**VI. Ueber die Herleitung der Krystallsysteme
aus der Theorie der Elasticität;
von Hermann Aron.**

Die Discussion der Gleichungen der Elasticität mit Rücksicht auf die möglichen Symmetrieebenen ist bisher in vollständiger Weise noch nicht durchgeführt worden. Das Vollständigste darüber hat bisher Hr. Kirchhoff in der 27. Vorlesung seiner Mechanik § I gegeben, sich aber dabei doch beschränkt auf die Fälle, wo die Symmetrieebenen zu einander senkrecht liegen. Hier soll von jeder beschränkenden Annahme über die Lage der Symmetrieebenen abgesehen werden, um alle möglichen Fälle zu erhalten.

Die homogene Function zweiten Grades, welche die Arbeit bei elastischen Deformationen eines krystallinischen Mittels darstellt, habe die Form:

$$\begin{aligned}
 f = & c_{11}x_x^2 + 2c_{12}x_xy_y + 2c_{13}x_xz_z + 2c_{14}x_xy_z + 2c_{15}x_xz_x + 2c_{16}x_xy_y \\
 & + c_{22}y_y^2 + 2c_{23}y_yz_z + 2c_{24}y_yy_z + 2c_{25}y_yz_x + 2c_{26}y_yx_y \\
 & \quad + c_{33}z_z^2 + 2c_{34}z_zy_z + 2c_{35}z_zz_x + 2c_{36}z_zx_y \\
 & \quad + c_{44}y_z^2 + 2c_{45}y_zz_x + 2c_{46}y_zx_y \\
 & \quad + c_{55}z_x^2 + 2c_{56}z_xx_y \\
 & \quad + c_{66}x_y^2.
 \end{aligned}$$

Hierin ist, wenn u, v, w die Verschiebungen im Punkte x, y, z darstellen:

$$\begin{aligned}
 x_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & y_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & z_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 y_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) & z_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & x_y &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right).
 \end{aligned}$$

Die letzten drei Grössen unterscheiden sich aus einem später anzugebenden Grunde um den Factor $\frac{1}{2}$ von der üblichen ihnen gegebenen Bedeutung.

Im allgemeinsten Falle bestehen für die Grössen c_{11} etc. keine speciellen Werthe; es entspricht dies dem am wenigsten regelmässigen Krystallsystem, dem asymmetrischen System.

Besteht dagegen eine Ebene der Symmetrie, und wählen

wir diese zur xz -Ebene, so müssen eine Anzahl der Coëfficienten c verschwinden¹⁾, nämlich:

$$\begin{array}{cccc} c_{14} = 0 & c_{24} = 0 & c_{34} = 0 & c_{45} = 0 \\ c_{16} = 0 & c_{26} = 0 & c_{36} = 0 & c_{56} = 0. \end{array}$$

Es entspricht dies dem monosymmetrischen System. Dafür wird also der Ausdruck der Arbeit:

$$\begin{aligned} f = & c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + 2c_{13}xz + 2c_{15}xz \\ & + c_{22}y^2 + 2c_{23}yz + 2c_{25}yz \\ & + c_{33}z^2 + 2c_{35}z^2 \\ & + c_{44}y^2 + 2c_{46}yz \\ & + c_{55}z^2 + c_{66}xy^2. \end{aligned}$$

Hat das System noch eine Ebene der Symmetrie, so nehmen wir die Schnittlinie dieser mit der ersteren zur z -Axe und verlegen das Coordinatensystem durch Drehung um diese Axe, sodass die neue Ebene der Symmetrie zur neuen xz -Ebene wird.

Betrachten wir zu diesem Zweck die Transformation der Function f durch eine allgemeine Coordinatenverlegung: die neuen Coordinaten bilden mit den alten die Winkel, deren Richtungscosinus:

$$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \quad \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, \quad \alpha_3, \beta_3, \gamma_3,$$

seien; die Grössen x, y etc. sollen nach ihrer Transformation durch x', y' etc. bezeichnet werden, dann ist²⁾:

$x = \alpha_1^2 x' + \alpha_2^2 y' + \alpha_3^2 z' + 2\alpha_2\alpha_3 y'z' + 2\alpha_3\alpha_1 z'x' + 2\alpha_1\alpha_2 x'y'$; y und z erhält man, wenn man β , resp. γ an Stelle von α setzt:

$$\begin{aligned} y = & \beta_1\gamma_1 x' + \beta_2\gamma_2 y' + \beta_3\gamma_3 z' \\ & + (\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2)y'z' + (\beta_3\gamma_1 + \beta_1\gamma_3)z'x' + (\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1)x'y', \end{aligned}$$

z und x werden daraus erhalten, wenn man γ und α , resp. α und β an Stelle von β und γ setzt.

