7. *Über das innere Feld der Elektronen;* *von Emil Kohl.*

Die Untersuchungen über das elektromagnetische Feld der Elektronen beschränkte sich größtenteils auf solche Bewegungen, bei welchen das Elektron mit gleichförmiger Geschwindigkeit geradlinig fortschreitet. Seit den Errungenschaften, welche diese Theorie J. J. Thomson sowie Wiechert und Kaufmann verdankt, denen die Bestimmung absoluter Werte für die Masse und die Geschwindigkeit der Elektronen gelang, drängte sich aber immer mehr die Notwendigkeit auf, auch Bewegungen ins Auge zu fassen, welche mit zeitlich veränderlicher Geschwindigkeit stattfinden. Grundlegend sind in dieser Beziehung die beiden Arbeiten von Abraham über die Dynamik des Elektrons¹⁾, in denen diese Frage von ganz allgemeinen Gesichtspunkten aus behandelt wurde. Eine weitere Behandlung erfuhr sie durch Schwarzschild²⁾, welcher gleichfalls ein in beliebiger Bewegung begriffenes Elektron zugrunde legte. Die nachfolgenden Betrachtungen bezwecken nun, die Gleichungen für das innere Feld und die sich hieran knüpfenden Folgerungen zu entwickeln; es wird sich zeigen, daß man mit Hilfe des von Wiechert gefundenen Elementargesetzes für die Wirkung bewegter elektrischer Teilchen und unter Zugrundelegung der von Abraham entwickelten Vorstellung über die Beschaffenheit des Elektrons verhältnismäßig sehr einfache Ausdrücke für diese Feldgleichungen ableiten kann, wenn man gewisse, für die meisten Bewegungen wohl zulässige Vereinfachungen vornimmt.

Es mögen die Komponenten der dielektrischen Verschiebungskraft mit P , Q , R , jene der magnetischen Kraft mit

1) M. Abraham, Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen p. 20—41. 1902; Ann. d. Phys. **10**. p. 105—179. 1903.

2) K. Schwarzschild, Nachr. d. k. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen p. 126—131, p. 132—141, p. 245—278. 1903.

wobei in leicht verständlicher Abkürzung

$$(5) \quad (U, F, G, H) = \int (\sigma, \sigma k_x(\omega), \sigma k_y(\omega), \sigma k_z(\omega)) \frac{d\tau}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)},$$

$$(6a) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta(U, F, G, H) - \frac{1}{\mathfrak{B}^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (U, F, G, H) \\ = -4\pi (\sigma, \sigma k_x(t), \sigma k_y(t), \sigma k_z(t)), \end{aligned} \right.$$

$$(6b) \quad \frac{\partial F}{\partial x_0} + \frac{\partial G}{\partial y_0} + \frac{\partial H}{\partial z_0} = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial U}{\partial t},$$

ist. Das Zeichen $\partial/\partial t$ wurde gewählt um anzudeuten, daß sich die Differentiation nach t bloß auf die Koordinaten ξ, η, ζ bezieht. Eine Ableitung dieser Gleichungen aus den gewöhnlichen Maxwell-Boltzmannschen hat der Verfasser l. c. gegeben.¹⁾ Die Gesamtenergie hat die bekannte Gestalt:

$$(7) \quad E(t) = \frac{1}{2 \cdot 4\pi} \left[\int (P^2 + Q^2 + R^2) d\tau + \int (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) d\tau \right],$$

wobei die Integration über den ganzen Raum zu erstrecken ist. Differenziert man nach t , führt statt der Ableitungen von P, Q, R ihre Werte aus (3) ein und integriert partiell unter Berücksichtigung des Kontinuitätsprinzips²⁾, so ergibt sich, da sich die Abgeleiteten von α, β, γ aufheben,

$$(8a) \quad \frac{dE}{dt} = - \int \sigma (P c_x(t) + Q c_y(t) + R c_z(t)) d\tau,$$

$$(8b) \quad E(t) - E(0) = - \int_0^t dt \int \sigma (P c_x(t) + Q c_y(t) + R c_z(t)) d\tau.$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Zunahme der elektromagnetischen Energie gleich der negativen elektrodynamischen Stromarbeit der Konvektionsströme ist.

Die Ausdrücke (5) enthalten zunächst die Funktionen ξ, η, ζ der Größe ω ; sie sollen der Kürze wegen mit $\Psi_r(\omega)$ bezeichnet werden. Es werde nunmehr vorausgesetzt, daß die betrachteten elektrischen Teilchen ein kugelförmiges Elektron mit der unveränderlichen Massendichte σ bilden, in welchem diese Teilchen starr miteinander verknüpft sind; ferner sei der Halbmesser a dieser Kugel außerordentlich klein (nach Abraham beträgt

1) E. Kohl, Boltzmann-Festschrift, p. 679—687. 1904.

2) L. Boltzmann, Vorlesungen über Maxwells Theorie der Elektrizität und des Lichtes, II. Teil, p. 8. Leipzig 1893.

er höchstens 10^{-12} cm). Die zweite Annahme Abrahams, daß das Elektron eine gleichförmig geladene Hohlkugel oder Kugelschale bilde, welche schon Windt¹⁾ seinen Untersuchungen zugrunde legte, führt nur bezüglich der Konstanten auf andere Werte, soll also nicht näher betrachtet werden. Unter diesen Voraussetzungen läßt sich leicht eine Eigenschaft der Funktion $\Psi_r(\omega)$ für innere Punkte im Elektron ableiten. Entwickelt man nach der Taylorsche Reihe, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\Psi_r(\omega) = \Psi_r\left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}}\right) &= \Psi_r(t) - \left(\frac{1}{1!}\right) \frac{\partial \Psi_r(t)}{\partial t} \cdot \left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right) \\ &+ \left(\frac{1}{2!}\right) \frac{\partial^2 \Psi_r(t)}{\partial t^2} \left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)^2 + \dots\end{aligned}$$

Man ersieht nun ohne weiteres aus der Figur, daß der Punkt P desto näher zu Q rückt, je näher M an Q liegt und je kleiner die Geschwindigkeit des Punktes P ist. Der Betrag von r ist offenbar kleiner, als wenn die Bewegung von P nach Q geradlinig mit der auf der Strecke PQ auftretenden Maximalgeschwindigkeit c_m vor sich ginge und die Punkte Q und M als Endpunkte des in diese angenommene Richtung fallenden Halbmessers gewählt würden. Man erhält so durch eine einfache Rechnung:

$$\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{a}{1 - k_m} > \frac{r}{\mathfrak{B}}.$$

