Theorie der rationalen algebraischen Punkt-Ebenen-Systeme.

Von

A. Voss in Dresden.

In einer früheren Arbeit*) bezeichnete ich als Punkt-Ebenen oder P-E-System das Gebilde, bei welchem überhaupt jedem Punkte des Raumes eine bestimmte durch ihn gehende Ebene, also auch umgekehrt jeder Ebene ein auf ihr liegender Punkt zugeordnet ist. Bei einem *rationalen algebraischen P-E-System* ist jedem Punkte x eine durch ihn gehende Ebene zugewiesen, deren Coordinaten rationale Functionen von x sind; es ist das Gebilde von Punkten und Flächenelementen, welches durch die Differentialgleichung:

$$f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + f_3 dx_3 + f_4 dx_4 = 0$$

dargestellt wird. Indem ich rücksichtlich der allgemeinen Theorie der P-E-Systeme auf die genannte Arbeit verweise, stelle ich mir hier die Aufgabe, den *Zusammenhang zwischen der Theorie der rationalen algebraischen P-E-Systeme oder des durch eine solche Differentialgleichung von möglichst allgemeiner Form dargestellten Gebildes und der der algebraischen Oberflächen sowie verwandter Untersuchungen zu erläutern*.

Dabei werde ich mich eines Theiles der für die Ebene geltenden Vorstellungen bedienen, welche ich in der Note: „Zur Theorie der algebraischen Differentialgleichungen ersten Grades erster Ordnung“ ausgeführt habe.

§ I enthält einleitende Bemerkungen, insbesondere auch die *Integrabilitätsbedingung in projectivischer Form*. In den §§ II, III untersuche ich die Beziehung der Brenn- und Wendefläche des Systems zu den ausgezeichneten Punkten desselben. Dabei ergeben sich verschiedene neue Definitionen dieser Flächen, welche an Stelle der Hesse'schen Fläche einer Oberfläche treten; so erscheint z. B. die Brennfläche in doppelter Weise als Enveloppe von ∞^3 sie mehrfach berührenden Curven; eine Erzeugung derselben, welche bei den algebraischen

*) Diese Annalen XXIII, S. 45.

Strahlensystemen zweiter Ordnung in die Kummer'sche Erzeugung der Brennfläche als Umhüllungsgebilde der Strahlen des Systems übergeht. Andere Beziehungen vermittelt die Polarentheorie; so entspricht z. B. der Wendefläche eindeutig eine Steiner'sche Kernfläche, sowie andere covariante Gebilde, deren Singularitäten bis zu einem gewissen Grade untersucht werden. Besonders einfach gestalten sich diese Verhältnisse für das P-E-System 2. Ordnung oder das demselben zugeordnete Strahlensystem 2. Ordnung 3. Classe. In § VI gebe ich eine an die erörterten Anschauungen sich anschliessende analytische Theorie dieses neuerdings von den Herren Reye und H. Stahl synthetisch untersuchten Gebildes.

Die Theorie der singulären Tangenten des Systems (§ VII—IX) zeigt die vollständigste Analogie mit den entsprechenden Problemen der Flächentheorie. Diese Uebereinstimmung geht soweit, dass viele aus der letzteren bekannten Zahlwerthe*) unverändert wiederkehren, obwohl ein directer Uebergang vom allgemeinen P-E-System zu dem speciellen Falle eines Flächenbüschels nicht stattfindet. Zur exacten Ausführung desselben würde es erforderlich sein, auch Systeme mit singulären Curven zu betrachten. Doch dürfte aus den vorliegenden Resultaten schon erhellen, dass fast alle Untersuchungen der algebraischen Flächentheorie ganz unmittelbar dem Studium der totalen Differentialgleichung $\sum f_i dx_i = 0$ subsumirt werden können.

§ I.

Das rationale algebraische P-E-System.

Bei Voraussetzung homogener Coordinaten ist die Gleichung der Ebene, welche im rationalen algebraischen P-E-System dem Punkte mit den Coordinaten x_1, x_2, x_3, x_4 (Punkt x) zugeordnet ist:

$$(1) \quad F = \sum X_i f_i = 0$$

wo die f_i homogene Functionen n . Ordnung der x_i sind, zwischen denen die Identität:

$$(2) \quad \sum x_i f_i = 0$$

besteht. Die Zuordnung (1) ist, wie man sieht, ein specieller Fall derjenigen, bei welcher überhaupt jedem Punkt eine Ebene zugewiesen ist; sie wird insbesondere durch die Zuordnung der Tangentenebenen eines Flächenbüschels zu ihren Berührungspunkten veranschaulicht. Gleichzeitig erhält auch der dualistische Fall:

$$\Phi = \sum U_i \varphi_i = 0$$

*) Wie z. B.: $11n - 24$, $5(n - 3)(7n - 12)$, $5n(7n^2 - 28n + 30)$, $2(n - 2)(3n - 2)$.

mit der Identität $\sum u_i \varphi_i = 0$, wo die φ_i homogene Functionen der Ebenencoordinaten u_i sind, ein selbständiges Interesse; doch werde ich von einer besonderen Behandlung desselben absehen.

Bezeichnet man die Differentialquotienten der f_i durch Indices, so dass:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_k} = f_{ik}, \quad \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_l} = f_{ikl}, \dots$$

gesetzt wird, so hat man die Identitäten:

$$-f_k = \sum x_i f_{ik}, \\ n f_k = \sum x_i f_{ki},$$

$$(3) \quad (n+1)f_k = \sum x_i (f_{ki} - f_{ik}), \quad (n-1)f_k = \sum x_i (f_{ik} + f_{ki}), \\ \sum x_i f_{ikm} + f_{km} + f_{mk} = 0 \\ \sum x_i f_{iklm} + f_{klm} + f_{ilm} + f_{mli} = 0 \dots,$$

mithin kann die Gleichung (1) auch in der Form

$$(4) \quad (n+1)F = \sum (X_k x_i - X_i x_k) f_{ki} = \sum (X_k x_i - X_i x_k) (f_{ki} - f_{ik}) = 0$$

geschrieben werden. Die f_i haben daher nach (3) die folgende Gestalt:*)

$$(5) \quad \begin{aligned} f_1 &= x_2 A + x_3 B + x_4 C, \\ f_2 &= -x_1 A + x_3 D + x_4 E, \\ f_3 &= -x_1 B - x_2 D + x_4 F, \\ f_4 &= -x_1 C - x_2 E - x_3 F \end{aligned}$$

wo die $A, B, \dots, F$ homogene Functionen $n-1$. Ordnung in den x sind. Setzt man für die $X_k x_i - X_i x_k$ die Liniencoordinaten p_{ik} , so ergibt sich für den übrigens nicht weiter zu behandelnden Fall $n=1$ aus (4) die Gleichung des linearen Complexes, wie bekannt.

Dem Punkte $x + \lambda y$ entspricht allgemein die Ebene:

$$0 = \sum X_i \left[f_i + \lambda \sum y_k f_{ik} + \frac{\lambda^2}{2} \sum y_k y_l f_{ikl} + \dots \right];$$

soll dieselbe durch den Punkt x gehen, so muss, da für $X = x$ das erste Glied der vorstehenden Gleichung nach (2) verschwindet,

$$0 = \sum y_k f_k + \frac{\lambda}{2} \sum y_k y_i (f_{ik} + f_{ki}) + \frac{\lambda^2}{6} \sum y_k y_l y_i f_{ikl} + \dots$$

sein. Hieraus folgt:

Auf jeder Geraden liegen $n-1$ Punkte, deren zugeordnete Ebene durch diese Gerade geht.

*) Vgl. Kummer, Theorie d. algebr. Strahlensysteme, S. 49.

Dagegen drücken die Gleichungen

$$\sum y_i f_i = 0,$$

$$\sum y_i y_k (f_{ik} + f_{ki}) = \sum y_i y_k f_{ik} = 0$$

aus, dass die Richtung (xy) die einer von x auslaufenden Haupttangenten des Systems ist. Die Gleichung der Brennfläche des Systems wird daher:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 2f_{11} & f_{12} + f_{21} & f_{13} + f_{31} & f_{14} + f_{41} \\ f_{12} + f_{21} & 2f_{22} & f_{23} + f_{32} & f_{24} + f_{42} \\ f_{13} + f_{31} & f_{23} + f_{32} & 2f_{33} & f_{34} + f_{43} \\ f_{14} + f_{41} & f_{24} + f_{42} & f_{34} + f_{43} & 2f_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

die der Wendefläche:

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{14} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} & f_{24} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} & f_{34} \\ f_{41} & f_{42} & f_{43} & f_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

beide sind, wie man sieht, Flächen der $4(n-1)$. Ordnung.

Ich bemerke hier zunächst einen allgemeinen Satz über geränderte Determinanten, welcher auch bei anderen Gelegenheiten sich nützlich erweisen mag.

Bezeichnet man die *nicht symmetrische* Determinante der n^2 Elemente a_{ik} , horizontal und vertical gerändert mit k Reihen von Grössen

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k}, \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2k}, \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nk}, \end{array}$$

wobei in bekannter Weise die übrig bleibenden Stellen durch Nullen ersetzt werden, durch:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{vmatrix},$$

dagegen die *symmetrische* Determinante der $A_{ik} = a_{ik} + a_{ki}$, auf dieselbe Weise gerändert, durch:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_k \end{pmatrix},$$

und endlich die mit denselben Grössen geränderte *schiefe* Determinante der $(ik) = a_{ik} - a_{ki}$ durch:

$$(\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_k),$$

so bestehen die Identitäten:

$$2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix},$$

$$4 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} \end{pmatrix} + (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_{n-2}),$$

in welcher letzteren für ein gerades n der zweite Term das Quadrat eines Pfaff'schen Ausdruckes ist, für ein ungerades n aber identisch verschwindet.

