem vorliegenden Beispiele 2μ um 5757 wenn die Wahrscheinlichkeit Ω um das zehnfache zunimmt.

7.

Wie schon erwähnt, gelten die im Vorigen erlangten Resultate auch dann wenn n eine ungerade Zahl ist. Wir sehen also, dass allgemein das Verhältniss der Anzahl der Zeichenwechsel zur Anzahl der Zeichenfolgen sich immer mehr der Einheit nähert, je mehr Elemente man zur Abzählung herangezogen hat. Eine Ausgleichung, bei welchen das genannte Verhältniss sich wesentlich von 1 entfernt, wird demnach als ungenügend zu verwerfen sein. Im Vorigen sind zugleich die Hilfsmittel enthalten, durch welche entschieden werden kann, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine Ausgleichung, die für dies Verhältniss $\frac{w}{f}$ einen bestimmten Werth giebt, als die richtige betrachtet werden kann. Ein Beispiel mag dies näher erläutern.

In Nr. 2277 der A. N. giebt Herr Doberck Elemente des Doppelsternes α 3062 nebst den Vergleichen dieser mit den Beobachtungen. Schon der erste Blick auf die dort angegebenen Differenzen zeigt, dass die Ausgleichung, wenn eine solche überhaupt stattgefunden hat, vollständig unzureichend ist. Wir wollen nun die Sachlage mit Hilfe der hier erhaltenen Formeln untersuchen.

Im Ganzen sind 81 Fehler vorhanden. Von diesen haben 40 das positive, 38 das negative Vorzeichen, während 3 Fehler = 0 sind. Die letzteren müssen hier ausgeschlossen werden, da sie ebenso gut als positive wie als negative Fehler betrachtet werden können. Hier ist demnach die Eigenschaft, dass die Anzahl der positiven Fehler gleich ist der Anzahl der negativen so gut wie vollständig vorhanden.

Die Abzählung ergibt nun 22 Zeichenwechsel und 55 Zeichenfolgen. Wir werden also die Genauigkeit der betrachteten Doppelsternelemente gewiss nur überschätzen, wenn wir schliesslich annehmen:

80 Fehler, und zwar 24 Zeichenwechsel, 55 Zeichenfolgen. Es ergibt sich nun mit Hilfe der strengen Formeln 1) und 2) das Art. 5:

Die Wahrscheinlichkeit Ω , dafür, dass die Anzahl der Zeichenwechsel liegen zwischen

$$26 \text{ und } 56$$

ist grösser als $\frac{194}{195}$. Während die Näherungsformeln des Art (6) nicht mehr genügend genau für Ω die Ungleichheit

$$\Omega > \frac{133}{134}$$

ergeben. Es ist also die Wahrscheinlichkeit Ω^1 , dass die Anzahl der Zeichenwechsel entweder < 26 oder > 56 ist

$$\Omega^1 < \frac{1}{195}$$

Und wir werden mit grossem Vortheil nahezu 400 gegen 1 wetten können, dass die Anzahl der Zeichenwechsel nicht kleiner als 26 ist. In Wirklichkeit wird dieser Grenzwert noch viel zu gross und die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Doberck'sche Bahn den Beobachtungen wirklich Genüge leistet, noch viel geringer sein.

8.

Ich habe nun den allgemeinsten Fall, der sich hier darbietet, zu behandeln, wenn nämlich die Anzahl der positiven Fehler von der Anzahl der negativen wesentlich verschieden ist. Es sollen im Folgenden die in Art. (2) u. (3) eingeführten Bezeichnungen beibehalten werden. Wird weiter eingeführt.

$$W_{2x-1} + W_{2x} = W_{2x-\frac{1}{2}}$$

dann giebt die Formel 1 des Art. 2:

$$W_{2x-\frac{1}{2}} = \frac{1.2..n \cdot 1.2..m}{1.2.3 (m+n)} \cdot \frac{n-1..n-2..n-x+1}{1.2..x-1} \cdot \frac{m-1..m-x+1}{1.2..x-1} \cdot \frac{n+m}{x}$$

Ich betrachte nun, ähnlich wie früher, die drei Wahrscheinlichkeiten:

$$L = W_{2k-2t-\frac{1}{2}} \quad W_{2k-\frac{1}{2}} = M \quad W_{2k+2t-\frac{1}{2}} = L'$$

dann wird:

$$\frac{M}{L} = \frac{(n-k+t)(n-k+t-1) \dots (n-k+1)(m-k+t) \dots (m-k+1)}{\{(k-t)(k-t+1) \dots (k-1)\}^2} \cdot \left(\frac{k-t}{h}\right)$$

$$\frac{M}{L'} = \frac{\{(k+t-1)(k+t-2) \dots k\}^2}{(n-k-t+1)(n-k-t+2) \dots (n-k)(m-k-t+1) \dots (m-k)} \cdot \left(\frac{k+t}{k}\right)$$