Bei der Bedeutung, die wir hier den Zeichen y, z und x gegeben haben, bleiben auch die Formeln für die Coordinatenverlegung unverändert, wenn wir an Stelle der Dilatationen $x, y, \dots, x', y', \dots$, die Spannungen $X, Y, \dots, X', Y', \dots$ setzen, sodass alle Beziehungen, die wir aus ihnen wegen der Symmetrie

1) Siehe Kirchhoff, Mechanik, I. c.

2) Siehe Lamé, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides, deuxième édition Nr. 18.

der Körper für die Coëfficienten der Werth x_x etc. im Ausdrucke der Arbeit herleiten werden, auch noch für die entsprechenden Coëfficienten der homogenen Function zweiten Grades, die die Arbeit durch die Grössen X_x etc. darstellt, bestehen bleiben. Nehmen wir nun eine Drehung der Coordinaten um die z -Axe um den Winkel φ im positiven Sinne vor und setzen $\cos \varphi = a$, $\sin \varphi = b$, so ist:

$$\begin{aligned} x_x &= a^2 x_x + b^2 y_y' - 2ab x_y' & y_z &= a y_z' + b z_x' \\ y_y &= b^2 x_x' + a^2 y_y' + 2ab x_y' & z_x &= -b y_z' + a z_x' \\ z_z &= z_z' & x_y &= ab x_x' - ab y_y' + (a^2 - b^2) x_y'; \end{aligned}$$

Setzen wir diese Werthe in den Ausdruck für f ein, so erhält man:

$$f = c_{11}' x_x'^2 + 2c_{12}' x_x' y_y' + \dots + c_{22}' y_y'^2 + \dots$$

Hierin ist:

$$\begin{aligned} c_{11}' &= c_{11} a^4 + 2c_{12} a^2 b^2 + c_{22} b^4 + c_{66} a^2 b^2 \\ c_{12}' &= c_{11} a^2 b^2 + c_{12} (a^4 + b^4) + c_{22} a^2 b^2 - c_{66} a^2 b^2 \\ c_{13}' &= c_{13} a^2 + c_{23} b^2 \\ c_{14}' &= -c_{15} a^2 b - c_{25} b^3 + c_{46} a^2 b \\ c_{15}' &= c_{15} a^3 + c_{25} a b^2 + c_{46} a b^2 \\ c_{16}' &= -2c_{11} a^3 b + 2c_{12} a b (a^2 - b^2) + 2c_{22} a b^3 + c_{66} a b (a^2 - b^2) \\ c_{22}' &= c_{11} b^4 + 2c_{12} a^2 b^2 + c_{22} a^4 + c_{66} a^2 b^2 \\ c_{23}' &= c_{13} b^2 + c_{23} a^2 \\ c_{24}' &= -c_{15} b^3 - c_{25} a^2 b - c_{46} a^2 b \\ c_{25}' &= c_{15} a b^2 + c_{25} a^3 - c_{46} a b^2 \\ c_{26}' &= -2c_{11} a b^3 - 2c_{12} a b (a^2 - b^2) + 2c_{22} a^3 b - c_{66} a b (a^2 - b^2) \\ c_{33}' &= c_{33} \\ c_{34}' &= -c_{35} b \\ c_{35}' &= c_{35} a \\ c_{36}' &= -c_{13} a b + c_{23} a b \\ c_{44}' &= c_{44} a^2 + c_{55} b^2 \\ c_{45}' &= c_{44} a b - c_{55} a b \\ c_{46}' &= 2c_{15} a b^2 - 2c_{25} a b^2 + c_{46} a (a^2 - b^2) \\ c_{55}' &= c_{44} b^2 + c_{55} a^2 \\ c_{56}' &= -2c_{15} a^2 b + 2c_{25} a^2 b + c_{46} b (a^2 - b^2) \\ c_{66}' &= 4c_{11} a^2 b^2 - 8c_{12} a^2 b^2 + 4c_{22} a^2 b^2 + c_{66} (a^2 - b^2)^2. \end{aligned}$$

Nehmen wir nun eine solche Drehung vor, wie wir sie beabsichtigt haben, dass nämlich die neue xz -Ebene in die neue Symmetrieebene fällt, so muss nun wieder:

$$\begin{array}{cccc} c_{14}' = 0 & c_{24}' = 0 & c_{34}' = 0 & c_{45}' = 0 \\ c_{16}' = 0 & c_{26}' = 0 & c_{36}' = 0 & c_{46}' = 0 \end{array} \text{ sein.}$$

Dies ergibt acht Bedingungen, welche unter den Grössen c_{11} etc., resp. a und b bestehen müssen, und die wir nun entwickeln wollen.