Der Beweis hierfür ergibt sich sehr leicht. Denn ersetzt man in der Determinante:

$$4 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} \end{vmatrix}$$

jedes Glied $2a_{ik}$ durch $a_{ik} + a_{ki} + a_{ik} - a_{ki}$ oder $A_{ik} + (ik)$ so wird die Entwicklung derselben, da die Elemente a_{ik} überhaupt nur in zweiter Dimension auftreten, aus drei Gliedern bestehen, deren erstes und letztes die in der zweiten Identität rechts auftretenden Terme bilden, während das mittlere, die (ik) linear enthaltende, wegen der Beziehung:

$$(ik) + (ki) = 0$$

verschwindet. Auf demselben Wege erkennt man die erste Identität.

Man hat nun insbesondere:

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & a_{12} + a_{21} & a_{13} + a_{31} & u \\ a_{12} + a_{21} & 2a_{22} & a_{23} + a_{32} & v \\ a_{13} + a_{31} & a_{23} + a_{32} & 2a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & u \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix} + (\alpha_u + \beta_v + \gamma_w)^2$$

wo:

$$\alpha = a_{32} - a_{23},$$

$$\beta = a_{13} - a_{31},$$

$$\gamma = a_{21} - a_{12}$$

gesetzt ist. Somit findet man:

$$x_4^2 \left[\frac{4}{n} \Delta + \frac{\Delta'}{(n-1)^2} \right] = [f_3(f_{12} - f_{21}) + f_2(f_{31} - f_{13}) + f_1(f_{23} - f_{32})]^2.$$

Mit Hülfe der Identitäten (3) aber ergibt sich:

$$\left(\frac{4}{n} \Delta + \frac{\Delta'}{(n-1)^2} \right) (n+1)^2 = [(f_{34} - f_{43})(f_{12} - f_{21}) + (f_{31} - f_{13})(f_{24} - f_{12}) + (f_{14} - f_{41})(f_{23} - f_{32})]^2.$$

Die Bedingung der Integrabilität des P-E-Systems (specielles System erster Art) ist mithin durch die eine Gleichung:

(6) $0 = (f_{34} - f_{43})(f_{12} - f_{21}) + (f_{31} - f_{13})(f_{24} - f_{12}) + (f_{14} - f_{41})(f_{23} - f_{32})$
 oder durch je eine der vier bis auf einen Factor x_i äquivalenten Bedingungen ausgedrückt:

$$f_1(f_{23} - f_{32}) + f_2(f_{31} - f_{13}) + f_3(f_{12} - f_{21}) = 0,$$

$$f_1(f_{24} - f_{42}) + f_2(f_{41} - f_{14}) + f_4(f_{12} - f_{21}) = 0,$$

$$f_1(f_{34} - f_{43}) + f_3(f_{41} - f_{14}) + f_4(f_{13} - f_{31}) = 0,$$

$$f_2(f_{34} - f_{43}) + f_3(f_{42} - f_{24}) + f_4(f_{23} - f_{32}) = 0,$$

deren jede wieder die Form der Integrabilitätsbedingung eines dreigliedrigen Differentialausdruckes besitzt.

Man entnimmt zunächst den folgenden Satz:

Brennfläche und Wendefläche des Systems berühren sich überall, wo sie sich treffen, also in einer Curve $8(n-1)^2$ Ordnung.

Ist das ganze System überhaupt ein specielles erster Art, d. h. verschwindet die Bedingung (6) identisch, so möge in der ersten der vorstehenden Identitäten durch x^{2n-1} dividirt, die Quotienten $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ durch ξ_1, ξ_2, ξ_3 und die resultirenden Functionen $f_1 f_2 f_3 f_4$ durch $F_1 F_2 F_3 F_4$ bezeichnet werden. Es finden dann, falls man mit M einen Multiplikator bezeichnet, die Gleichungen statt:

$$MF_1 = \frac{\partial R}{\partial \xi_1},$$

$$MF_2 = \frac{\partial R}{\partial \xi_2},$$

$$MF_3 = \frac{\partial R}{\partial \xi_3}.$$

Da

$$\xi_1 F_1 + \xi_2 F_2 + \xi_3 F_3 + F_4 = 0$$

ist, so wird:

$$-MF_4 = \xi_1 \frac{\partial R}{\partial \xi_1} + \xi_2 \frac{\partial R}{\partial \xi_2} + \xi_3 \frac{\partial R}{\partial \xi_3} = -x_4 \frac{\partial R}{\partial x_4}.$$

Setzt man wieder für die ξ ihre Werthe ein, so entsteht:

$$Mf_1 = x_1^{n+1} \frac{\partial R}{\partial x_1},$$

$$Mf_2 = x_1^{n+1} \frac{\partial R}{\partial x_2},$$

$$Mf_3 = x_1^{n+1} \frac{\partial R}{\partial x_3},$$

$$Mf_4 = x_1^{n+1} \frac{\partial R}{\partial x_4},$$

wo R eine Function der Grössen $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$ ist. Mithin ist das Integral von:

$$\sum f_i dx_i = 0$$

gegeben durch:

$$R = \text{const.}$$

Diese Gleichung stellt im allgemeinen ein Büschel von Flächen vor. Und so hat man den Satz:

Die speciellen rationalen P-E-Systeme erster Art werden durch die Tangentenebenen eines — im allgemeinen transcendenten — Flächenbüschels gebildet.

§ II.

Die singulären Punkte des Systems und die Knotenpunkte der Brennfläche.

Die Functionen f_i haben im allgemeinen, ihrer oben (I, 5) angegebenen Form zufolge, eine gewisse Zahl gemeinsamer Verschwindungspunkte. Nach bekannten Betrachtungen erhält man als Anzahl derselben:

$$n^3 - n^2 + n - 1.$$

Diese Punkte, die *singulären Punkte des Systems**), sind conische Knotenpunkte der Wendefläche, durch welche die Fläche $2(n-1)$. Ordnung der Integrabilität einfach hindurchgeht. Während von jedem Punkte im allgemeinen zwei Haupttangente auslaufen, gehen durch einen singulären Punkt x unendlich viele, welche einen Kegel zweiten Grades $\sum y_i y_k f_{ik} = 0$ bilden, unter dessen Kanten sich 6 stationäre Haupttangente befinden.

Der Tangentenkegel der Wendefläche in einem singulären Punkte wird von den Haupttangente des Systems gebildet, die von diesem auslaufen. Es geht dies aus der leicht zu erweisenden Gleichung:

$$a_x b_x \sum y_i y_k \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_k} = \left| \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \right| \sum y_i y_k f_{ik}$$

hervor, welche für einen singulären Punkt x bestehen muss.

Aber auch die Brennfläche hat in den singulären Punkten conische Knoten. Und die Gleichung des Tangentenkegels der Brennfläche in einem dieser Punkte ist, wenn man zur Abkürzung $\sum y_i f_{ii}$ gleich α_i setzt:

$$\frac{c_x^2}{(n-1)^2} \sum \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = \begin{pmatrix} \alpha & c \\ \alpha & c \end{pmatrix} = 0.$$

Nach der in § I entwickelten Identität erhält man aber hierfür:

*) Die singulären Punkte können zum Theil oder sämmtlich durch *singuläre Curven* vertreten werden. In den folgenden Untersuchungen ist dieser Fall grundsätzlich ausgeschlossen.

$$4 \begin{vmatrix} \alpha & c \\ \alpha & c \end{vmatrix} + \beta_y^2 = 0$$

wo β_y einen Pfaff'schen Ausdruck bezeichnet, oder nach einfacher Umformung:

$$-4 \begin{vmatrix} c \\ c \end{vmatrix} \sum y_i y_k f_{ik} + \beta_y^2 = 0.$$

Die beiden Tangentenkegel berühren sich mithin doppelt längs der beiden durch die Ebene $\beta_y = 0$ aus ihnen ausgeschnittenen Geraden.

Dies Verhalten kann man auch direct daraus entnehmen, dass beide Flächen sich überhaupt in ihren gemeinsamen Punkten berühren. Die Ebene $\beta_y = 0$ ist daher zugleich die Tangentenebene der Fläche der Integrabilitätsbedingung im singulären Punkte. Bemerkt man, dass — vergl. § VII, — für $n=2$ die Brennfläche die Kummer'sche Brennfläche des zu dem rationalen P-E-System gehörigen Strahlensystems 2. Ordnung 3. Classe ist, welche von Strahlen doppelt berührt wird, zu denen insbesondere die von dem singulären Punkte auslaufenden Haupttangente gehören, sowie dass alle 15 Knotenpunkte jener Fläche von gleichartiger Beschaffenheit sind, so hat man den Satz:

In jedem Knotenpunkte der Kummer'schen Brennfläche des Strahlensystems [2, 3] haben die beiden Tangentenkegel zweiten Grades, welche von einem solchen Punkte an die Grenzfläche gelegt werden können, nämlich der einhüllende Kegel des conischen Punktes und der eigentliche Tangentenkegel zweiten Grades (ausser demselben sind noch vier Tangentenbüschel ersten Grades vorhanden) eine doppelte Berührung.