Es sind darinnen k u. t vorläufig ganz beliebige ganze Zahlen. Unter denselben Bedingungen wie früher, giebt die Anwendung der Stirling'schen Formel:

$$\left. \begin{aligned} \frac{M}{L} &= \frac{k-t}{k} \cdot \frac{(n-k+t)}{n-k+t+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(m-k+t)}{m-k+t+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(n-k)}{n-k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(m-k)}{m-k+\frac{1}{2}} \\ &\quad \cdot \frac{(k-1)}{2k-1} \cdot \frac{(k-t-1)}{-2k+2t+1} \\ \frac{M}{L'} &= \frac{k+t}{k} \cdot \frac{(k+t-1)}{n-k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(k+t-1)}{k+t-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(k-1)}{-n+k+t-\frac{1}{2}} \cdot \frac{(m-k)}{m-k+\frac{1}{2}} \cdot \frac{(m-k-t)}{-m+k+t-\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

Ich setze nun:

$$m = n\rho, \quad t = ny, \quad k = n\sigma$$

dann wird:

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{M}{L} &= \frac{n(\sigma+y)+1 \left(\sigma+y-\frac{1}{n}\right)^{2n(\sigma+y)-1} \left(\sigma-\frac{1}{n}\right)^{-2n\sigma+1} \left(1-\sigma-y-\frac{1}{n}\right)^{n(1-\sigma-y)+\frac{1}{2}} \left(\rho-\sigma-y-\frac{1}{n}\right)^{n(\rho-\sigma-y)+\frac{1}{2}}}{n\sigma \left(1-\sigma\right)^{n(1-\sigma)+\frac{1}{2}} \left(\rho-\sigma\right)^{n(\rho-\sigma)+\frac{1}{2}}} \\ \frac{M}{L'} &= \frac{n(\sigma-y) \left(\sigma-y-\frac{1}{n}\right)^{2n(\sigma-y)-1} \left(\sigma-\frac{1}{n}\right)^{-2n\sigma+1} \left(1-\sigma+y\right)^{n(1-\sigma+y)+\frac{1}{2}} \left(\rho-\sigma+y\right)^{n(\rho-\sigma+y)+\frac{1}{2}}}{n\sigma \left(1-\sigma\right)^{n(1-\sigma)+\frac{1}{2}} \left(\rho-\sigma\right)^{n(\rho-\sigma)+\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right.$$

Man findet nun auf ganz demselben Wege wie in Art. (5), dass die Summe aller Glieder in der Reihe:

$$(3) \quad W_{2-\frac{1}{2}} \cdot W_{2k-2t-\frac{1}{2}} \cdot W_{2k-\frac{1}{2}} \cdot W_{2k+2t-\frac{1}{2}}$$

welche zwischen $W_{2k+2t-\frac{1}{2}}$ u. $W_{2k-\frac{1}{2}}$ stehen, grösser

ist als die Summe aller Glieder rechts von $W_{2k+2t-\frac{1}{2}}$ multipliziert mit dem Factor:

$$a = \frac{M}{L} \cdot \frac{1-\sigma-y}{y}$$

und die Summe aller Glieder zwischen $W_{2k-2t-\frac{1}{2}}$ u.

$W_{2k-\frac{1}{2}}$ grösser als die Summe der Glieder links von

$W_{2k-2t-\frac{1}{2}}$ multipliziert mit dem Factor:

$$a' = \frac{M}{L} \cdot \frac{\sigma-y}{y}$$

Ist nun a die grössere der beiden so bestimmten Zahlen, so ergibt sich, wie früher:

$$\Omega > \frac{a}{1+a}$$

wo Ω die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass die Anzahl der Zeichenwechsel innerhalb der Grenzen:

$$2k-2t-1 \text{ und } 2k+2t \text{ liegt.}$$

Wir haben nun wieder nachzuweisen, dass Ω beliebig nahe der Einheit gebracht werden, oder dass also a einer beliebig grossen und willkürlichen Constanten γ gleich gesetzt werden kann.

9.

