APPLICAZIONE DELLA GEOMETRIA SOPRA UNA CURVA ALLA DIMOSTRAZIONE DI UN TEOREMA DI GEISER.

Nota di **Eugenio Bertini** (Pisa).

Adunanza del 27 febbrajo 1910.

Il teorema di GEISER, che qui si deduce in modo assai semplice da alcuni teoremi generali di geometria sopra una curva, è il seguente:

Ogni curva piana di 4° ordine e di genere 3 si può ottenere come contorno apparente, sul piano della curva, di una superficie di 3° ordine, ossia come traccia sul piano stesso del cono circoscritto a questa superficie da un suo punto ¹⁾.

Nei n° 1, 2 si dimostra una proprietà che discende facilmente dal cosidetto teorema di riduzione ²⁾ e che forse non era stata esplicitamente osservata, e nei n° 3, 4 se ne trae il detto teorema di GEISER.

1. Sia C_n una curva normale di S_r di ordine n e genere p . Se la serie g_n^r segnata sopra C_n dagli iperpiani di S_r è non speciale, o, come dicesi, C_n è non speciale, per il ricordato teorema di riduzione, aggiungendo alla g_n^r un punto qualunque P_i si ha una serie incompleta, e quindi C_n è proiezione di una C_{n+1} di S_{r+1} da un suo punto semplice P , la tangente in P avendo per traccia P_i ³⁾. Ciò è ancor vero se C_n è speciale, purchè i gruppi canonici contenenti un gruppo di g_n^r passino tutti per qualche altro punto P_i di C_n . Ma, se ciò non avviene, qualunque punto P_i si aggiunga alla detta g_n^r , la serie $g_{n+1}^r = g_n^r + P_i$ è completa. Se non che, a questa g_{n+1}^r si può applicare di nuovo la considerazione precedente, cioè, se è speciale, considerare i gruppi canonici che passano per un suo gruppo, la cui infinità sarà inferiore di 1 a quella dei gruppi canonici passanti per un gruppo di g_n^r , e verificare se quei gruppi hanno qualche punto comune. Se non l'hanno, aggiungendo un qualunque punto P_2 , si ha ancora in

¹⁾ GEISER, *Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades* [Mathematische Annalen, t. I (1869), pp. 129-138].

²⁾ Cfr.: a) SEGRE, *Introduzione alla geometria sopra un ente algebrico semplicemente infinito* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie II, t. XXII (1894), pp. 41-142], n° 86; b) BERTINI, *La geometria delle serie lineari sopra una curva piana secondo il metodo algebrico* [Ibid., serie II, t. XXII (1894), pp. 1-40], n° 20 e 27; c) SEVERI, *Lezioni di Geometria Algebrica* (Padova, Angelo Draghi, 1908), n° 45.

³⁾ Cfr. SEGRE, loc. cit. ²⁾ a, n° 86.

$g_{n+2}^r = g_n^r + P_1 + P_2$ una serie completa. E così si può continuare; ma si arriverà in fine ad una serie

$$g_{n+k-1}^r = g_n^r + P_1 + P_2 + \dots + P_{k-1}$$

completa, tale che, o per un suo gruppo non passa alcun gruppo canonico o quelli che vi passano hanno tutti (almeno) un punto P_k comune. In amendue i casi (nel primo P_k essendo preso arbitrariamente), la serie

$$g_{n+k}^r = g_n^r + P_1 + P_2 + \dots + P_k$$

è incompleta e però contenuta in una g_{n+k}^{r+1} completa (giacchè la sua residua rispetto a P_k è la g_{n+k-1}^r). È chiaro che, rispetto alla serie g_{n+k}^{r+1} il gruppo dei punti $P_1, P_2, \dots, P_k$ è un gruppo neutro, di grado di neutralità 1 (cioè presentante una sola condizione ai gruppi della serie) ed inoltre che la serie stessa non ha punti fissi, nè è composta. La sua immagine è adunque una C_{n+k} di S_{r+1} con punto k^{uplo} e si può costruirla così che abbia proprio per proiezione (biunivoca) la C_n . Si ha quindi la proprietà: *Ogni C_n normale di S_r è proiezione di una C_{n+k} normale di S_{r+1} da un suo punto k^{uplo} ($k \geq 1$). Le k tangenti nel punto k^{uplo} hanno per traccia i k punti $P_1, P_2, \dots, P_k$.*

2. Suppongasì che g_n^r sia speciale e indichisi con i il suo indice di specialità: questo si potrà anche dire *indice di specialità della stessa C_n* . Se gli ∞^{i-1} gruppi canonici passanti per un gruppo G di g_n^r hanno altri punti comuni e aggiungiamo uno di questi a G , si ha, come dicemmo nel n° 1, una serie incompleta, ma se aggiungiamo invece un punto P_i diverso da quelli si ha una serie completa speciale. Così si ha pure una serie completa speciale aggiungendo un altro punto P_2 diverso dagli ulteriori punti che abbiano eventualmente a comune i gruppi canonici passanti per G e P_1 : e così si può continuare, fino a che si giunge ad una

$$g_{n+i-1}^r = g_n^r + P_1 + \dots + P_{i-1}$$

completa speciale e tale che per un suo gruppo passa un solo gruppo canonico. Aggiungendo un nuovo punto P_i , diverso dagli eventuali punti di questo gruppo esterni a quello, si ha una

$$g_{n+i}^r = g_n^r + P_1 + \dots + P_{i-1} + P_i$$

completa non speciale e quindi, aggiungendo un nuovo punto P_{i+1} qualsiasi, si ha una serie incompleta $g_n^r + P_1 + \dots + P_{i+1}$ contenuta in una serie completa non speciale g_{n+i+1}^{r+1} . Se ne conclude in modo analogo al n° 1 che:

Una curva normale C_n di S_r , di indice di specialità i , è proiezione di una curva normale non speciale C_{n+i+1} di S_{r+1} da un suo punto $(i+1)^{\text{uplo}}$.