Höhere Singularitäten, wie sie z. B. durch das Verschwinden aller $f_{ik} + f_{ki}$ bedingt werden, werde ich hier nicht untersuchen. Dagegen sieht man ohne Weiteres, dass, so oft der Factor $\begin{vmatrix} c \\ c \end{vmatrix}$ verschwindet, der Tangentenkegel der Brennfläche in eine Doppelenebene degenerirt. Es wird dies dann der Fall sein, wenn zwei singuläre Punkte unendlich nahe gerückt sind. Denn damit dem Punkte x , für den die f_i verschwinden, ein singulärer Punkt $x + d\lambda y$, wo die y_i der willkürlichen Ebene $c_y = 0$ angehören, verbunden sei, muss es möglich sein, die fünf Gleichungen:

$$\sum y_k f_{ik} = 0, \quad c_y = 0$$

für beliebige c zu lösen. Das ist aber nur möglich, wenn die 4 ersten Gleichungen sich auf 2 reduciren, d. h. wenn alle Unterdeterminanten dritten Grades in der Functionaldeterminante der f_i verschwinden und umgekehrt. Hierzu ist im allgemeinen nur erforderlich, dass eine einzige dieser Unterdeterminanten Null sei, wie aus der leicht zu erweisenden Gleichung:

$$x_i x_k \left| \begin{matrix} d \\ c \end{matrix} \right| = c_x d_x \Delta_{ik}$$

hervorgeht. Demnach hat man:

Rücken zwei singuläre Punkte zusammen, so erhält die Brennfläche daselbst einen uniplanaren Knotenpunkt, die Wendefläche einen dreifachen Punkt.

Die Brennfläche hat ausserdem noch $10(n-1)^3$ Knotenpunkte zweiter Art, in denen die sämtlichen Unterdeterminanten dritten Grades von Δ' verschwinden,*) in denen also:

$$f_{ik} + f_{ki} = \alpha_i \beta_k + \alpha_k \beta_i$$

wird. An diesen Stellen zerfällt daher die Fläche zweiten Grades

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$

deren durch den Punkt x gehende Erzeugende die beiden Haupttangenten liefern, in zwei Ebenen. Von dieser coincidirt aber die eine mit der Ebene $\sum y_i f_i = 0$ selbst, denn aus den angeführten Gleichungen ergibt sich durch Multiplication mit den x_i und Addition:

$$(n-1)f_k = \alpha_x \beta_k + \alpha_k \beta_x,$$

$$0 = \alpha_x \beta_x$$

also für

$$\beta_x = 0, \quad f_k = \alpha_x \beta_k$$

und

$$\sum y_i y_k (f_{ik} + f_{ki}) = \alpha_y \sum y_i f_i.$$

Einem solchen Punkte ist daher eine gewisse Gerade zugeordnet, die Schnittlinie der Ebenen:

$$\alpha_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0,$$

sie mag die dem *Knoten zweiter Art* zugeordnete Gerade heissen. — Von einem Knoten zweiter Art gehen, wie man sieht, ∞^1 Haupttangenten aus, welche ein ebenes Büschel bilden, unter dessen Strahlen sich drei stationäre Haupttangenten befinden.

Der Tangentenkegel der Brennfläche im Knoten zweiter Art, für den die obigen Gleichungen gelten, hat zur Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} & \alpha_1 & \beta_1 \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} & \alpha_2 & \beta_2 \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} & \alpha_3 & \beta_3 \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} & \alpha_4 & \beta_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Geometrie des Raumes, 3. Aufl. Bd. II, S. 539).

falls

$$\psi_{ik} = \sum y_l (f_{lik} + f_{ikl})$$

gesetzt wird, wie sich durch directe Bildung der Form

$$\sum y_i y_k \frac{\partial^2 \Delta'}{\partial x_i \partial x_k}$$

leicht ergibt.

In dem besonderen Falle $n = 2$ entspringt hieraus wieder eine Eigenschaft der Kummer'schen Brennfläche. Denn es sind die f_{ik} Constanten, und es wird:

$$\sum y_i (f_{kit} + f_{ikl}) = \sum f'_{ik} + f'_{ki},$$

wobei das Zeichen f'_{ik} anzeigen soll, dass statt der Variablen x_i die y_i substituirt sind. Mithin ist die Gleichung des Tangentenkegels durch die mit den α und β geränderte Determinante der $f'_{ik} + f'_{ki}$ gegeben. Aber diese gleich Null gesetzt liefert den Ort der Punkte, deren conische Polare $\sum z_i z_k f_{ik}$ die Gerade $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$ berührt. Somit hat man:

Der Tangentenkegel der Kummer'schen Brennfläche des Strahlensystems [2, 3] in Bezug auf einen der Knotenpunkte ist zugleich der Ort der Punkte, deren conische Polarflächen die diesem Punkte zugeordnete Gerade berühren.

§ III.

Covariante Flächen des Systems.

Durch die Gleichung (1) des § I wird jedem Punkte ein ebenes Büschel von durch ihn gehenden Geraden in der zugehörigen Ebene zugewiesen. Diese bilden die Tangenten des Systems, der Punkt heisse ihr Berührungspunkt, die Ebene eine Tangentenebene. Jede Gerade des Raumes ist in $n - 1$ ihrer Punkte Tangente des Systems.

Die Tangentenebenen des Systems, welche durch einen Punkt y des Systems gehen, haben ihre Berührungspunkte auf der Fläche n . Ordnung:

$$P = \sum y_i f_i = 0$$

der n . Polare von y .) Die Tangentenebene von P im Punkte y selbst ist die diesem Punkte zugeordnete Ebene. Jene Fläche enthält also auch die Tangentialpunkte aller durch y gehenden Geraden. Hieraus folgt weiter:

Die durch einen Punkt y gehenden Haupttangente des Systems bilden einen Kegel $n(n-1) - 2$. Ordnung, der sich auf den Schnitt

*) Ueber die hier auftretende Polarentheorie vgl.: Diese Annalen XXIII, S. 159.

von P mit der im gewöhnlichen Sinne genommenen Polare von P in Bezug auf den Punkt y stützt.

Die Haupttangente bilden daher einen Complex $(n+1)(n-2)$. Grades, dessen Complexkegel für jeden beliebigen Punkt $n(n-1)(n-2)-6$ Rückkehrkanten und $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$ Doppelkanten hat, und für den die seiner Spitze zugehörige Ebene eine Doppeltangenteebene ist. Die Rückkehrkanten sind stationäre Haupttangente des Systems. Weiter findet man:

Die Haupttangente, welche eine Gerade schneiden, haben ihre Berührungspunkte, d. h. diejenigen Punkte, in denen sie Haupttangente sind, auf einer Fläche $3(n-1)+2$. Ordnung.

Die Gleichung dieser Fläche erhält man durch Elimination der y aus den Gleichungen:

$$\sum y_i f_i = 0,$$

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0,$$

$$\alpha_y = 0,$$

$$\beta_y = 0.$$

Die hieraus entspringende Determinantengleichung:

$$V = \begin{vmatrix} f & \alpha & \beta \\ f & \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0$$

kann in den beiden Formen:

$$\alpha_x^2 \begin{vmatrix} \beta \\ \beta \end{vmatrix} - 2\alpha_x \beta_x \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} + \beta_x^2 \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} = 0,$$

$$\alpha_x^2 \begin{vmatrix} \beta \\ \beta \end{vmatrix} - \alpha_x \beta_x \left[\begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix} \right] + \beta_x^2 \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} = 0$$

geschrieben werden. Man sieht zunächst, dass V die Gerade $(\alpha\beta)$ zur Doppellinie hat. Ausserdem hat aber V eine Doppelcurve vom Grade n^2 , welche sich in $n-1$ Punkten auf die Gerade $(\alpha\beta)$ stützt, und durch alle singulären Punkte geht. Denn die n . Polaren aller Punkte einer Geraden $(\alpha\beta)$ bilden ein Büschel mit der gemeinsamen Basiscurve n^2 Ordnung, welche offenbar $n-1$ Punkte auf $(\alpha\beta)$ selbst hat. Und für jeden Punkt dieser Curve muss die zugeordnete Ebene durch $(\alpha\beta)$ gehen, er muss daher ein Doppelpunkt von V sein, was sich übrigens auch leicht aus der analytischen Form von V erkennen lässt.*) Jeder Geraden $(\alpha\beta)$ entspricht so eine solche Curve n^2 Ordnung, sie möge als *Polare* derselben bezeichnet werden. Endlich sei noch bemerkt, dass V einfach durch alle Knotenpunkte zweiter Art hindurchgeht.

*) Vgl. hierüber § VII.

Die in einer Ebene $\alpha_x = 0$ liegenden Haupttangente haben ihre Berührungspunkte auf der Curve $3(n-1)$. Ordnung:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) \equiv \left|\frac{\alpha}{\alpha}\right| = 0, \quad \alpha_x = 0.$$

Diese Curve ist die Hesse'sche Curve des in jener Ebene liegenden Systems von Punkten und zugeordneten Geraden; jedem Punkte ist daselbst eine durch ihn gehende Tangente zugeordnet. Andererseits erkennt man aus der bekannten Ordnung der Hesse'schen Curve wieder die Ordnung von V , sowie auch dass in jeder Ebene durch $(\alpha\beta)$ $n^2 - n + 1$ Punkte der Doppelcurve von V liegen, etc.

Jede der ∞^4 Flächen V berührt die Brennfläche überall wo sie dieselbe trifft, also in einer Curve $2(n-1)(3n-1)$. Ordnung.