Es sollen nun die in Betracht kommenden Bewegungen durch die Annahme eingeschränkt werden, daß alle Glieder von der Form

$$\frac{1}{\kappa!} \frac{\partial^\kappa \Psi_r(t)}{\partial t^\kappa} \left(\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)^\kappa \quad (\kappa = 2, 3, \dots) \quad \text{gegen} \quad \frac{\partial \Psi_r(t)}{\partial t} \frac{r}{\mathfrak{B}}$$

vernachlässigt werden können. Hierzu ist nötig, daß die Geschwindigkeitsänderung des Teilchens nicht über alle Maßen rasch vor sich geht, ferner, daß die Geschwindigkeit an keiner Stelle der Bahn dem Werte $\mathfrak{B}$ außerordentlich nahe kommt, Einschränkungen, welche wohl für die weitaus meisten Elektronenbewegungen zulässig sein dürften, wenn man bedenkt, daß

$$\frac{a}{\mathfrak{B}} < \frac{1}{3} 10^{-22}$$

1) C. H. Windt, Archives Néerlandaises (2). 5. p. 609--635. 1900.

ist. Dann ergibt sich, da nur das innere Feld des Elektrons und somit nur Punkte innerhalb der Kugel mit dem Halbmesser a betrachtet werden,

$$(9) \quad \Psi_\nu(\omega) = \Psi_\nu(t) - \frac{\partial \Psi_\nu(t)}{\partial t} \frac{r}{\mathfrak{B}},$$

und unter Anwendung dieser Formel auf die in (5) auftretenden Funktionen zunächst:

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} \xi &= \int_0^{t-\frac{r}{\mathfrak{B}}} c_x(t) dt = x - c_x(t) \frac{r}{\mathfrak{B}}, & \eta &= \int_0^{t-\frac{r}{\mathfrak{B}}} c_y(t) dt = y - c_y(t) \frac{r}{\mathfrak{B}}, \\ \zeta &= \int_0^{t-\frac{r}{\mathfrak{B}}} c_z(t) dt = z - c_z(t) \frac{r}{\mathfrak{B}}, \end{aligned} \right.$$

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 &= (x_0 - x + k_x(t)r)^2 + (y_0 - y + k_y(t)r)^2 + (z_0 - z + k_z(t)r)^2 \\ &= R^2 + k_\sigma^2(t)r^2 + 2Rr \left[\frac{x_0 - x}{R} k_x(t) + \frac{y_0 - y}{R} k_y(t) \right. \\ &\quad \left. + \frac{z_0 - z}{R} k_z(t) \right], \end{aligned} \right.$$

und hieraus:

$$(12) \quad r = \frac{R k_\sigma(t) \cos \varphi + \sqrt{R^2 (1 - k_\sigma^2(t) \sin^2 \varphi)}}{1 - k_\sigma^2(t)}.$$

Um den Ausdruck

$$k_\sigma(\omega) \cos \vartheta = k_x(\omega) \frac{x_0 - \xi}{r} + k_y(\omega) \frac{y_0 - \eta}{r} + k_z(\omega) \frac{z_0 - \zeta}{r}$$

zu bestimmen, ist zu berücksichtigen, daß in (10) alle Glieder

$$\frac{1}{\kappa + 1!} \frac{\partial^\kappa c_\nu(t)}{\partial t^\kappa} \left(\frac{r}{\mathfrak{B}} \right)^\kappa \quad (\kappa = 1, 2, \dots) \quad \text{gegen} \quad c_\nu(t)$$

vernachlässigt werden konnten; es ist also

$$c_\nu \left(t - \frac{r}{\mathfrak{B}} \right) = c_\nu(t), \quad k_\nu(\omega) = k_\nu(t)$$

zu setzen, woraus man erhält:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} r k_\sigma(\omega) \cos \vartheta &= k_x(t) (x_0 - x + k_x(t)r) + k_y(t) (y_0 - y + k_y(t)r) \\ &\quad + k_z(t) (z_0 - z + k_z(t)r) \\ &= R k_\sigma(t) \cos \varphi + r k_\sigma^2(t) \end{aligned} \right.$$

und daher

$$(14) \quad \begin{cases} r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta) = r(1 - k_\sigma^2(t)) - R k_\sigma(t) \cos \varphi \\ \quad = \sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t) \sin^2 \varphi}, \\ \frac{1}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t) \sin^2 \varphi}}. \end{cases}$$

Denkt man sich für einen Augenblick das Koordinatensystem so gewählt, daß die Z -Achse mit der Tangentenrichtung an die Bahnkurve im Punkte Q zusammenfällt, so kann der letzte Ausdruck in der Form

$$(14') \quad \frac{1}{r(1 - k_\sigma(\omega) \cos \vartheta)} = \frac{1}{\sqrt{(1 - k_\sigma^2(t)) [(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2] + (x_0 - x)^2}}$$

geschrieben werden. Das ist aber derselbe Ausdruck, wie für die Wirkungsfunktion eines mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitenden Teilchens, nur daß sowohl $k_\sigma(t)$ als auch die Koordinaten der beiden Punkte Q und M Funktionen der Zeit sind. Zusammenfassend kann man also sagen:

Für jede Bewegung des Elektrons, bei welcher alle Ausdrücke

$$\frac{1}{x+1!} \frac{\partial^x c_\nu(t)}{\partial t^x} \left(\frac{r}{R} \right)^x \quad \text{gegen } c_\nu(t)$$

vernachlässigt werden können, hat die Wirkungsfunktion jedes einzelnen Massenteilchens des Elektrons innerhalb desselben den Wert (14).

Diese Voraussetzung stellt gleichzeitig die Bedingung dar, unter welcher die Bedingung des Elektrons als *quasistationär* aufgefaßt werden kann.

Die Formeln (5) gehen somit in die folgenden über:

$$(15) \quad (U, F, G, H) = \int \frac{(\sigma, \sigma k_x(t), \sigma k_y(t), \sigma k_z(t))}{\sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t) \sin^2 \varphi}} d\tau.$$

Für die ferneren Betrachtungen ist es nötig, die Kraftkomponenten P, Q, R nicht mehr für die festen Punkte des Raumes, sondern für die zeitlich veränderlichen Punkte des Elektrons aufzustellen, indem man in (1) auch die Koordinaten von M als Funktionen der Zeit einführt. Man bekommt so:

$$(16) \left\{ \begin{aligned} P &= -\frac{\partial U}{\partial x_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dF}{dt} + \frac{1}{\mathfrak{B}} \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} k_{x_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial y_0} k_{y_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial z_0} k_{z_0}(t) \right], \\ Q &= -\frac{\partial U}{\partial y_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dG}{dt} + \frac{1}{\mathfrak{B}} \left[\frac{\partial G}{\partial x_0} k_{x_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial y_0} k_{y_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial z_0} k_{z_0}(t) \right], \\ R &= -\frac{\partial U}{\partial z_0} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{dH}{dt} + \frac{1}{\mathfrak{B}} \left[\frac{\partial H}{\partial x_0} k_{x_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial y_0} k_{y_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial z_0} k_{z_0}(t) \right]. \end{aligned} \right.$$