Dies wird sich aber nur dann nachweisen lassen, wenn die einzelnen Glieder der Reihe (3) des vorigen Artikels,

die in Art. (4) erwähnten Eigenschaften haben und wenn für $W_2 k - \frac{1}{2}$ das Maximalglied genommen wird. Das Stattfinden dieser Voraussetzungen ergibt sich aber sofort aus der Gleichung:

$$\frac{W_{2x-\frac{1}{2}}}{W_{2(x-1)-\frac{1}{2}}} = \frac{(n-x+1)(m-x+1)}{x \cdot x-1}$$

die einzelnen W wachsen also, zuerst schneller dann langsamer bis zu einem Maximalgliede $W_{2k-\frac{1}{2}}$ von welchem sie zuerst wieder langsamer, dann schneller abzunehmen beginnen. k ist dabei diejenige ganze Zahl, welche dem Bruche:

$$\frac{m \cdot n}{m+n+1} + 1$$

unmittelbar vorhergeht. Da m und n beide sehr gross sein sollen, ausserdem die Formeln (2) noch berechnet werden können, wenn e wie σ keine ganze Zahl mehr ist, so wollen wir einfach setzen:

$$k = \frac{m \cdot n}{m+n}$$

also:

$\sigma = \frac{e}{1+e}$; wo wie schon bemerkt, $e = \frac{m}{n}$ also > 1 ist. Dieser Werth für σ ist in Formel (2) des vorigen Art. einzusetzen. Wenn nun weiter an der Kleinheit von $\frac{1}{n}$ festgehalten und angenommen wird, dass t gegen n ebenfalls klein also y ein sehr kleiner Bruch sein wird so wird man durch Logarithmiren und darauf folgende Entwicklung der Logarithmen nach Potenzen der kleinen Grösse y zu folgenden Formeln gelangen:

1) Indem man $a=y$ setzt und also die erste Formel, (2) in Anwendung bringt:

$$n = \frac{2e^2}{(1+e)^3} \frac{\log(1+e) \gamma y}{y^2} + \frac{1}{y} \frac{1}{(e+1)^2} (3e^2+1)$$

2) Indem $a' = \log y$ gesetzt wird aus der 2. Gleichung (2)

$$n = \frac{2e^2}{(1+e)^3} \frac{\log\left(\frac{1+e}{e}\right) \gamma y}{y^2} - y \frac{(1-e)^2}{(1+e)^2}$$

Die beiden Werthe von n weichen nicht unwesentlich von einander ab, was indess vollständig erklärlich ist, weil die Reihe der W nicht symmetrisch in Bezug auf das Maximalglied gebildet ist. Nehmen wir den grösseren Werth für n als den richtigen, also:

$$(I) \quad n = \frac{2e^2}{(1+e)^3} \frac{\log(1+e) \gamma y}{y^2} + \frac{1}{y} \frac{1}{(e+1)^2} (3e^2+1)$$

so wird jedenfalls

$$\Omega < \frac{\gamma}{1+\gamma}$$

und Ω ist die Wahrscheinlichkeit dass die Anzahl der Zeichenwechsel liegt zwischen

$$2k-2t+1 \text{ und } 2k+2t$$

oder:

$$2n\sigma-2y+1 \text{ und } 2n\sigma+2y+1$$

Man kann also durch Vergrösserung von n die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der Zeichenwechsel sich beliebig wenig von $2n\sigma$ oder also von der dem Bruche $\frac{2mn}{m+n}$ unmittelbar vorangehenden ganzen Zahl unterscheidet, beliebig nahe der Gewissheit bringen. Die gewonnene Formel (I) stimmt übrigens mit Formel (3) des Art. (6) genügend überein. Man hat nämlich in (I) $e=1$ und $y=\frac{c}{2}$ zu setzen. Dann wird, da $n=2\mu$ war:

$$2\mu = \frac{\log \gamma c}{c^2} + \frac{2}{c}$$

also bis auf das zweite im Vergleich zum ersten Gliede sehr kleine Glied vollständig übereinstimmend mit der genannten Formel. Diese Differenz ist aber ebenfalls in der Natur der Sache begründet.

Leipzig, den 15. October 1879. *Hugo Seeliger.*

Schreiben des Herrn W. Tempel an den Herausgeber.

Ich habe den ζ II 1867 nur noch am 7. und 8. Juli wie folgt beobachtet:

1879	Mittl. Zeit Arcetri	$(\zeta - *)$ $\Delta \alpha$ $\Delta \delta$		Scheinbare RA. ζ	Scheinbare Decl. ζ	Anzahl der Vergl.	Vergl. *
7. Juli	9h44m54s	0m35s59	+ 1' 7"6	16h28m	-25°	4.4	(?)
7. „	10.14.51	+ 0.45.25	+ 0.25.4	16.28.59.41	-25.12' 23"0	3	p

Scheinbare Oerter der Vergleichsterne:

{ p. 13m $\alpha=16^h28^m14^s16$ $\delta=-25^\circ12'48''4$ } Gemess Diff.: $-0^m20^s09 - 4'55''0$
{ angeschlossen an Arg. O. 15754-55 $\alpha=16.28.34.26$ $\delta=-25.7.53.4$ }