Der Beweis dieses Satzes, welcher die Brennfläche als Enveloppe eines den Geraden des Raumes zugeordneten Flächensystems charakterisirt, beruht auf der bekannten Identität:

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) \left(\frac{\beta}{\beta}\right) = \Delta' \left(\frac{\alpha}{\alpha} \frac{\beta}{\beta}\right) + \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

welche auf V angewandt, liefert:

$$V \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = \Delta' \alpha_x^2 \left(\frac{\alpha}{\alpha} \frac{\beta}{\beta}\right) + \left[\alpha_x \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \beta_x \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)\right]^2.$$

Daraus geht hervor, dass der Schnitt von $\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) V$ mit Δ' stets aus der doppeltzählenden Curve:

$$\Delta' = 0, \quad \alpha_x \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - \beta_x \left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = 0$$

besteht. Die Fläche $\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right) = 0$ ist aber der Ort der Punkte, deren conische Polarflächen $\Sigma y_i y_k f_{ik} = 0$ die Ebene $\alpha_y = 0$ berühren. Auch diese Fläche berührt die Brennfläche nach einer Curve $6(n-1)^2$. Ordnung. Die Berührungscurve von V und Δ' kann man auch als gemeinsame Curve der Matrix:

$$\begin{vmatrix} 2f_{11} & f_{12} + f_{21} & f_{13} + f_{31} & f_{14} + f_{41} & \alpha_x \beta_1 - \alpha_1 \beta_x \\ f_{12} + f_{21} & 2f_{22} & f_{23} + f_{32} & f_{24} + f_{42} & \alpha_x \beta_2 - \alpha_2 \beta_x \\ f_{13} + f_{31} & f_{23} + f_{32} & 2f_{33} & f_{34} + f_{43} & \alpha_x \beta_3 - \alpha_3 \beta_x \\ f_{14} + f_{41} & f_{24} + f_{42} & f_{34} + f_{43} & 2f_{44} & \alpha_x \beta_4 - \alpha_4 \beta_x \end{vmatrix} = 0$$

ansehen. Man erkennt dann ebenfalls ihre einfachen Punkte in den Knoten zweiter Art, sowie in den Schnitten der Geraden $(\alpha\beta)$ mit der Brennfläche, ferner ihre Doppelpunkte in den singulären Punkten. Endlich kann man den Tangentenkegel von V in diesen letzteren Punkten auch in die Form bringen:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} \sum y_i y_k f_{ik} + (\alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x) \gamma_y = 0$$

wonach der Schnitt von V und Δ daselbst zum Theil aus den Fortschreitungsrichtungen:

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0, \quad \alpha_x \beta_y - \alpha_y \beta_x = 0$$

besteht, wie zu erwarten war.

Aus dem Bewiesenen geht hervor:

Die Hesse'sche Curve in irgend einer Ebene berührt die Brennfläche überall, wo sie dieselbe trifft, also in $6(n-1)^2$ Punkten, oder:

Die Congruenz der parabolischen Haupttangente ist von der Classe $6(n-1)^2$.

Der Hesse'schen Curve, dem Orte der Berührungspunkte derjenigen Haupttangente, die in einer Ebene liegen, entspricht in gewisser Beziehung dualistisch eine zweite Curve, welche der Ort der Berührungspunkte von solchen Haupttangente ist, die durch einen Punkt y gehen. Diese zweite Curve ist der Schnitt der n Polare von y in Bezug auf jene letztere Fläche, also von $n(n-1)$. Ordnung. Bezeichnet man sie als Polcurve des Punktes, so hat man folgenden Satz:

Die Polcurve jedes Punktes berührt die Brennfläche überall, wo sie dieselbe trifft, also in $2n(n-1)^2$ Punkten, oder:

Die Ordnung der Congruenz der parabolischen Haupttangente ist gleich $2n(n-1)^2$.

Durch die letzten Bemerkungen wird der bekannte Kummer'sche Satz, nach welchem jeder Strahl eines Strahlensystems Doppeltangente der zugehörigen Brennfläche ist, in folgender Weise verallgemeinert:

Jede Hesse'sche Curve des Systems ist $6(n-1)^2 n$ -fache, jede Polcurve $2(n-1)^2 n$ -fache Tangente der Brennfläche. Für den Fall $n=2$ wird jede Hesse'sche Curve aus den 3 Strahlen in der betreffenden Ebene, jede Polcurve aus den 2 durch den Pol gehenden Strahlen bestehen. Ganz analoge Verhältnisse finden für die höheren algebraischen Strahlensysteme 2. Ordnung statt.

Auch wird jede Hesse'sche Curve von $6(n-1)^2 n$ unendlich benachbarten Hesse'schen Curven, jede Polcurve von $2(n-1)^2 n$ benachbarten in ebenso viel Punkten getroffen, welche man als Focalpunkte dieser Curven bezeichnen kann. Und der Ort dieser Focalpunkte ist die Brennfläche selbst. Dagegen ist die Brennfläche nicht mehr die Enveloppe der Focalebenen, wie dies in dem Falle der geradlinigen Strahlensysteme stattfindet.

Den Beweis des oben angegebenen Verhaltens der Polcurven kann man einfach daraus entnehmen, dass jede Polcurve als Schnitt von zwei Flächen V betrachtet werden kann, welche zu sich schneidenden Geraden gehören. Ein solcher Schnitt ist von der Ordnung $(3n-1)^2$;

er besteht aus der Hesse'schen Curve in der Ebene jener beiden Geraden und der Polcurve ihres Schnittpunktes sowie einer ergänzenden Curve, welche von denjenigen Punkten gebildet wird, deren Haupttangente sich auf jene Geraden stützen.

Man kann aber auch ganz direct zeigen, dass die drei Tangentenebenen t_1, t_2, t_3 der Brennfläche $\Delta' = 0$, der n . Polare

$$\sum z_i f_i = 0$$

eines Punktes z , und der Polarfläche von z in Bezug auf die letztere Fläche, $\sum z_i z_k f_{ik} = 0$, in einem gemeinsamen Punkte x ein Büschel bilden. Denn es ist

$$t_1 = \sum \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} Y_i = \sum Y_i \Delta'_{ik} (f_{ik} + f_{kii}),$$

$$t_2 = \sum z_i f_{ii} Y_i,$$

$$t_3 = \sum z_i z_k (f_{ik} + f_{kii}) Y_i,$$

wo die Y laufende Coordinaten sind. Nun ist aber

$$\sum Y_i Y_k f_{ik} = 0$$

eine Kegelfläche, deren Spitze in y liegt, und es ist:

$$\sum y_i (f_{ik} + f_{kii}) = 0, \quad \Delta'_{ik} = y_i y_k.$$

Daher muss man setzen können

$$z_i = x_i + \lambda y_i$$

und hiernach wird:

$$t_1 = \sum Y_i (f_{kii} + f_{ik}) y_i y_k,$$

$$t_2 = \sum (x_i f_{ii} + \lambda y_i f_{ii}) Y_i,$$

$$\begin{aligned} t_3 &= \sum (x_i x_k + 2\lambda y_i x_k + \lambda^2 y_i y_k) (f_{ik} + f_{kii}) Y_i \\ &= 2(n-1) \sum (x_i f_{ii} + \lambda y_i f_{ii}) Y_i + \lambda^2 \sum y_i y_k (f_{ik} + f_{kii}) Y_i \\ &= 2(n-1) t_2 + t_1 \lambda^2, \end{aligned}$$

womit die Behauptung erwiesen ist.

Die Fläche V steht auch zur Wendefläche Δ in gewisser Beziehung. Aus der Identität:

$$\Delta \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha \\ \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta \\ \beta \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha \\ \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \beta \\ \alpha \end{vmatrix}$$

hat man nämlich:

$$V \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| = \alpha_x^2 \Delta \left| \begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & \beta \end{smallmatrix} \right| + \left\{ \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta \end{smallmatrix} \right| \alpha_x - \left| \begin{smallmatrix} \alpha \\ \beta_x \end{smallmatrix} \right| \right\} \left\{ \left| \begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| \alpha_x - \left| \begin{smallmatrix} \beta \\ \alpha \end{smallmatrix} \right| \beta_x \right\}.$$

Demnach zerfällt der Schnitt von V und Δ in zwei Curven $2(n-1)(3n-1)$ Ordnung. Für die eine Curve ist längs der die Gerade $(\alpha\beta)$ schneidenden Haupttangente die ihrem Berührungspunkte zugeordnete Ebene stationär, für die andere findet diese letztere Eigenschaft gerade bei der anderen, $(\alpha\beta)$ im allgemeinen nicht schneidenden Haupttangente statt. Und ebenso zerfällt der Schnitt der Hesse'schen Curve mit der Wendefläche in zwei je $6(n-1)^2 n$ Punkte enthaltende Gruppen, welche durch die entsprechende geometrische Bedeutung sich unterscheiden.

§ IV.

Fortsetzung.

Soll die n . Polare von y einen Doppelpunkt haben, so müssen die vier Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0$$

bestehen. Daraus folgt:

Der Ort der Doppelpunkte der n . Polaren ist die Wendefläche des Systems.

Die Punkte, deren n . Polaren einen Doppelpunkt haben, liegen auf einer Fläche $4(n-1)^3$. Ordnung, der *Steiner'schen Fläche S des Systems*. Die *Steiner'sche Fläche wird gleichzeitig umhüllt von den Ebenen, welche den Doppelpunkten der Polaren, d. h. den Punkten der Wendefläche zugeordnet sind.*

Denn aus den Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = 0,$$

$$\sum dy_i f_{ik} + \sum y_i f_{ik} dx_i = 0,$$

welche für jeden benachbarten Punkt $y + dy$ der Steiner'schen Fläche bestehen, folgt durch Multiplication mit den x_i und Addition:

$$\sum y_i f_i = 0, \quad \sum dy_i f_i = 0,$$

wonach sich y und $y + dy$ gleichzeitig in der Ebene

$$\sum z_i f_i = 0$$

befinden. Wendefläche und Steiner'sche Fläche sind eindeutig auf einander bezogen; jedem Punkte x der ersten entspricht der Punkt y der zweiten. Derselbe liegt auf derjenigen Haupttangente, längs welcher die zugehörige Ebene *nicht* stationär sich verhält.