Die Komponenten der auf das Elektron wirkenden inneren Gesamtkraft der dielektrischen Verschiebung erhält man durch Summierung über den ganzen Kugelraum in der Gestalt:

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{P} &= \int \sigma P d\tau_0 = - \int \sigma \frac{\partial U}{\partial x_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \int \sigma F d\tau_0 \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{B}} \int \sigma \left[\frac{\partial F}{\partial x_0} k_{x_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial y_0} k_{y_0}(t) + \frac{\partial F}{\partial z_0} k_{z_0}(t) \right] d\tau_0, \\ \mathfrak{Q} &= \int \sigma Q d\tau_0 = - \int \sigma \frac{\partial U}{\partial y_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \int \sigma G d\tau_0 \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{B}} \int \sigma \left[\frac{\partial G}{\partial x_0} k_{x_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial y_0} k_{y_0}(t) + \frac{\partial G}{\partial z_0} k_{z_0}(t) \right] d\tau_0, \\ \mathfrak{R} &= \int \sigma R d\tau_0 = - \int \sigma \frac{\partial U}{\partial z_0} d\tau_0 - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \int \sigma H d\tau_0 \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{B}} \int \sigma \left[\frac{\partial H}{\partial x_0} k_{x_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial y_0} k_{y_0}(t) + \frac{\partial H}{\partial z_0} k_{z_0}(t) \right] d\tau_0. \end{aligned} \right.$$

Während die bisherigen Betrachtungen allgemeinerer Art waren, soll nunmehr eine speziellere Voraussetzung eingeführt werden, um für gewisse Gruppen von Elektronenbewegungen übersichtliche Ergebnisse zu erhalten. Sie besteht darin, daß die Elektronen bloß eine fortschreitende, aber keine drehende Bewegung besitzen sollen, bez. daß die Geschwindigkeit der letzteren gegenüber jener der ersteren vernachlässigt werden könne. Es wäre zu erwähnen, daß auch Abraham¹⁾ bemerkt, daß für die meisten Elektronenbewegungen, falls sie nicht nahezu mit Lichtgeschwindigkeit vor sich gehen, die fortschreitende Bewegung allein maßgebend ist. Eine Begründung dieser Auffassung wird am Schlusse dieses Aufsatzes kurz angedeutet werden. Unter dieser Voraussetzung sind dann die Größen $k_i(t)$ für alle Punkte des Elektrons gleich, und die Gleichungen für das innere Feld nehmen eine besonders ein-

1) M. Abraham, Ann. d. Phys. 10. p. 173—174. 1903.

fache Form an. Man berücksichtige, daß wegen der starren Verbindung der Massenteilchen untereinander

$$\frac{\partial R}{\partial x_0} = - \frac{\partial R}{\partial x} \text{ etc.}$$

ist und daß die Grenzen der Integrale wegen der unveränderlichen Gestalt der Oberfläche keine Funktionen der Zeit sind. Betrachtet man daher die einzelnen, aus der Wirkungsfunktion (14) gebildeten Summanden innerhalb der Integrale (16), so bemerkt man, daß sich zu jedem Punkte M des Elektrons ein symmetrisch liegender M' so finden läßt, daß die ersten und dritten Integrale entgegengesetzte Vorzeichen besitzen, während die zweiten gleich groß und gleich bezeichnet sind; diese Eigenschaft ergibt sich aus der Form von (14), in welcher die Koordinaten nur in der Verbindung $x_0 - x$, $y_0 - y$, $z_0 - z$ auftreten, sowie in Hinblick auf die allseitige Symmetrie des Elektrons. Die Folge davon ist, daß in den Gleichungen (17) die ersten und dritten Integrale gänzlich verschwinden und nur die zweiten übrig bleiben.

Was die magnetischen Kraftkomponenten betrifft, so lassen sie sich leicht dadurch bestimmen, daß man für die betrachtete Zeit die Z -Achse mit der Fortpflanzungsrichtung zusammenfallen läßt. Man erkennt dann sofort, daß die magnetischen Kraftlinien Kreise bilden, deren Ebene auf der eben herrschenden Fortpflanzungsrichtung senkrecht stehen und deren Mittelpunkte in jener Geraden liegen, welche durch das Zentrum des Elektrons parallel zur Fortpflanzungsrichtung gezogen wird. Die Radien dieser Kreise geben dann die Richtung der auf die Konvektionsströme des Elektrons wirkenden ablenkenden Kräfte an.

Man übersieht ferner leicht, daß in einem ursprünglich in rein fortschreitender Bewegung begriffenen Elektron infolge der inneren Kräfte niemals Kräftepaare auftreten, während solche entstehen, wenn eine Drehung vorhanden ist, worauf bereits Abraham hingewiesen hat; ein in reiner Fortschreitung begriffenes Elektron kann also nur durch die Wirkung äußerer Kräfte eine Drehung erlangen. Doch werden solche Drehungen nur dann von Belang sein, wenn die Differentialquotienten dieser äußeren Kraftkomponenten nach den Achsen beträcht-

liche Werte erreichen, also das äußere Feld in höherem Grade inhomogen ist, da ja die Drehmomente von der Größenordnung des Produktes dieser Differentialquotienten und dem Quadrate des Halbmessers a sind.

Man erhält demnach die vereinfachten Gleichungen:

$$(18) \quad \begin{cases} \mathfrak{P} = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \iint \sigma F d\tau d\tau_0 = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} [k_x(t) V(k_\sigma(t))], \\ \mathfrak{D} = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \iint \sigma G d\tau d\tau_0 = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} [k_y(t) V(k_\sigma(t))], \\ \mathfrak{H} = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} \iint \sigma H d\tau d\tau_0 = -\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{d}{dt} [k_z(t) V(k_\sigma(t))], \end{cases}$$

wozu noch die Gleichungen für die Komponenten der inneren Gesamtkraft der magnetischen Verschiebung kommen:

$$(19) \quad a = \int \sigma \alpha d\tau_0 = 0, \quad b = \int \sigma \beta d\tau_0 = 0, \quad c = \int \sigma \gamma d\tau_0 = 0;$$

hier ist

$$(20) \quad V(k_\sigma(t)) = \iint \frac{\sigma^2 d\tau d\tau_0}{\sqrt{R^2 - R^2 k_\sigma^2(t) \sin^2 \varphi}}.$$

Für die von der Bewegung des Elektrons herrührende Energie, welche zugleich als innere Feldenergie des Elektrons bezeichnet werden kann, erhält man gemäß (8b) die einfache Beziehung:

$$(21) \quad E(t) - E(0) = k_\sigma^2(t) V(k_\sigma(t)) - \int_0^t k_\sigma(t) V(k_\sigma(t)) dk_\sigma(t).$$