1) Aus $c_{34}' = 0$ folgt $c_{35}' = 0$; wir könnten auch daraus folgern $b = 0$, aber dieser Fall kommt hier nicht in Frage, weil dies nur heissen würde, dass die neue Symmetrieebene wieder die ursprüngliche ist, während wir die Bedingungen der Existenz einer von der ersten verschiedenen untersuchen wollen. Von diesem Fall können wir also sowohl hier wie im folgenden absehen.

2) Wegen $c_{14}' = 0$ und $c_{24}' = 0$ folgt $c_{15} = -c_{25} = D$.

3) Wegen $c_{14}' = 0$, $c_{56}' = 0$ und $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$ folgt $c_{46} = -2D$.

4) Wegen $c_{14}' = 0$, $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$, $c_{46} = -2D$ folgt $D(3a^2 - b^2) = 0$.

Daher entweder $\alpha)$ $D = 0$ oder $\beta)$ $3a^2 - b^2 = 0$.

5) Wegen $c_{36}' = 0$ folgt entweder $\alpha)$ $c_{13} = c_{23} = C$ oder $\beta)$ $a = 0$.

6) Wegen $c_{45}' = 0$ folgt entweder $\alpha)$ $c_{44} = c_{55} = B$ oder $\beta)$ $a = 0$.

7) Aus $c_{16}' = 0$, $c_{26}' = 0$, also $c_{16}' + c_{26}' = 0$, folgt entweder $\alpha)$ $c_{11} = c_{22} = A$ oder $\beta)$ $a = 0$.

8) Aus $c_{16}' - c_{26}' = 0$ folgt $(c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66})ab(a^2 - b^2) = 0$, also entweder $\alpha)$ $c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66} = 0$ oder $\beta)$ $a = 0$ oder $\gamma)$ $a^2 = b^2$.

Haben nun a und b keinen der speciellen in diesen Gleichungen unter $\beta)$ und $\gamma)$ bezeichneten Werthe, so müssen, damit eine zweite Ebene der Symmetrie besteht, folgende Gleichungen bestehen.

1) $c_{35} = 0$ 2) $c_{15} = D$, $c_{25} = -D$ 3) $c_{46} = -2D$ 4) $D = 0$

5) $c_{13} = c_{23} = C$ 6) $c_{44} = c_{55} = B$ 7) $c_{11} = c_{22} = A$ 8) $2A = 2c_{12} + c_{66}$.

Setzt man noch $c_{33} = A'$, $c_{66} = B'$, $c_{12} = C'$, bildet die Werthe für c_{11}' und setzt sie in den Ausdruck für die Arbeit ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} f = & A(x_x'^2 + y_y'^2) + A'z_z'^2 + B(y_z'^2 + z_x'^2) \\ & + B'x_y'^2 + 2C(y_y'z_z' + z_z'x_x') + 2C'x_x'y_y'. \end{aligned}$$

18*

Ausserdem besteht die Beziehung $2A = B' + 2C'$.

Die Coëfficienten hängen nun überhaupt nicht mehr von der Lage der Coordinaten ab, der Körper ist also um die z -Axe isotrop. Er ist völlig isotrop, wenn noch $A = A'$ $B = B'$ $C = C'$ ist.

Eine zweite Ebene der Symmetrie bedingt also im allgemeinen Isotropie rings um die Schnittlinie beider Symmetrieebenen; es sei denn, dass die Lage der zweiten Ebene gegen die erste die speciellen Werthe hat, welche den Bedingungen unter β) und γ) genügen; diese Fälle wollen wir jetzt discutiren. Es sei zunächst $a = 0$. Es sind alsdann die beiden Symmetrieebenen senkrecht zu einander, und die acht Bedingungsgleichungen werden durch folgende Werthe befriedigt.

$$\begin{array}{llll} 1) c_{35} = 0 & 2) c_{15} = D, c_{25} = -D & 3) c_{46} = -2D \\ 4) D = 0 & 5) a = 0 & 6) a = 0 & 7) a = 0 \quad 8) a = 0. \end{array}$$

Es ist daher:

$$f = c_{11}x^2 + c_{22}y^2 + c_{33}z^2 + c_{44}yz^2 + c_{55}zx^2 + c_{66}xy^2 \\ + 2c_{13}xxyy + 2c_{13}xxz_z + 2c_{23}yyz_z,$$

daraus folgt, dass zwei zu einander senkrechte Ebenen der Symmetrie noch eine dritte zu beiden senkrecht Ebenen der Symmetrie bedingen¹⁾, es entspricht dies dem rhombischen System.