Jede Ebene, welche zu einem Punkte $x + dx$ gehört, der einem Punkte x der Wendefläche benachbart ist, enthält den zugehörigen Punkt der Steiner'schen Fläche. Denn die Gleichung einer solchen Ebene ist:

$$\sum Z_i f_i + \sum Z_i f_{ik} dx_k = 0$$

und sie ist befriedigt für $Z = y$.

Eine zweite Fläche Ψ 4 $(n-1)^3$ Ordnung ist ebenfalls der Wendefläche eindeutig zugeordnet, sie wird gebildet von den Punkten y' , welche durch die Gleichungen

$$\sum y'_i f_{ki} = 0$$

bestimmt sind. Die Verbindungslinie (xy') zeigt die Richtung derjenigen Haupttangente an, längs welcher die x zugehörige Ebene sich stationär verhält.

Endlich ist der Ort der Punkte, deren conische Polaren

$$\sum y_i y_k f_{ik} = 0$$

einen Doppelpunkt haben, die Brennfläche $\Delta' = 0$, und der Ort dieser Kegelspitzen selbst eine Fläche Φ von der Ordnung 4 $(n-1)^3$, welche eindeutig auf die Brennfläche bezogen ist. Die Fläche Φ enthält, den 10 $(n-1)^3$ Knoten zweiter Art der Brennfläche entsprechend, 10 $(n-1)^3$ gerade Linien.

Für die Punkte x der gemeinsamen Berührungscurve von Δ und Δ' liegen x und die zugehörigen Punkte der drei Flächen S , Φ , Ψ in einer Geraden, der entsprechenden parabolischen Tangente und bilden auf jener eine Gruppe von vier Punkten des constanten Doppelverhältnisses $\frac{n}{n-1}$.

Den Punkten einer Geraden entsprechen Ebenen, welche eine rationale Developpabele n . Klasse umhüllen. Da durch die Gerade selbst $n-1$ Ebenen gehen, so ist jedem Punkte derselben eben vermöge dieser Developpabeln seine Ebene eindeutig zugeordnet. Die Rückkehrcurve einer solchen Developpabeln ist bekanntlich von der 3 $(n-2)$. Ordnung, sie berührt die Steiner'sche Fläche überall, wo sie dieselbe trifft. Somit ist auch die Steiner'sche Fläche als Enveloppe von ∞^4 Curven charakterisirt.

Den Punkten einer Ebene entspricht eine Fläche Θ von der Classe n^2 , welche jene Ebene zur $n^2 - n + 1$ -fachen Tangentenebene hat.*) Auch diese Fläche muss die Steiner'sche Fläche längs einer ganzen Curve berühren. Es ist leicht, einige charakteristische Eigenschaften von Θ zu ermitteln.

*) Die Classe erniedrigt sich jedesmal um eine Einheit, so oft die Ebene durch einen der singulären Punkte geht.

Denn zu dem Punkte x der Ebene $a_x = 0$ gehört die Ebene

$$\sum y_i f_i = 0,$$

zu dem benachbarten Punkte $x + dx$ also:

$$\sum y_i f_i + \sum y_i f_{ik} dx_k = 0.$$

Der zugehörige Punkt y der Fläche Θ ist mithin bestimmt durch die vier Gleichungen:

$$\sum y_i f_{ik} = \mu a_k.$$

Soll nun der Punkt y in der Ebene $a_x = 0$ selbst liegen, so hat man den letzteren noch die Gleichung:

$$a_y = 0$$

hinzuzufügen. Damit aber hat man als Curve derjenigen Punkte x , denen Punkte y in der Ebene $a_x = 0$ entsprechen:

$$a_x = 0, \quad \left| \frac{a}{a} \right| = 0.$$

Es ist das die Hesse'sche Curve in jener Ebene. Und so erhält man den Satz:

Die Fläche Θ schneidet die Ebene, zu welcher sie gehört, in der Steiner-Cayley'schen Curve, welche von den in dieser Ebene liegenden Haupttangente des Systems umhüllt wird.

Da nun die Steiner-Cayley'sche Curve von der Ordnung $2(n-1)^2$ ist, $12(n-1)(n-2)$ Rückkehrpunkte und ausser den $n^2 - n + 1$ Doppelpunkten, welche mit den Berührungspunkten von Θ und seiner zugehörigen Ebene zusammenfallen, noch

$$\frac{3}{2} (n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 1)$$

Doppelpunkte besitzt, so ergibt sich:*)

Die Fläche Θ ist von der Classe n^2 , der Ordnung $3(n-1)^2$, die Ordnung ihrer Doppel- und Rückkehrcurve ist

$$\frac{3}{2} (n-1)(n-2)(3n^2 - 3n - 11), \quad 12(n-1)(n-2),$$

sie hat ferner keine parabolische Curve.

Einige von diesen Zahlen lassen sich auch analytisch bestimmen. Zunächst die Ordnung. Das System der sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum y_i f_{ik} &= \mu a_k, \\ \alpha_y &= 0, \\ \beta_y &= 0 \end{aligned}$$

liefert diejenigen Punkte y , welche auf einer beliebigen Geraden $(\alpha\beta)$ liegen. Man erhält durch Elimination der y die beiden Gleichungen

*) Vgl. hierüber: Math. Annalen XXIII, S. 169.

$$\begin{vmatrix} a \\ \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a \\ \beta \end{vmatrix} = 0$$

mit $9(n-1)^2$ Lösungen. Aber von diesen sind die $6(n-1)^2$ Lösungen zu entfernen, für welche

$$\sum y_i f_{ik} = 0, \\ \alpha_y = 0$$

ist. Diese Punkte haben eine besondere Bedeutung. Denn in der Ebene $\alpha_x = 0$ bestimmt der Schnitt mit der Wendefläche und der Hesse'schen Curve Punkte, denen stationäre Ebenen zugehören. *Und es giebt also $6(n-1)^2$ Punkte, für welche längs der in der Ebene liegenden Haupttangente selbst die zugehörige Ebene stationär bleibt.* Diese aber sind als Lösungen in Abzug zu bringen. Denn in dem genannten Falle coincidiren consecutive Ebenen, und es giebt daher auf einer beliebigen Geraden einen den obigen Gleichungen genügenden Punkt y . Diese $6(n-1)^2$ Punkte liefern zugleich Pinchebenen der Fläche Θ , und man erkennt weiter, dass durch jeden Berührungspunkt einer solchen Ebene eine ganz auf der Fläche Θ liegende Gerade geht; die Fläche Θ enthält also auch $6(n-1)^2$ gerade Linien. Bezeichnet man die Ordnung der Doppel- und Rückkehrcurve durch D und R , die Zahl der Pinchebenen durch j , so besteht in der That die Cayley'sche Gleichung:

$$0 = 4 \cdot 3(n-1)^2 [3(n-1)^2 - 2] - 8D - 11R - 2j.*$$

Der Tangentenkegel von Θ hat die Classe n^2 , ausserdem ist er eindeutig bezogen auf die Schnittcurve der n . Polarfläche seiner Spitze der Ebene $\alpha_x = 0$. Daher ist sein Geschlecht $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$, und die Zahl seiner Wendeebenen gleich Null, da, wie gezeigt, zu der Ebene $\alpha_x = 0$ nur $6(n-1)^2$ stationäre Ebenen gehören, von denen keine durch einen willkürlichen Punkt geht. Man hat daher für den Tangentenkegel folgende charakteristische Zahlen:

Ordnung $3n(n-1)$,

Classe n^2 ,

Geschlecht $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$,

Zahl der Rückkehrkanten $3n(2n-3)$, *

„ „ Wendekanten 0,

„ „ Doppelebenen $\frac{1}{2}n(n-1)(n^2+n-3)$,

„ „ Doppelkanten $\frac{n}{2}[9n^3 - 18n^2 - 13n + 30]$.

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Bd. II, S. 674.

Ebenso hat man für den ebenen Schnitt der Fläche Θ :

$$\text{Classe } 3n(n-1),$$

$$\text{Zahl der Doppeltangenten } \frac{3}{2}(n-1)[3n^3 - 3n^2 - 14n + 16]$$

$$,, \quad ,, \text{ Wendetangenten } 3(n-1)(4n-5).$$

Ferner wird:

$$t' = \frac{1}{3} \left\{ \frac{n}{2} (n-1) (n^2 + n - 3) (n^2 - 2) - 3n(n-2) (n^2 - 2) \right. \\ \left. + 3(n-1) (4n-5) \right\}$$

die Zahl der dreifachen Tangentialebenen. Da nun Θ eine $n^2 - n + 1$ -fache Ebene besitzt, welche für $\frac{1}{6}(n^2 + n + 1)n(n-1)(n^2 - n - 1)$ dreifache Ebenen zu rechnen ist, so hat man als Anzahl der eigentlichen dreifachen Ebenen von Θ :

$$\frac{1}{6} n(n-1)(n-2)(n-3)(3n^2 + 3n - 5).$$

Und endlich hat man als Ordnung der Curve der Berührungspunkte der Doppeltangentenebenen

$$\varrho' = 3(n-1)^2 (n^2 + n - 5),$$

sowie als Zahl der scheinbaren Doppelsebenen der Fläche der Doppeltangentenebenen:

$$k' = \frac{(n-1)(n-2)}{8} [n^6 + 3n^5 - 5n^4 - 15n^3 + 15n^2 + 27n + 24].$$

Ich wende mich nun zur Betrachtung der Steiner'schen Fläche S . Ihre Ordnung ist, wie oben bemerkt, gleich $4(n-1)^3$; ihre Classe gleich der Zahl der zu Punkten der Wendefläche gehörigen Ebenen, welche durch eine Gerade gehen, mithin

$$4n^2(n-1) - 2(n^3 - n^2 + n - 1).$$

Um die Ordnung des umschriebenen Kegels zu bestimmen, dessen Spitze z ist, setze man:

$$\sum z_i f_i = 0, \\ \sum (a_z b_y - b_z a_y) = 0, \\ \sum y_i f_{ik} = 0,$$

durch welche Gleichungen ausgedrückt wird, dass die Gerade (zy) die willkürliche Gerade a, b schneidet. Es muss daher die Matrix:

$$\left| \begin{array}{cccc} f_{11} f_{12} f_{13} f_{14} & a_z b_1 - b_z a_1 \\ f_{21} f_{22} f_{23} f_{24} & a_z b_2 - b_z a_2 \\ f_{31} f_{32} f_{33} f_{34} & a_z b_3 - b_z a_3 \\ f_{41} f_{42} f_{43} f_{44} & a_z b_4 - b_z a_4 \end{array} \right|$$

verschwinden, und dies geschieht für Punkte einer Curve $6(n-1)^2$. Ordnung, welche in Verbindung mit $\sum z_i f_i = 0$ $6n(n-1)^2$ Durchschnittspunkte liefert. Daher ist die Classe des ebenen Schnittes der Steiner'schen Fläche gleich $6n(n-1)^2$.