Der Ausdruck (20) kann bekanntlich durch Verlegung der Z -Achse in die Bewegungsrichtung (vgl. Gleichung (14')) und Transformation der Variablen

$$\sqrt{1 - k_\sigma^2(t)}(x, y), z = x', y', z'; \quad \sqrt{1 - k_\sigma^2(t)}(x_0, y_0), z_0 = x'_0, y'_0, z'_0$$

auf die Form

$$(20') \quad V(k_\sigma(t)) = \frac{1}{(1 - k_\sigma^2(t))^{\frac{3}{2}}} \iint \frac{\sigma^2 d\tau' d\tau'_0}{\sqrt{(x_0 - x')^2 + (y_0 - y')^2 + (z_0 - z')^2}}$$

gebracht werden, wobei sich die Grenzen jetzt über den Raum eines Rotationsellipsoids von der Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{1 - k_\sigma^2(t)} + z^2 = a^2$$

erstrecken. Wendet man die Gleichungen für das Potential eines homothetischen Rotationsellipsoids mit der größeren

Achse als Rotationsachse hierauf an¹⁾, so erhält man nach einigen einfachen Rechnungen:

$$(22) \quad V(k_\sigma(t)) = \frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \frac{1}{k_\sigma(t)} \log \frac{1 + k_\sigma(t)}{1 - k_\sigma(t)}.$$

Es sollen nunmehr die Bewegungsgleichungen des Elektrons aufgestellt werden. Man beachte, daß auf das Elektron sowohl innere wie auch äußere Bewegungskräfte mit den Komponenten $X_{i,a}$, $Y_{i,a}$, $Z_{i,a}$ wirken, welche in der bekannten Art

$$X = e[P - \beta k_z(t) + \gamma k_y(t)] \text{ etc.}$$

aus den Komponenten des Feldes zusammengesetzt sind. Es werde nun angenommen, daß für den hier behandelten Fall das Prinzip der gleichen Wirkung und Gegenwirkung gilt, so daß demnach die Summe der Komponenten aus allen auf das Elektron wirkenden Kräften nach jeder Richtung hin verschwindet, eine Voraussetzung, deren Folgerungen bei allgemeiner Geltung von Poincaré eingehend untersucht worden sind.²⁾ Dann folgt hieraus, daß die Summen

$$\int \sigma [X_i + X_a] d\tau = \int \sigma [Y_i + Y_a] d\tau = \int \sigma [Z_i + Z_a] d\tau = 0$$

sind. Aus den früheren Betrachtungen ergibt sich aber gemäß der Gleichungen (18) und (19), daß

$$\int \sigma X_i d\tau = -\mathfrak{P}, \quad \int \sigma Y_i d\tau = \mathfrak{Q}, \quad \int \sigma Z_i d\tau = \mathfrak{R}$$

ist; nimmt man weiter an, daß man bei der Kleinheit des Elektrons von einer Verschiedenheit der äußeren Kräfte innerhalb desselben absehen kann, also

$$\int \sigma P_a d\tau = P_a \int \sigma d\tau = e P_a \text{ etc.}$$

ist, so bekommt man die Bewegungsgleichungen

$$(23) \quad \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{P}} \frac{d}{dt} [k_x(t) V(k_\sigma(t))] - e [P_a - \beta_a k_z(t) + \gamma_a k_y(t)] = 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{P}} \frac{d}{dt} [k_y(t) V(k_\sigma(t))] - e [Q_a - \gamma_a k_z(t) + \alpha_a k_x(t)] = 0, \\ \frac{1}{\mathfrak{P}} \frac{d}{dt} [k_z(t) V(k_\sigma(t))] - e [R_a - \alpha_a k_y(t) + \beta_a k_x(t)] = 0. \end{cases}$$

1) E. Betti, Lehrbuch der Potentialtheorie, deutsche Übersetzung von W. F. Meyer, p. 85. Stuttgart 1885. (In der Gleichung für V ist darin ein störender Druckfehler unterlaufen, indem das Glied mit $x^2 + y^2$ dort mit negativem, statt mit positivem Zeichen versehen erscheint.)

2) H. Poincaré, Archives Néerlandaises 5. p. 252—278. 1900.

Multipliziert man diese Gleichungen der Reihe nach mit $c_x(t)$, $c_y(t)$, $c_z(t)$ und bildet das Integral der Summe zwischen den Grenzen $t = 0$ bis t , so erhält man durch eine einfache Rechnung, wenn die Arbeit der äußeren Kräfte mit A bezeichnet wird:

$$(24) \quad A = k_\sigma^2(t) V(k_\sigma(t)) - \int_0^t k_\sigma(t) V(k_\sigma(t)) dk_\sigma(t) = \frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \log \frac{1}{1 - k_\sigma^2(t)}.$$

Der zweite Ausdruck rechts ist aber nach (21) die Zunahme der inneren Feldenergie des Elektrons. Es ergibt sich somit der Satz:

Die Vermehrung der inneren Feldenergie des Elektrons, berechnet aus den inneren Feldkräften desselben, ist gleich der Arbeit der äußeren auf dasselbe wirkenden Kräfte.

Man hätte auch umgekehrt diesen Satz zuerst aufstellen und aus ihm die obigen Bewegungsgleichungen durch die Voraussetzung ableiten können, daß die Zunahme der inneren Feldenergie des Elektrons bei der Bewegung nach einer bestimmten Richtung durch die entsprechende Arbeit der äußeren Kräfte gegeben wird.

Führt man elektromagnetische Maßeinheiten ein und nimmt der Allgemeinheit wegen noch an, daß das Elektron möglicherweise einen materiellen Träger mit der Masse M besitzt, so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \frac{1}{k_\sigma(t)} \log \frac{1 + k_\sigma(t)}{1 - k_\sigma(t)} + M = \mu$$

gesetzt wird, die Gleichungen:

$$(25) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} (\mu c_x(t)) = \varepsilon (P_a - \beta_a c_z(t) + \gamma_a c_y(t)), \\ \frac{d}{dt} (\mu c_y(t)) = \varepsilon (Q_a - \gamma_a c_x(t) + \alpha_a c_z(t)), \\ \frac{d}{dt} (\mu c_z(t)) = \varepsilon (R_a - \alpha_a c_y(t) + \beta_a c_x(t)). \end{cases}$$