Die acht Bedingungsgleichungen für eine zweite Symmetrieebene können aber noch durch folgende Annahmen befriedigt werden:

$$\begin{array}{llll} 1) c_{35} = 0 & 2) c_{15} = D, c_{25} = -D & 3) c_{46} = -2D & 4) D = 0 \\ 5) c_{13} = c_{23} = C & 6) c_{44} = c_{55} = B & 7) c_{11} = c_{22} = A & 8) a^2 = b^2. \end{array}$$

Diese letztere Bedingung acht erfordert eine Symmetrieebene unter $\pm 45^\circ$. In diesem Falle ist:

$$f = Ax^2 + Ay^2 + c_{33}z^2 + By_z^2 + Bz_x^2 + c_{66}xy^2 \\ + 2c_{13}xxyy + 2Cxxz_z + 2Cy_yz_z.$$

Es ist der Ausdruck von derselben Form wie für das vorige System, somit ist durch eine Symmetrieebene unter 45° gegen die xz -Ebene die yz -Ebene als Ebene der Symmetrie bedingt, aber der obige Ausdruck für die Arbeit

1) Siehe Kirchhoff, l. c.

ändert sich nicht, wenn man x mit y vertauscht, es ist also die xz -Ebene mit der yz -Ebene gleichartig; zwischen ihnen, ebenfalls durch die z -Axe gehend, liegen zwei Ebenen der Symmetrie, unter 45° gegen die Coordinatenebenen, das System hat eine Hauptaxe. Es entspricht dies dem tetragonalen System.

Ist ausserdem in dem obigen Ausdruck:

$$c_{33} = A \quad c_{66} = B \quad c_{12} = C,$$

so geht der Ausdruck für die Arbeit über in:

$$f = A(x^2 + y^2 + z^2) + B(yz^2 + zx^2 + xy^2) + 2C(yyz_x + zzx_x + xxy_y).$$

Da nun der Körper in Bezug auf die drei Coordinatenachsen sich gleich verhält, so bestehen drei zu einander senkrechte Ebenen der Symmetrie mit drei Hauptaxen, durch welche je zwei Ebenen der Symmetrie unter 45° gegen je zwei der Hauptsymmetrieebenen gehen, dies entspricht dem regulären System.

Es können aber schliesslich die acht Bedingungsgleichungen für eine zweite Symmetrieebene noch erfüllt werden durch folgende Annahmen:

$$\begin{array}{lll} 1) \ c_{35} = 0 & 2) \ c_{15} = D \ c_{25} = -D & 3) \ c_{46} = -2D \\ 4) \ 3a^2 - b^2 = 0 & 5) \ c_{13} = c_{23} = C & 6) \ c_{44} = c_{55} = B \\ 7) \ c_{11} = c_{22} = A & 8) \ c_{11} + c_{22} - 2c_{12} - c_{66} = 0. \end{array}$$

Die Bedingung $3a^2 - b^2 = 0$ bedingt Ebenen der Symmetrie unter $n \cdot 60^\circ$ gegen die erste, wo n eine ganze positive oder negative Zahl ist. Es entspricht dies dem hexagonalen System.

Setzt man $c_{33} = A' \quad c_{66} = B' \quad c_{12} = C'$ und bildet die Werthe c_{11}' , c_{22}' etc. bezogen auf irgend ein System der Coordinaten, das gegen das ursprüngliche um den Winkel φ um die z -Axe gedreht ist, so erhält man, bezogen auf dieses Coordinatensystem, den Ausdruck für die Arbeit:

$$\begin{aligned} f = & Ax_x'^2 + Ay_y'^2 + A'z_z'^2 \\ & + By_z'^2 + Bz_x'^2 + B'y_y'^2 \\ & + 2Cy_y'z_z' + 2Cz_x'x_x' + 2C'x_x'y_y' \\ & - 2Db(3a^2 - b^2)(x_x'y_z' - y_y'z_z' + 2z_x'x_y') \\ & + 2Da(a^2 - 3b^2)(x_x'z_x' - y_y'z_x' - 2y_z'x_y'), \end{aligned}$$

wobei noch die Bedingung besteht: $2A = B' + 2C'$.