Aber man kann diese Zahl auch noch auf einem anderen Wege bestimmen. Denn die Ordnung des Kegels ist auch gegeben durch die Zahl der Schnittgeraden consecutiver Tangentenebenen von S , welche durch den Punkt z gehen und eine Gerade mit den Coordinaten $y_i = a_i + \lambda b_i$ schneiden. Und so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum z_i f_i &= 0, & \sum y_i f_i &= 0, \\ \sum z_i df_i &= 0, & \sum y_i df_i &= 0, \\ \sum k_i dx_i &= 0, \end{aligned}$$

mithin, wenn man an Stelle von y_i $a_i + \lambda b_i$ setzt:

$$\psi = \left| \begin{array}{c} \sum z_i f_{i1} \\ \sum a_i f_i \sum b_i f_{i1} - \sum b_i f_i \sum a_i f_{i1} \\ \frac{\partial \Delta}{\partial x_1} \\ k_1 \end{array} \right| = 0,$$

in welcher Determinante nur die erste Verticalreihe hingeschrieben ist. Nun ist nachzuweisen, dass die Flächen $\Delta = 0$, $\psi = 0$ in den singulären Punkten die Tangentenebene von $\sum z_i f_i = 0$ in Curven mit gemeinsamen Doppelpunktstangenten schneiden. Da nun in diesen sowohl die f_i als die $\frac{\partial \Delta}{\partial x_i}$ verschwinden, so erhält man:

$$\sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = \left| \begin{array}{c} \sum z_i f_{i1} \\ \sum y_k a_i f_{ik} \sum b_i f_{i1} - \sum b_i y_k f_{ik} \sum a_i f_{i1} \\ \sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_1 \partial x_k} y_k \\ k_1 \end{array} \right|.$$

Multipliziert man diese Determinante mit der folgenden:

$$\delta = \left| \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \end{array} \right|,$$

in welcher die α , β willkürliche Grössen bedeuten, so findet man:

$$\delta \sum \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k = k_x \left[\sum z_i f_{ik} y_k \cdot P + \sum \frac{\partial^2 \Delta}{\partial x_i \partial x_k} y_i y_k \cdot Q \right],$$

womit der Beweis geführt ist. Da nun ψ von der Ordnung $7n - 8$ ist, so ergibt sich als Zahl der Lösungen:

$$4(n-1)n(7n-8) - 6(n^3 - n^2 + n - 1).$$

Diese entsprechen aber der zuvor ermittelten Ordnung des Kegels und der Zahl seiner Wendeebenen, für welche der Schnitt consecutiver Ebenen unbestimmt wird, also immer eine willkürliche Gerade schneidet. Mithin hat der Kegel

$$2(n-1)n(11n-13) - 6(n^3 - n^2 + n - 1)$$

Wendeebenen. Daraus erkennt man weiter die Existenz von $4n(n-1)(7n-11)$ Rückkehrkanten, u. s. w. Man kann übrigens die eben ermittelten Zahlen auch aus dem Geschlechte des Kegels entnehmen, welches das einer Curve $4n(n-1)$. Ordnung mit $n^3 - n^2 + n - 1$ wirklichen Doppelpunkten ist, welche selbst der vollständige Schnitt von zwei Flächen $4(n-1)$. und n . Ordnung ist. Das Geschlecht des Kegels ist daher gleich:

$$2n(n-1)(5n-8) - (n^3 - n^2 + n - 1).$$

Aus Geschlecht, Ordnung und Classe des Kegels erhält man dann in bekannter Weise die Zahl der Wende- und Doppelkanten u. s. w.

Die Steiner'sche Fläche S hat conische Knoten in den singulären Punkten, zur Rückkehrcurve den Ort der Punkte y , die gleichzeitig zwei unendlich benachbarten Punkten der Wendefläche entsprechen, zur Doppelcurve den Ort der Punkte z , welche gleichzeitig zu zwei verschiedenen Punkten derselben gehören. Rückkehr- und Doppelcurve bilden zugleich den Ort der Punkte, deren n . Polaren einen biplanaren Knoten, resp. zwei Knotenpunkte erhalten.

§ V.

Beziehungen zur Liniengeometrie.

In meiner früheren Arbeit bezeichnete ich die aus den Haupttangenten gebildeten Curven als *Haupttangentencurven des Systems*. Für den Fall $n=2$ sind diese geradlinig, sie bilden das Strahlensystem zweiter Ordnung dritter Classe; jeder Ebene entspricht die Reciproke einer Steiner'schen Fläche, welche von dieser Ebene in den drei zugehörigen Strahlen des Systems geschnitten wird. Die von Herrn Kummer untersuchten algebraischen Strahlensysteme zweiter Ordnung geben überhaupt den Fall derjenigen P-E-Systeme, bei denen ∞^2 geradlinige Haupttangentencurven auftreten.

Im Allgemeinen aber bilden die Haupttangenten einen Complex. Die Gleichung desselben lässt sich leicht bilden, wenn man die Gleichung I, 1 in der symbolischen Form:

$$\sum p_i (a_{x_i})^{n-1} = \sum p_i (b_{x_i})^{n-1} = 0$$

schreibt, in welcher die p_i gewöhnliche Liniencoordinaten, die mit ihnen multiplicirten Formen aber allgemeine Formen $n - 1$. Ordnung sind. Man erhält sie, wenn man in den symbolischen Ausdrücken statt x $x + \lambda y$ schreibt und die Discriminante nach λ bildet. Dieselbe wird, wovon man sich leicht überzeugt, eine reine Function der Coordinaten p_i , welche dieselben im Grade $(n + 1)(n - 2)'$ enthält. Für die einfachsten Fälle $n = 3, 4, 5$ kann man diese Discriminante wirklich bilden. So erhält man z. B. für $n = 3$:

$$\sum p_i p_j (a_{x_i} b_{y_j} - a_{y_i} b_{x_j})^2 = 0.$$

Setzt man überhaupt den symbolischen Klammerfactor des vorstehenden Ausdruckes, welcher nur von den p_i abhängig ist, in leicht verständlicher Abkürzung gleich:

$$(ab_{ij}),$$

so hat man für $n = 4$

$$\sum p_i p_j p_i p_j (ab_{ij})^2 (cd_{ij})^2 (ac_{ii}) (bd_{jj}) = 0.$$

Und für $n = 5$ wird der Complex von der Form:

$$i^3 - 6j^2 = 0,$$

wo

$$i = \sum p_i p_j (ab_{ij})^4.$$

Dieser Fall verdient deshalb Interesse, weil hier die Congruenz der stationären Haupttangenten vollständiger Schnitt der beiden Complexe $i = 0, j = 0$ wird, welche beziehungsweise vom 6. und 9. Grade sind.

Eine Gerade ist geradlinige Haupttangentencurve des Systems, wenn sie in allen ihren Punkten Tangente ist. Hierzu ist erforderlich, dass die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum p_i (a_{x_i})^{n-1} &= 0, \\ - (n-1) \sum p_i (a_{x_i})^{n-2} (a_{y_i}) &= 0, \\ + \frac{1}{2} (n-1) (n-2) \sum p_i (a_{x_i})^{n-3} (a_{y_i})^2 &= 0, \\ &\vdots \\ \sum p_i (a_{y_i})^{n-1} &= 0 \end{aligned}$$

bestehen. Multiplicirt man dieselben der Reihe nach mit den Formen:

$$(b_{y_j})^{n-1}, (b_{y_j})^{n-2}, \dots, (b_{x_j})^{n-1}$$

und addirt, so ergibt sich die Relation:

$$\sum p_i (a b_{ij})^{n-1} = 0,$$

welche selbst einen Complex n . Grades vorstellt. Da nun die Indices j 6 verschiedene Werthe annehmen können, so ergibt sich der allgemeine Satz:

Jede geradlinige Haupttangente curve gehört sechs Complexen n . Grades an. Insbesondere findet also bei den algebraischen Strahlensystemen zweiter Ordnung der folgende allgemeine, auch eine dualistische Auffassung zulassende Satz statt:

Jedes algebraische Strahlensystem zweiter Ordnung gehört im Allgemeinen sechs Complexen an. Für ein System $[2, n]$ sind nach Herrn Kummer die f_i Functionen $n - 1$. Ordnung; ein solches muss daher stets sechs Complexen $n - 1$. Grades angehören. Auf das System $[2, 2]$ beziehen sich diese Angaben nicht.