Wenn in diesen Gleichungen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{k_\sigma^{2\nu}(t)}{2\nu+1} \text{ gegen } 1$$

vernachlässigt wird, so nehmen sie, da dann

$$\mu = \mu_0 = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a} + M$$

geschrieben werden kann, die gewöhnlich verwendete Form der Bewegungsgleichungen des Elektrons an, und die Energiegleichung (24) erscheint in der leicht zu deutenden Gestalt:

$$(26) \quad E(t) - E(o) = \frac{\mu_0}{2} c_o^2(t).$$

Diese vereinfachten Gleichungen wurden in größerer Allgemeinheit von Riecke¹⁾ eingehender studiert. Was die Integration der exakten Gleichungen betrifft, so gestaltet sie sich schon für die einfachsten Fälle sehr schwierig, selbst dann, wenn man sich bloß auf das Glied mit $k_o^2(t)$ beschränkt. Eine Ausnahme bildet nur der Fall, daß ein homogenes konstantes magnetisches Feld mit der Feldstärke γ , dessen Kraftlinien senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen, vorhanden ist. Dann beschreibt das Elektron mit gleichbleibender Tangentialgeschwindigkeit $c_o(t)$ einen Kreis mit dem Halbmesser

$$R = \frac{\mu}{\gamma \epsilon} c_o(t).$$

Dagegen bietet schon die zweite einfachste Annahme, daß ein homogenes, konstantes elektrisches Feld mit der Feldstärke Q wirkt, dessen Kraftlinien senkrecht zur Bewegungsrichtung liegen, bedeutende mathematische Schwierigkeiten. Wenn man hierbei voraussetzt, daß das Elektron bloß eine elektromagnetische Masse besitzt, also $M = 0$ setzt, läßt sich eine allerdings sehr verwickelte Beziehung aufstellen. Es werde angenommen, daß die Bewegungsrichtung zur Zeit $t = 0$ senkrecht auf den Kraftlinien stehe; die Lage des Elektrons zu dieser Zeit werde als Nullpunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems betrachtet, dessen X -Achse mit dieser Bewegungsrichtung zusammenfällt, ferner bezeichne φ den Winkel, welchen die Tangentenrichtung in einem bestimmten Punkte der Bahnkurve mit der X -Achse einschließt; dann ergibt sich folgende Gleichung:

$$y = \frac{1}{Q} \frac{3}{10} \frac{e}{a} \frac{1}{k_o(o)} \log \frac{1 + k_o(o)}{1 - k_o(o)} \left[2 \log \frac{1 - k_o(o)}{1 + k_o(o)} \log \left(e^{\log \frac{1 + k_o(o)}{1 - k_o(o)} \sec \varphi} + 1 \right) - \sec \varphi - 1 \right],$$

1) E. Riecke, Ann. d. Phys. 4. p. 378—387. 1900.

welche ein Bild von der komplizierten Natur der auftretenden Funktionen liefert. Vernachlässigt man wieder alle Glieder mit $k_\sigma(t)$ in μ , so erhält man unmittelbar aus (25) als Bahn eine Parabel mit dem Parameter

$$p = \frac{\mu}{\varepsilon Q} c_\sigma^2(o),$$

doch darf bei dieser Versuchseinrichtung die Kathode keine Feldwirkung mehr auf das Elektron ausüben. Aus p und R kann dann bekanntlich μ/ε und $c_\sigma(o)$ berechnet werden.

Es ist bemerkenswert, daß die Formeln (25) und (26) für den vereinfachten Fall keinen Aufschluß darüber geben, ob die Masse des Elektrons eine rein elektromagnetische ist, oder ob auch die materielle Masse eines Trägers der negativen Elektrizität darin enthalten ist. Wäre die Masse rein elektromagnetisch, wie Abraham von vornherein annimmt, so würden die bekannten Folgerungen, welche man an den Wert von ε/μ_0 bezüglich der Zersplitterung der Atome in noch kleinere Korpuskeln geknüpft hat, ihre Zulässigkeit verlieren. Andererseits deuten aber doch einige Erscheinungen, wie die gasartige Natur mancher Emanationen, wenigstens bei gewissen Formen der Becquerelstrahlung auf einen materiellen Träger, z. B. die Korpuskel eines besonderen Gases, hin. Man wird eben zu berücksichtigen haben, daß mit dem Namen *radioaktiver* oder *Becquerelstrahlung* kein einheitlicher Vorgang, sondern eine Summe von untereinander wesensverschiedener Strahlungsformen mit gewissen gemeinsamen Eigenschaften bezeichnet wird. Die experimentelle Entscheidung dieser Frage dürfte aus doppelten Gründen schwierig sein, einerseits wegen der Kompliziertheit der Rechnungen, sobald man die Glieder mit $k_\sigma(t)$ nicht mehr vernachlässigt, andererseits wegen der Eigenschaft der Funktion

$$\frac{1}{k_\sigma(t)} \log \frac{1 + k_\sigma(t)}{1 - k_\sigma(t)},$$

nur wenig empfindlich gegenüber dem Argumente $k_\sigma(t)$ zu sein.

Es möge hier auf eine eigentümliche, diese Frage betreffende Folgerung aus der vereinfachten Gleichung

$$(27) \quad \frac{\varepsilon}{\mu_0} = \frac{\varepsilon}{\frac{3}{5} \frac{\varepsilon^2}{a} + M} = \kappa$$

hingewiesen werden, wobei κ die bekannte, nach den Messungen von Simon¹⁾ und Seitz²⁾ mit $1,865 \cdot 10^7$ bestimmte Größe bedeutet; diese Zahl bezieht sich hierbei auf Elektronen, bei welchen sich $k_\sigma(t)$ noch innerhalb solcher Grenzen hält, daß

$$\frac{1}{k_\sigma(t)} \log \frac{1 + k_\sigma(t)}{1 - k_\sigma(t)}$$

mit großer Annäherung gleich 2, also $\mu = \mu_0$ gesetzt werden kann, also auf Kathodenstrahlen und die durchlässige Gruppe der langsamen ablenkbaren Becquerelstrahlen. Die erste und naheliegendste Annahme besteht darin, daß sich das Atom von der Masse m eines bestimmten Körpers in n Korpuskel spaltet, an welchen die negative Elektrizität des Elektrons haftet. Dann muß man wohl auch annehmen, daß sich die elektrische Ladung ε_0 des Ions, hier des Atoms, gleichmäßig auf jedes Korpuskel verteilt, so daß dessen Ladung $\varepsilon = \varepsilon_0/n$ ist. Man erhält dann

$$(27) \quad \frac{\frac{\varepsilon_0}{n}}{\frac{3}{5} \frac{\varepsilon_0^2}{n^2 a} + \frac{m}{n}} = \kappa.$$

Multipliziert man Zähler und Nenner mit Nn , der Anzahl der Korpuskel in 1 Grammatom, so ergibt sich

$$(28) \quad a = \frac{\frac{3}{5} \kappa (N \varepsilon_0)}{(N \varepsilon_0 - \kappa N m)} \frac{\varepsilon_0}{n}.$$

$N\varepsilon_0$ ist jetzt die durch 1 Grammatom Ionen in der Zeiteinheit übergeführte Elektrizitätsmenge im elektromagnetischen Maße, Nm die Masse von 1 Grammatom in absoluten Einheiten. Setzt man voraus, daß der als Träger auftretende Körper q -wertig ist und das Atomgewicht m besitzt, so wird obige Gleichung

$$(28') \quad a = \frac{\frac{3}{5} \kappa (q N \bar{\varepsilon})}{\left(q N \bar{\varepsilon} - \kappa \frac{m}{\gamma} \right)} \frac{q \bar{\varepsilon}}{n},$$

wobei $\bar{\varepsilon}$ die Ladung eines einwertigen Ions, also $N\bar{\varepsilon}$ gleich $9654^3)$ absolute Einheiten, m das Atomgewicht des Körpers und γ die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Man sieht, daß überhaupt nur bei solchen Emanationen der Wert von a positiv

1) S. Simon, Wied. Ann. **69**. p. 611. 1899.