Si è enunciato il teorema senza distinguere se C_n sia speciale o no, perchè, se non è speciale, cioè $i = 0$, la proprietà è quella ricordata al principio del n° 1. Anzi, applicando tale proprietà successivamente, è manifesto che *una curva normale non speciale C_n di S_r è sempre proiezione di una curva normale non speciale $C_{n+\theta}$ di $S_{r+\theta}$ da un $S_{\theta-1}$, qualsiasi $\theta (\geq 1)$.*

È pure ovvio che per una C_n , (non normale) di S_r , la quale sia proiezione di una C_n normale di S_r da un $S_{r-r'-1}$ valgono le proposizioni precedenti e quella del n° 1,

soltanto assumendo per spazi di proiezione rispettivamente spazi $S_{r-r'}$, $S_{r-r'+\theta-1}$, passanti rispettivamente per gli spazi di proiezione ivi indicati.

Infine si noti che nella proposizione del n° 1 si ha $k \leq i+1$ e che il più piccolo valore di k , quando C_n è speciale, si può fissare nei singoli casi in base alle considerazioni fatte in quel n°. Così una curva piana di 6° ordine C_6 con un punto triplo e due punti doppi ($p=5$) è proiezione di una C_7 speciale di S_3 da un suo punto semplice, per il teorema del n° 1 4), ed è proiezione di una C_8 non speciale di S_3 da un suo punto doppio per il teorema di questo n°.

3. Considerisi ora una C_4 piana di genere 3. La sua serie canonica, che è la g_4^2 segnata dalle rette del piano, accresciuta di un punto qualunque P_1 , dà una serie

$$g_5^2 = g_4^2 + P_1$$

completa non speciale: cosicchè, aggiungendo un nuovo punto qualunque P_2 , la

$$g_6^2 = g_5^2 + P_1 + P_2$$

è incompleta e contenuta in una serie completa g_6^3 . Si ha adunque (n° 2) che la C_4 è proiezione di una C_6 di S_3 , avente punto doppio P , da questo punto. La C_6 è l'immagine della g_6^3 segnata su C_4 dalle coniche per i punti P_3 , P_4 in cui la retta P_1P_2 sega ulteriormente la C_4 stessa (per il teorema del Resto).

La detta C_6 giace sopra una quadrica Σ_2 , perchè le quadriche di S_3 passanti per il suo punto doppio P segnano su C_6 una g_{10} , non speciale, che può essere quindi al più di dimensione 7. Anzi, potendo passare per C_6 una sola quadrica, si vede che la detta serie è precisamente una g_{10}^7 . Siccome poi nella proiezione stereografica di Σ_2 da P i punti P_1 , P_2 corrispondono alle direzioni di C_6 uscenti da P , saranno P_3 , P_4 i punti fondamentali della detta proiezione stereografica, cioè PP_3 , PP_4 generatrici di Σ_2 .

Per la stessa C_6 passano ∞^4 superficie di 3° ordine Σ_3 (almeno), perchè quelle che passano per il punto doppio segnano una g_{16} non speciale e quindi di dimensione 13 (al più).

4. Si prendano P_1 , P_2 nei punti di contatto di una tangente doppia di C_4 : onde P_3 , P_4 cadono negli stessi punti. Allora le tangenti alla C_6 , che ne risulta, nel suo punto doppio P , sono le generatrici di Σ_2 passanti per P , e quindi sono anche le rette osculatrici di ogni Σ_3 (passante per C_6), perchè un piano variabile intorno ad una di esse sega Σ_3 in una cubica passante per i 6 punti in cui il piano taglia C_6 : ma di questi, tre cadono in P sulla retta stessa (e gli altri tre sull'altra retta che forma con essa l'intersezione del piano con Σ_2); e però, etc.

Ora si afferma che fra le infinite Σ_3 suddette si può scegliere una rispetto a cui Σ_2 sia quadrica polare di P , cosicchè allora C_6 sarà curva di contatto del cono circoscritto a quella Σ_3 da P , e il teorema di GEISER sarà dimostrato. In vero, si prendano su C_6 quattro punti generici (e basta che non sieno in un piano) e si determini una

4) Riapplicando questo stesso teorema alla C_7 si trova che C_6 è proiezione di una C_8 (canonica) di S_4 da una sua corda.

Σ_3 imponendo le ulteriori condizioni che essa abbia in ciascuno di quei punti per piano tangente il piano che proietta da P la tangente a C_6 nel punto stesso. La quadrica polare di P rispetto a quella Σ_3 ha per generatrici partenti da P le rette osculatrici della Σ_3 e per conseguenza ha comuni con Σ_2 queste rette e inoltre i detti quattro punti, e però coincide con Σ_2 .

Si può notare che, non potendo manifestamente essere Σ_2 quadrica polare di più Σ_3 passanti per C_6 , l'infinità di queste è proprio 4, ossia la serie segnata su C_6 dalle superficie di 3° ordine per P è una g_{16}^{13} ⁵⁾.

Pisa, 12 febbrajo 1910.

E. BERTINI.

5) Ciò, del resto, come pure l'essere g_{10}^7 la serie segnata su C_6 dalle quadriche per P , è caso particolare di un teorema noto {cfr. BERTINI e SEVERI, *Osservazioni sul Restsatz per una curva iperspaziale* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali, vol. XLIII (1907-1908), pp. 439-447]: *Lettera del Prof. E. BERTINI al Prof. F. SEVERI* (pp. 439-444), I. (p. 440)}.