Für das System $[2, 3]$ gestalten sich insbesondere die Verhältnisse wie folgt.

Die Gleichung I, 1 wird $\sum p_i a_{x_i} = 0$, eine Haupttangente muss also den beiden Gleichungen:

$$t_1 = \sum p_i a_{x_i} = 0, \quad t_2 = \sum p_i a_{y_i} = 0$$

genügen. Bildet man nun

$$T_1 = t_1 a_{y_k} - t_2 a_{x_k} = 0,$$

$$T_2 = t_1 a_{y_l} - t_2 a_{x_l} = 0,$$

so hat man zwei Complexe zweiten Grades T_1, T_2 , denen das Strahlensystem angehört. Aus $T_1 = 0, T_2 = 0$ folgt nun entweder $t_1 = 0, t_2 = 0$ oder:

$$U = a_{y_k} a_{x_l} - a_{x_k} a_{y_l} = 0.$$

Ein T_1 und T_2 gemeinsamer Strahl ist also entweder Strahl des Systemes oder gehört dem speciellen linearen Complexe U an. Daher sind die beiden von einem Punkte ausgehenden Strahlen des Systems die beiden den Kegeln von T_1 und T_2 gemeinsamen Kanten, welche nicht die Axe von U treffen. Und die drei Strahlen in einer Ebene ergeben sich auf folgendem Wege. Der Complex T_1 hat die Ausnahmeebene $a_{x_k} = 0$; die Complexcurve in einer beliebigen Ebene E berührt daher dieselbe; in derselben Beziehung stehen T_2 und $a_{x_l} = 0$. Die beiden Complexcurven E haben eine gemeinsame durch die Axe

von U gehende Tangente, die drei anderen gemeinsamen Tangenten sind die Strahlen des Systems.

Es sei schliesslich noch auf eine andere Beziehung zur Liniengeometrie hingewiesen. Es ist oben gezeigt, dass, falls die Gleichung I, 1 in der Form

$$\sum p_i A_i = 0$$

geschrieben wird, die Integrabilitätsbedingung die merkwürdige Gestalt:

$$A_1 A_4 + A_2 A_5 + A_3 A_6 = 0$$

annimmt. Die Functionen $n - 1$. Ordnung A sind also für jeden Punkt der Fläche der Integrabilität den Coordinaten einer Geraden proportional. Vermöge der Gleichung:

$$\sum p_i A_i = 0$$

sieht man aber, dass diese Gerade jedesmal den Strahl p oder die Gerade (xy) schneidet, dass sie also überhaupt in der dem Punkte zugehörigen Ebene liegt. Das von diesen Geraden gebildete, eindeutig auf die Fläche der Integrabilität bezogene Strahlensystem $n - 1$. Ordnung und Classe ist dem P-E-System covariant. Für das Strahlensystem $[2, 3]$ existirt also eine demselben covariante lineare Congruenz.

§ VI.

Das Strahlensystem zweiter Ordnung dritter Classe.

Für den soeben hervorgehobenen Fall $n = 2$ findet eine Reihe besonderer Beziehungen zwischen den Covarianten $\Delta, \Delta', S, \Phi, \Psi$ statt.

Es ist nämlich allgemein nach I, 1

$$f_{ik} + f_{ki} + \sum x_i f_{ik} = 0$$

und da die f_{ik} Constanten sind,

$$\sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) + \sum x_i f_{ik} y_i = 0,$$

oder:

$$\sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) + \sum x_i f'_{ik} = 0,$$

falls man wieder unter f'_i dieselbe Function wie f_i , aber in den Variablen y , versteht. Das Bestehen der Gleichungen

$$\sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) = 0$$

zieht daher das der folgenden:

$$\sum x_i f'_{ik} = 0$$

nach sich. Daraus geht hervor:

Die Fläche der Doppelpunkte Φ der conischen Polaren ist identisch mit der Wendefläche.

Und ebenso ist auch:

$$\sum y_i f_{ik} = \sum y_i x_i f_{ik} = - \sum x_i f_{ik} + f_{ik}^2$$

Das heisst:

Die Steiner'sche Fläche S ist identisch mit der Brennfläche.

Und endlich ist:

$$\sum y_i f_{ik} = \sum y_i x_i f_{ik} = \sum x_i f_{ik}$$

Die Fläche Ψ fällt mit der Wendefläche zusammen

Inbesondere ist also die Brennfläche eindeutig auf die Wendefläche bezogen, letztere aber eindeutig auf sich selbst abbildbar. Zugleich erkennt man, dass, da die Brennfläche auf sechs verschiedene Arten eindeutig auf sich selbst vermöge der zusammengehörigen Berührungspunkte ihrer Doppeltangenten bezogen ist, auch der Wendefläche eine solche sechsfache Abbildbarkeit zukommt.

Die Wendefläche hat fünf Knotenpunkte in den singulären Punkten, sie enthält als Steiner'sche Fläche 10 gerade Linien; die Brennfläche hat ausser den Knoten in den singulären Punkten noch 10 Knotenpunkte zweiter Art.

Die zweite Polare eines beliebigen Punktes z_i

$$\sum z_i f_i = 0$$

ist zufolge der Gleichung:

$$\sum z_i f_i = \sum z_i f_{ik} x_k x_i = - \sum x_k x_i (f'_{ki} + f'_{ik})$$

mit der conischen Polarfläche desselben identisch*). Die conische Polare eines Knotenpunktes zweiter Art, dessen Coordinaten mit x_i bezeichnet sein mögen, besteht in Folge der Gleichungen:

$$f_{ik} + f_{ki} = \alpha_i f_k + \alpha_k f_i$$

aus den beiden Ebenen $\alpha_y = 0$ und $\sum y_i f_i = 0$. Hieraus folgt, dass die einem Punkte von $\alpha_y = 0$ oder $\sum y_i f_i = 0$ zugeordnete Ebene wieder durch jenen Knotenpunkt geht. Mithin hat man:

Jedem der 10 Knotenpunkte A zweiter Art entspricht eine durch ihn gehende Ebene β , die zugehörige Ebene des Systems, und eine andere Ebene α . Den Punkten beider Ebenen sind Ebenen des Systems zugeordnet, welche sämmtlich durch den Knotenpunkt A gehen. Und die Durchschnittslinie der beiden Ebenen α und β liegt auf der Wendefläche.

Die zweite Polare eines der singulären Punkte ist die jenem Punkte zugeordnete Kegelfläche von Haupttangente oder Strahlen des Systems.

*) Dies folgt übrigens auch aus der allgemeinen Polarentheorie.

Man sieht ferner leicht, dass die Ebenen, welche zu den Punkten der Verbindungslinie irgend zweier singulärer Punkte gehören, längs der ganzen Erstreckung derselben stationär sind. Analytisch folgt dies daraus, dass für zwei singuläre Punkte ξ und η die Gleichung der dem Punkte $\xi + \lambda \eta$ zugeordneten Ebene sich auf:

$$\sum y_i \sum \eta_k \frac{\partial f_i}{\partial \xi_k} = 0$$

reducirt, also unabhängig von λ wird.

Die 10 Verbindungslinien zweier singulärer Punkte müssen daher auf der Wendefläche liegen. Die ihnen zugehörigen 10 stationären Ebenen sind mithin 10 singuläre Tangentenebenen der Brennfläche, es sind zugleich die 10 Ebenen β , welche zu den Knotenpunkten A gehören, während die Ebenen α die Ebenen des Pentaeders der singulären Punkte bilden. Man hat also:

Die 10 Ebenen α , welche den Knotenpunkten zweiter Art entsprechen, sind die Ebenen des Pentaeders der singulären Punkte, und die 10 singulären Ebenen der Brennfläche gehen durch die Kanten desselben.

Die Wendefläche enthält nun ausserdem noch 10 andere gerade Linien, nämlich in jeder Ebene des Pentaeders eine. *Diese Geraden sind mithin die den Knotenpunkten zweiter Art zugeordneten.*

Die Lage der 10 Knoten A hängt zunächst von einer Gleichung 10. Grades ab, welche in derselben Weise, wie dies von Clebsch in seiner Arbeit über das *Pentaeder der Fläche dritter Ordnung* geschehen ist, gebildet werden kann. Andererseits aber sind die fünf singulären Punkte abhängig von einer Gleichung 5. Grades. Und da den Ebenen des Pentaeders rational die Knotenpunkte zugehören, so muss die Gleichung 10. Grades mit Hülfe jener Gleichung 5. Grades unter Zuhülfenahme rein linearer Operationen lösbar sein.

Damit ist die analytische Untersuchung des Strahlensystems [2, 3] zurückgeführt auf die Lösung der Gleichung fünften Grades seiner singulären Punkte. Herr Kummer hat zuerst in seiner bekannten Arbeit über algebraische Strahlensysteme die Brennfläche dieses Strahlensystems aufs eingehendste untersucht. Aber es lässt sich eine etwas vereinfachte Darstellung geben, bei welcher überhaupt keine Irrationalitäten mehr auftreten, wenn man von vornherein das Pentaeder zu Grunde legt. Hierzu reicht es aus, etwa vier der singulären Punkte mit den Ecken des Coordinatensystems zusammenfallen zu lassen, wie im folgenden geschehen ist.