2) W. Seitz, Ann. d. Phys. **8**. p. 243. 1902.

3) G. Mie, Die neueren Forschungen über Ionen und Elektronen. p. 18. Stuttgart 1903.

herauskommt, also eine materielle Masse als Träger angenommen werden kann, wo der Nenner positiv, daher

$$q \cdot 9654 - \frac{1,865}{981} \cdot 10^7 m > 0$$

ist; für Wasserstoff wäre dies nicht mehr der Fall, ebenso wenig für einen anderen Körper, bei welchem m größer als annähernd $q/2$ ist. Einigermäßen unsicher ist hierbei die Größe κ ; so findet Wiechert Werte zwischen $1,01 \cdot 10^7$ und $1,55 \cdot 10^7$, Kaufmann $1,84 \cdot 10^7$, W. Wien $2 \cdot 10^7$, Starke rund $1,85 \cdot 10^7$, Lenard rund $0,64 \cdot 10^7$, Thomson $0,5 \cdot 10^7$, endlich Wiechert einen kleinsten, von ihm als möglich, aber unwahrscheinlich bezeichneten Wert $0,87 \cdot 10^7$; die drei letzteren Bestimmungen würden allerdings bei Wasserstoff auf positive Werte von a führen.

Es sei hierbei bemerkt, daß die etwa bei den schnellsten Becquerelstrahlen sich ergebenden Bestimmungen für κ nicht herbeigezogen werden dürfen, da κ bei Einführung des exakten Wertes von μ in (27) mit wachsendem $k_e(t)$ abnimmt, sondern daß nach der obigen Bemerkung die Messungen bei Kathodenstrahlen zugrunde zu legen sind. Auch ist zu berücksichtigen, daß sich die Betrachtungen nur auf solche Strahlungsvorgänge beziehen, bei welchen theoretisch das Auftreten freier Elektronen vorausgesetzt wird, also auf die Kathodenstrahlen und die durchlässige Gruppe der ablenkbaren Becquerelstrahlen. Es sind daher jene Strahlungen, welche nicht auf Elektronen hindeuten, wie die stark absorbierbare Gruppe der letzteren, welche vielleicht den Kanalstrahlen an die Seite zu stellen sind, ferner die Strahlung von der Art der Thoriumemanation, endlich die den Charakter der Röntgenstrahlung tragende Gruppe der nicht ablenkbaren Becquerelstrahlen auszuschließen; die beiden ersteren dieser Gruppen sind eher mit der Bewegung von Ionen vergleichbar, weshalb das Vorhandensein eines materiellen Trägers bei ihnen von vornherein wahrscheinlich ist, während die letztere als eine reine Ätherbewegung, hervorgerufen durch die plötzliche Vernichtung der Geschwindigkeit der Elektronen bei ihrem Anpralle an körperliche Massen, aufzufassen sein dürfte.

Es gibt einen einzigen Stoff, welcher dieser Beziehung zufolge als Träger der Elektronen bei den genannten Strahlungsformen aufgefaßt werden könnte, nämlich das *Helium*. Gerade

das Helium spielt aber gemäß den jüngsten Entdeckungen Ramsays eine so merkwürdige Rolle bei der Becquerelstrahlung, daß dieses Ergebnis eine gewisse Beachtung verdient; auf die Folgerungen, welche man zur Erklärung dieser Entdeckungen bei Zulassung des Heliums als Träger der Strahlung ziehen könnte, soll aber wegen ihrer dermalen noch hypothetischen Natur hier nicht näher eingegangen werden. Wenn man nämlich annehmen würde, daß das Atomgewicht des Heliums gleich 2 ist, wie dies kürzlich Wilde¹⁾ getan hat, und wenn man ferner zulassen würde, daß die Wertigkeit des Heliums wenigstens in der Gestalt der hier betrachteten Ionen gleich 5 wäre, so ließe sich ein positiver Wert von a berechnen, das Helium wäre also als Träger der Elektronen möglich; die Berechnung von a selbst ist mangels der Kenntnis von n nicht durchführbar, doch würde man bei nicht zu großem n Werte erhalten, welche zwar kleiner als die von Abraham berechneten wären, aber immerhin dieselbe Größenordnung besäßen. Der Begriff Wertigkeit ist hier im Sinne der elektrolytischen Wertigkeit verstanden, wonach das Atom eine gewisse Anzahl von Elementarquanten $\bar{e}$ zu tragen vermag. Wenn man dann einen materiellen Träger auch für die Kathodenstrahlen zugeben würde, so wäre der Gedanke, die Kathodenstrahlung gleichwie gewisse Gattungen der Becquerelstrahlung vielleicht ebenfalls zu kondensieren, nur naheliegend.

Eine andere Auffassung wäre die, den Elektronen unter Voraussetzung eines körperlichen Trägers unmittelbar das Elementarquantum zuzuschreiben, also die Atome selbst als Träger anzunehmen. Doch sind die Bedenken, welche man gegen die Annahme unzersplitterter Atome mit Rücksicht auf die Erscheinungen der Absorption nach den jüngsten Ausführungen Lenards²⁾ einwenden kann, so schwerwiegend, daß diese Auffassung als ausgeschlossen abgewiesen werden muß, zumal sie, da hier $n = 1$ zu setzen wäre, auch theoretisch nichts wesentlich Neues ergäbe.

1) H. Wilde, Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society, Session 1903–1904. 48. part I. p. 1–12.

Man vergleiche hiermit auch die Bemerkungen von B. Brauner über Gase mit dem Verhältnisse 1,66 der beiden spezifischen Wärmen in Ber. d. Deutschen chem. Gesellsch. 32. p. 708–712. 1899.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys. 12. p. 714–744. 1903.

Die dritte mögliche Annahme ist die in der Elektronentheorie, wie es scheint, gebräuchlichste, wonach sich wohl das Atom in n Korpuskel spaltet, aber jedes Korpuskel das Elementarquantum des Ions trägt. Hier würde sich, wie man durch entsprechende Umformung der Gleichung (28) erkennt, eine weit größere Möglichkeit für materielle Träger ergeben. Diese Annahme scheint dem Verfasser jedoch aus dem Grunde wenig befriedigend, da es schwer einzusehen ist, warum die n Korpuskel mit ihren n Elementarquanten als Ion vereinigt nur ein freies Elementarquantum tragen sollten.