Für $b = 0$ oder $3a^2 - b^2 = 0$ bestehen Symmetrieebenen, aber es sind nicht alle gleichwerthige Symmetrieebenen, denn für ein geradzahliges Vielfach von 60° ist $a(a^2 - 3b^2) = 1$ und für ein ungeradzahliges ist $a^2(a^2 - 3b^2) = -1$.

Eine Drehung um 60° hat denselben Einfluss, wie eine um 180° , als ob man also für x und y , resp. $-x$ und $-y$ setzt, dagegen ändert eine Drehung um 120° den Werth der Arbeit nicht. Somit bestehen gleichwerthige Ebenen der Symmetrie nur unter 120° ; dies ist aber nur der Fall bei hemiëdrischen und tetartoëdrischen Formen des hexagonalen Systems¹⁾, die holoëdrischen dagegen verlangen gleichwerthige Ebenen unter 60° , also muss für sie $D = 0$ sein, daraus folgt aber, dass die holoëdrischen Formen des hexagonalen Systems sich hinsichtlich jeder Art der Elasticität isotrop rings um die Hauptaxe verhalten müssen und also in gewisser Beziehung sich einfacher als das reguläre System verhalten.

Dies mag die Thatsache erklären, die Naumann in seinem Buch „Elemente der Mineralogie“ § 36 so ausdrückt: „Es gibt verhältnissmässig nicht sehr viele hexagonale Mineralspecies, welche vollkommen holoëdrisch krystallisiren, denn selbst der Quarz und Apatit sind eigentlich, jener als eine tetartoëdrische, dieser als eine hemiëdrische Species zu betrachten, obgleich ihre gewöhnlichen Combinationen von holoëdrischen nicht unterschieden werden können;“ und an einer folgenden Stelle: „Allein die schon am gemeinen Quarz nicht seltene, am genannten Bergkrystall aber sehr gewöhnliche unvollkommene Ausbildung der hexagonalen Pyramide mit nur sechs (drei oberen und drei unteren) abwechselnden Flächen verkündet uns das Walten eines eigenthümlichen Bildungsgesetzes, kraft dessen diese Pyramide nur als ein Rhomboëder erscheint etc.“

Dieses eigenthümliche Bildungsgesetz erscheint uns aber vom Standpunkt der entwickelten Theorie der elastischen Verhältnisse gerade als das zu erwartende, während die holoëdrischen Formen von diesem Standpunkt viel merkwürdiger erscheinen. Wir sehen somit in der Untersuchung

1) Vgl. P. Groth, Physikal. Krystallographie. Leipzig 1876. p. 336.

des elastischen Verhaltens ein Mittel, auch die Formen, die äusserlich von holoëdrischen nicht unterschieden werden können, von solchen zu unterscheiden, und es scheint gewiss die Frage interessant, ob diejenigen Mineralien, die man bisher als holoëdrische ansah, sich auch durch ihr elastisches Verhalten als solche erweisen.

Schliesslich will ich bemerken, dass man, insbesondere mit Hülfe des hier bewiesenen Satzes: Zwei Symmetrieebenen können sich nur unter 90° , unter 45° oder 60° , resp. deren ganzzahligen Multiplen schneiden, auch umgekehrt beweisen kann, dass keine anderen als die entwickelten Krystallssysteme existiren können.

Berlin, im Juni 1883.

VII. *Ueber das Verhalten des Benzins als Isolator und als Rückstandsbildner;*
von Heinrich Hertz.

(Hierzu Taf. I Fig. 5–6.)

Die Herren Rowland und Nichols¹⁾ haben gezeigt, dass in gewissen isolirenden Krystallen die dielectrische Polarisation nicht von electricischer Nachwirkung oder Rückstandsbildung begleitet ist; sie haben dieses Resultat gedeutet als günstig für diejenige Ansicht, nach welcher die Rückstandsbildung überhaupt nur eine nothwendige Folge mangelhafter Homogeneität der Isolatoren darstellt. Vor einigen Jahren hatte ich in dem Wunsche, Rückstandsbildung in einem sicher homogenen Leiter nachzuweisen, verschiedene Flüssigkeiten darauf hin geprüft. Die meisten derselben erwiesen sich als viel zu gut leitend für solche Versuche, das käufliche reine Benzin aber zeigte hinreichenden Widerstand und liess gleichzeitig einen nicht unbedeutlichen Rückstand bemerken. Bei näherer Untersuchung ergab sich dann das im Folgenden beschriebene eigenthümliche Verhalten des Benzins, welches wohl in gleicher Weise wie das Verhalten der Krystalle ausgelegt werden kann. Ich

1) H. A. Rowland und E. H. Nichols, Phil. Mag. (5) 11. p. 414. 1881.