Zum Schlusse soll noch das Ergebnis eines von dem Verfasser in dem oben erwähnten Aufsätze abgeleiteten Ausdruckes für die Kraftkomponenten P , Q , R besprochen werden.

Man bilde aus (3) durch Differentiation nach t

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial P}{\partial t} + 4\pi \sigma k_x(t) \right] = 4\pi \frac{\partial i_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right),$$

worin i_x die Komponente der Gesamtströmung nach der X -Achse bedeutet und sodann die ähnlichen Beziehungen für Q und R . Führt man für $\partial \beta / \partial t$ und $\partial \gamma / \partial t$ ihre Werte aus (2) ein, so ergibt sich mit Hilfe von (6b) und (6a)

$$4\pi \frac{\partial i_x}{\partial t} = \Delta \left[-\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\mathfrak{B}} \frac{\partial F}{\partial t} \right] - 4\pi \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

woraus man, da der Ausdruck in der Klammer gleich P ist, unter Anwendung des Kontinuitätsprinzipes auf die Integration des zweiten Gliedes rechts die umgeformten Gleichungen

$$(29) \quad \begin{cases} P = -\frac{\partial}{\partial x_0} \int \frac{\sigma}{R} d\tau - \int \frac{\frac{\partial i_x}{\partial t}}{R} d\tau, \\ Q = -\frac{\partial}{\partial y_0} \int \frac{\sigma}{R} d\tau - \int \frac{\frac{\partial i_y}{\partial t}}{R} d\tau, \\ R = -\frac{\partial}{\partial z_0} \int \frac{\sigma}{R} d\tau - \int \frac{\frac{\partial i_z}{\partial t}}{R} d\tau \end{cases}$$

erhält.

Hierin wurde i_x elektromagnetisch gemessen, und R bedeutet jetzt die Entfernung eines bewegten elektrischen Teilchens zur Zeit t von den einzelnen Punkten $M(x_0, y_0, z_0)$ des Raumes. Das zweite Integral kann dadurch umgeformt werden, daß man d/dt vor das Integralzeichen setzt und dann mit R_0 die

Entfernungen der einzelnen, als fest anzunehmenden Punkte des Raumes, mit σ und i , aber die an den verschiedenen Stellen jeweilig herrschenden Werte bezeichnet. Es kann somit (29) auch in der Gestalt

$$(29') \left\{ \begin{aligned} P &= -\frac{\partial U_0}{\partial x_0} - \frac{d}{dt} \int \frac{i_x}{R_0} d\tau, & Q &= -\frac{\partial U_0}{\partial y_0} - \frac{d}{dt} \int \frac{i_y}{R_0} d\tau, \\ R &= -\frac{\partial U_0}{\partial z_0} - \frac{d}{dt} \int \frac{i_z}{R_0} d\tau \end{aligned} \right.$$

dargestellt werden, wobei U_0 das gewöhnliche elektrostatische Potential aller vorhandenen Massenteilchen bezüglich des Punktes $M(x_0, y_0, z_0)$ darstellt.

Diese Gleichungen für die Kraftkomponenten sind nun ganz dieselben, wie die in früheren Arbeiten des Verfassers als Stefansche Gleichungen bezeichneten Beziehungen, aus welchen sich die Maxwell'schen Gleichungen ganz ungezwungen ableiten lassen. Es können daher die Gleichungen für die Wirkung bewegter elektrischer Massen aus jenen für ruhende gewonnen werden. Das Charakteristische dieser Formeln besteht darin, daß in ihnen die Größe $\mathfrak{B}$ nicht mehr unmittelbar vorkommt, sondern sich als Integrationsfolgerung aus denselben ergibt. Die Gesamtwirkung eines bewegten Teilchens setzt sich also aus zwei Einzelwirkungen zusammen, aus der Fernwirkung des Teilchens, welche wie in der Ruhe durch das elektrostatische Potential bestimmt ist, und aus der Induktionswirkung der erzeugten Verschiebungsströme und der vorhandenen Konvektionsströme.

Es werde nun das Arbeitsintegral

$$- \int (P c_x(t) + Q c_y(t) + R c_z(t)) \sigma d\tau_0$$

gebildet, welches die Änderung der Feldenergie in der Form (8b) liefert. Setzt man die Werte aus (29') und beachtet, daß wegen der Beziehung $d\sigma/dt = 0$

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \sigma \left[\frac{\partial U_0}{\partial x_0} c_{x_0}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial y_0} c_{y_0}(t) + \frac{\partial U_0}{\partial z_0} c_{z_0}(t) \right] d\tau_0 \\ = \int \sigma \frac{dU_0}{dt} d\tau_0 = \frac{d}{dt} \int \sigma U_0 d\tau_0 \end{aligned} \right.$$

ist, so erhält man

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} E(t) - E(0) &= \int \sigma U_0 d\tau_0 \Big|_0^t + \int_0^t dt \int \sigma \left[c_{x_0}(t) \frac{d}{dt} \int \frac{i_x}{R_0} d\tau \right. \\ &\quad \left. + c_{y_0}(t) \frac{d}{dt} \int \frac{i_y}{R_0} d\tau + c_{z_0}(t) \int \frac{i_z}{R_0} d\tau \right] d\tau_0. \end{aligned} \right.$$

Wenn keine äußere Arbeitsleistung vorhanden ist, muß $E(t) = E(o)$ sein, da sich bloß die Form der elektromagnetischen Energie, nicht aber ihre Größe geändert hat. Dann sagt diese Gleichung, *daß die Änderung des elektrostatischen Potentials aller vorhandenen elektrischen Massenteilchen aufeinander gleich der Induktionsarbeit aller vorhandenen Gesamtströme auf die Konvektionsströme ist.*

Dieser Satz soll angewendet werden, um die Ladung zu berechnen, welche ein Körper besitzen muß, um einem Elektron eine bestimmte Geschwindigkeit $c_o(t)$ zu erteilen, da in diesem Falle der Betrag beider Integrale leicht ermittelt werden kann.

Es werde die einfachste Vorstellung zugrunde gelegt, nämlich die, daß das Elektron zuerst als ruhend gedacht wird und an einer im Vergleich zu ihm außerordentlich großen, negativ elektrischen und dauernd in Ruhe befindlichen Kugel bis zur Berührung nahe anliegt. Ferner werde vorausgesetzt, daß die gleichförmige Verteilung der Elektrizität auf der Kugel durch die Nähe des Elektrons wegen dessen Kleinheit nicht beeinflußt wird; vom Elektron selbst wurde schon früher angenommen, daß in ihm eine Verschiebung der Elektrizität nicht stattfindet. Um eine bestimmte physikalische Vorstellung damit zu verbinden, kann man sich etwa denken, daß die betrachtete Kugel ein Leiter sei, auf welche von einer äußeren Quelle her, z. B. durch einen Leitungsdraht, fortwährend Elektronen angehäuft werden, oder daß materielle Träger aus dem Innern der Kugel, bez. aus dem umgebenden Gasraume, an deren Oberfläche treten und dort eine negative Ladung annehmen. Auf jedes Elektron wirkt dann eine abstoßende Kraft, welche es von der Kugel wegzutreiben sucht; es entsteht dann die Frage, in welcher Beziehung die Ladung der Kugel und die erteilte Geschwindigkeit des Elektrons steht.

Die gesamte Feldenergie $E(o)$ des Systems ist zu Beginn der Zeit durch

$$(32) \quad E(o) = \frac{\mathfrak{M}}{2 r_0} + \frac{3 e^2}{5 a} + \frac{\mathfrak{M} e}{r_0 + a}$$

gegeben, worin $\mathfrak{M}$ die Masse der Elektrizität auf der Kugel und r_0 den Halbmesser derselben bedeutet. Zu einer späteren Zeit hat sich der Zustand des Systems geändert, indem das Elektron eine bestimmte Geschwindigkeit $c_o(t)$ erhalten, das Selbstpotential der Massen aufeinander aber abgenommen hat.

Was die Energievergrößerung des Elektrons infolge der erteilten Bewegung betrifft, so ist sie gemäß (24) durch

$$\frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \log \frac{1}{1 - k_\sigma^2(t)} + \frac{M}{2} c_\sigma^2(t)$$

dargestellt, da dieser Ausdruck nach (23) die Leistung der äußeren Kräfte und somit die Vermehrung der inneren Feldenergie des Elektrons angibt. Es werde jetzt die Bewegung des Elektrons plötzlich gehemmt und die Energie $E(t_0)$ in der neuen Ruhelage berechnet, indem man berücksichtigt, daß der Betrag

$$\frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \log \frac{1}{1 - k_\sigma^2(t_0)} + \frac{M}{2} c_\sigma^2(t_0)$$

in anderer Form, z. B. als Wärme, aus dem Felde gewonnen werden kann.¹⁾ Man hat dann für dieselbe

$$(32') \quad E(t_0) = \frac{\mathfrak{M}}{2r_0} + \frac{3}{5} \frac{e^2}{a} + \frac{\mathfrak{M}}{r' + a};$$

r' ist die Entfernung der Mittelpunkte der Kugel und des Elektrons in der neuen Ruhelage. Die Differenz zwischen (32) und (32') muß gleich der aus dem Elektron zu gewinnenden Energie sein, welche sich also entsprechend dem früher abgeleiteten Satze in andere Energieart umsetzen läßt. Man erhält daher

$$(33) \quad \begin{cases} E(o) - E(t_0) = \mathfrak{M} e \left[\frac{1}{r_0 + a} - \frac{1}{r' + a} \right] \\ \quad \quad \quad = \frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \log \frac{1}{1 - k_\sigma^2(t_0)} + \frac{M}{2} c_\sigma^2(t_0). \end{cases}$$

Am einfachsten gestalten sich die Verhältnisse, wenn r' gegen r_0 so groß ist, daß in der Klammer das zweite Glied gegen das erste vernachlässigt werden kann; man bekommt dann, da auch a gegen r_0 verschwindend klein ist,

$$(33') \quad \frac{\mathfrak{M}}{r_0} e = \frac{3}{10} \frac{e^2}{a} \log \frac{1}{1 - k_\sigma^2(t_0)} + \frac{M}{2} c_\sigma^2(t_0),$$

oder, wenn man bloß Glieder mit $k_\sigma^2(t_0)$ berücksichtigt und beachtet, daß $\mathfrak{M}/r_0$ das Potential II auf der Kugel ist,

$$(34) \quad II \cdot e = \frac{3}{10} \frac{e^2}{a} k_\sigma^2(t_0) + \frac{M}{2} c_\sigma^2(t_0) = \frac{\mu_0}{2} c_\sigma^2(t_0).$$

Diese Formel drückt die Grundvoraussetzung der Elektronentheorie aus, daß die dem Elektron erteilte und aus ihm beim Übergange in die Ruhe zu gewinnende Energie

1) G. Mie, l. c. p. 35, erste Gleichung, wenn bloß Glieder mit $c_\sigma^2(t)$ berücksichtigt werden.

gleich dem an der Kathode herrschenden Potential mal der Masse des Elektrons ist. Sie entspricht dem Grenzfalle, daß sich das Elektron durch die Abstoßung der Kathode ins Unendliche entfernt hat, so daß das gegenseitige Potential von Kathode und Elektron sich ganz in Bewegungsenergie des letzteren verwandelt hat. Geht man zum elektromagnetischen Maßsystem über, so folgt daraus die bekannte Beziehung

$$(35) \quad c_{\sigma}(t_0) = \sqrt{2\pi H}.$$

Diese Betrachtungen gelten, wie eine einfache Überlegung zeigt, für jede beliebige Form der Kathode.

Dieses Ergebnis bedarf möglicherweise einer Korrektur in dem Sinne, als vielleicht ein gewisser molekularer Widerstand zu überwinden ist, um überhaupt das Abschleudern des Elektrons von der Kathode zu ermöglichen, wenn materielle Träger der Elektronen angenommen werden; ferner wäre in diesem Falle auch die zur Zersplitterung der Atome nötige Arbeit zu berücksichtigen. Man erkennt hieraus, daß obige Gleichung in aller Strenge nur bei Annahme einer rein elektromagnetischen Masse der Elektronen gültig ist. Da sie sich erfahrungsmäßig gut bewährt hat, so würde dies allerdings für die Richtigkeit dieser Annahme sprechen.

Diese Betrachtungen lassen gleichzeitig den Grund erkennen, warum die Bewegung der Elektronen, soweit sie durch die Versuche verfolgbar ist, als rein fortschreitend angenommen werden kann. Bei der Kleinheit der Elektronen im Vergleich zu dem sie aussendenden Körper wird zunächst das von letzterem herrührende Feld in der ganzen Ausdehnung des Elektrons als homogen betrachtet werden können, so daß dieses beim Abschleudern keine Drehung besitzt. Der Einfluß der äußeren Kräfte während der überhaupt beim Versuche zu beobachtenden Zeit währt aber so kurz, daß die Wirkung der die rein fortschreitende Bewegung bestimmenden Komponenten $P_a \dots$, unvergleichlich größer als jene der eine Drehung verursachenden Kräftepaare von der Größenordnung $\frac{\partial P_a}{\partial y} a^2 \dots$ ist.

Wien, im Dezember 1903.

(Eingegangen 17. Dezember 1903.)