Ich setze in der Gleichung:

$$F = \sum y_i f_i = 0,$$

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \alpha_1 x_2 x_3 + \beta_1 x_2 x_4 + \gamma_1 x_3 x_4, \\
 f_2 &= \alpha_2 x_1 x_3 + \beta_2 x_1 x_4 + \gamma_2 x_3 x_4, \\
 f_3 &= \alpha_3 x_1 x_2 + \beta_3 x_1 x_4 + \gamma_3 x_2 x_4, \\
 f_4 &= \alpha_4 x_1 x_2 + \beta_4 x_1 x_3 + \gamma_4 x_2 x_3,
 \end{aligned}$$

wobei die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &= 0, \\
 \beta_1 + \beta_2 + \alpha_4 &= 0, \\
 \gamma_1 + \beta_3 + \beta_4 &= 0, \\
 \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 &= 0
 \end{aligned}$$

zwischen den Constanten bestehen müssen. Die singulären Punkte sind die 4 Ecken des Coordinatentetraeders und der durch die 4 Gleichungen

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 \xi_2 + \beta_1 \xi_3 + \alpha_1 \xi_4 &= 0, \\
 \gamma_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_3 + \alpha_2 \xi_4 &= 0, \\
 \gamma_3 \xi_1 + \beta_3 \xi_2 + \alpha_3 \xi_4 &= 0, \\
 \gamma_4 \xi_1 + \beta_4 \xi_2 + \alpha_4 \xi_3 &= 0,
 \end{aligned}$$

wo $\xi_i x_i = 1$ gesetzt ist, bestimmte Punkt x_i . Man findet:

$$\begin{aligned}
 \xi_1 &= \beta_3 \alpha_4 \alpha_2 + \beta_4 \alpha_3 \beta_2, \\
 \xi_2 &= \gamma_4 \alpha_3 \beta_1 + \gamma_3 \alpha_4 \alpha_1, \\
 \xi_3 &= \beta_4 \gamma_2 \alpha_1 + \gamma_4 \alpha_2 \gamma_1, \\
 \xi_4 &= \gamma_2 \beta_3 \beta_1 + \beta_2 \gamma_3 \gamma_1.
 \end{aligned}$$

Die vier Ecken seien durch 1, 2, 3, 4, der letzte Punkt durch 5 bezeichnet. Man hat ferner:

$$\begin{aligned}
 f_{11} &= f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0, \\
 f_{12} + f_{21} &= -(\alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4), & f_{23} + f_{32} &= -(\alpha_1 x_1 + \gamma_4 x_1), \\
 f_{13} + f_{31} &= -(\alpha_2 x_2 + \beta_4 x_4), & f_{24} + f_{42} &= -(\beta_1 x_1 + \gamma_3 x_3), \\
 f_{14} + f_{41} &= -(\beta_2 x_2 + \beta_3 x_3), & f_{34} + f_{43} &= -(\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2).
 \end{aligned}$$

Setzt man nun:

$$\begin{aligned}
 a &= \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4, \\
 b &= \alpha_2 x_2 + \beta_4 x_4, \\
 c &= \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \\
 d &= \alpha_1 x_1 + \gamma_4 x_4, \\
 e &= \beta_1 x_1 + \gamma_3 x_3, \\
 f &= \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2,
 \end{aligned}$$

so ist die Gleichung der Brennfläche in symmetrischer Form folgende:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & d & e \\ b & d & 0 & f \\ c & e & f & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

und zugleich wird:

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2 a + x_4 c + x_3 b, \\ f_2 &= x_1 a + x_3 d + x_4 e, \\ f_3 &= x_1 b + x_2 d + x_4 f, \\ f_4 &= x_1 c + x_2 e + x_3 f. \end{aligned}$$

Aus der Identität:

$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & c & u_1 \\ a & 0 & d & e & u_2 \\ b & d & 0 & f & u_3 \\ c & e & f & 0 & u_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(u_1 u_2 f + a u_3 u_4) p + (u_1 u_4 d + u_2 u_3 c) q + (u_1 u_3 e + u_2 u_4 b) r \\ - 2(u_1^2 d e f + u_2^2 b c f + u_3^2 a c e + u_4^2 a b d),$$

in welcher zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} p &= 2(b e + c d - a f), \\ q &= 2(a f + b e - c d), \\ r &= 2(a f + c d - b e) \end{aligned}$$

gesetzt ist, erhält man nun die sämtlichen Knotenpunkte zweiter Art, nämlich:

$$\begin{array}{lll} A_1 & \text{als Schnittpunkt von} & d = e = f = 0, \\ A_2 & \text{,,} & \text{,,} \quad b = c = f = 0, \\ A_3 & \text{,,} & \text{,,} \quad a = c = e = 0, \\ A_4 & \text{,,} & \text{,,} \quad a = b = d = 0, \\ A_5, A_6 & \text{,,} & \text{,,} \quad d = c = e b - a f = 0, \\ A_7, A_8 & \text{,,} & \text{,,} \quad a = f = b e - c d = 0, \\ A_9, A_{10} & \text{,,} & \text{,,} \quad b = e = a f - c d = 0, \end{array}$$

Mithin liegen in den Ebenen:

$$\begin{array}{ll} d = 0 & \text{die Knotenpunkte } A_1, A_4, A_5, A_6, 2, 3, \\ a = 0 & \text{,,} \quad A_4, A_3, A_7, A_8, 1, 2, \\ b = 0 & \text{,,} \quad A_2, A_4, A_9, A_{10}, 1, 3, \\ c = 0 & \text{,,} \quad A_2, A_3, A_5, A_6, 1, 4, \\ e = 0 & \text{,,} \quad A_1, A_3, A_9, A_{10}, 2, 4, \\ f = 0 & \text{,,} \quad A_1, A_2, A_7, A_8, 3, 4. \end{array}$$

Weiter findet man:

dem Punkte $d = e = f = 0$ ist zugeordnet die Ebene

$$E_1 = y_2 \gamma_2 \xi_2 + y_3 \gamma_3 \xi_3 + y_4 \gamma_4 \xi_4 = 0$$

und als Ebene α_1 die Pentaederebene (2 3 4). Ebenso gehört zu:

A_2 die Ebene $E_2 = \gamma_1 y_1 \xi_1 + \beta_3 y_3 \xi_3 + \beta_4 y_4 \xi_4 = 0$ und (1 3 4) als Ebene α_2 ,

A_3 „ „ $E_3 = \beta_1 y_1 \xi_1 + \beta_2 y_2 \xi_2 + \alpha_4 y_4 \xi_4 = 0$ „ (1 2 4) „ „ α_3 ,

A_4 „ „ $E_4 = \beta_1 y_1 \xi_1 + \alpha_2 y_2 \xi_2 + \beta_3 \xi_3 y_3 = 0$ „ (1 2 3) „ „ α_4 .

Bei der Untersuchung der Gleichungen

$$d = c = af - be = 0$$

findet man zunächst als dem betreffenden Punkte zugehörige Ebene:

$$y_1(ax_2 + bx_3) + y_2(ax_2 + ex_4) + y_3(bx_1 + fx_4) + y_4(ex_2 + fx_3) = 0$$

und für:

$$e = a\mu,$$

$$f = b\mu,$$

$$(ax_2 + bx_3)(y_1 + \mu y_4) + (x_1 + \mu x_4)(ay_2 + by_3) = 0.$$

Setzt man $\mu = \frac{\gamma_4}{\alpha_1}$, so wird $x_1 + \mu x_4 \equiv d = 0$, also die zugehörige Ebene $d=0$, und die entsprechende Ebene α_5 oder $ay_2 + by_3 = 0$ entsteht aus der Factorzerlegung der conischen Polare

$$ay_1 y_2 + by_1 y_3 + ey_2 y_4 + fy_3 y_4 = (y_1 + \mu y_4)(ay_2 + by_3) = 0.$$

Demnach gehört zu

A_5 die zugeordnete Ebene $d = 0$ und (1 4 5) als Ebene α_5 ,

A_6 „ „ „ $c = 0$ „ (2 3 5) „ „ α_6 ,

A_7 „ „ „ $a = 0$ „ (3 4 5) „ „ α_7 ,

A_8 „ „ „ $f = 0$ „ (1 2 5) „ „ α_8 ,

A_9 „ „ „ $b = 0$ „ (2 4 5) „ „ α_9 ,

A_{10} „ „ „ $e = 0$ „ (1 3 5) „ „ α_{10} .

Die Coordinaten der 10 Punkte A haben folgende Werthe:

	A_5	A_6	A_7
x_1	$-\gamma_4(\gamma_2 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma_4)$	$-\gamma_4 \beta_2 \beta_3$	$-\gamma_3 \alpha_4 \alpha_3$
x_2	$-\alpha_1 \beta_3 \gamma_4$	$\beta_3(\beta_1 \beta_3 - \beta_2 \gamma_1)$	$\alpha_4 \gamma_1 \alpha_3$
x_3	$\gamma_4 \alpha_1 \beta_2$	$-\beta_2(\beta_1 \beta_3 - \beta_2 \gamma_1)$	$-\alpha_1(\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 \beta_2)$
x_4	$\alpha_1(\gamma_2 \alpha_1 - \alpha_2 \gamma_4)$	$\alpha_1 \beta_2 \beta_3$	$\alpha_3(\alpha_2 \alpha_4 - \alpha_3 \beta_2)$

	A_8	A_9	A_{10}
x_1	$-\gamma_2(\beta_4\gamma_2 - \gamma_4\gamma_1)$	$\gamma_3\beta_1\alpha_2$	$-\gamma_3(\gamma_4\beta_1 - \gamma_3\alpha_4)$
x_2	$\gamma_1(\beta_4\gamma_2 - \gamma_4\gamma_1)$	$-\beta_4(\alpha_1\beta_4 - \alpha_2\gamma_1)$	$-\beta_4\beta_1\gamma_3$
x_3	$-\alpha_4\gamma_1\gamma_2$	$-\alpha_2\beta_1\beta_4$	$\beta_1(\gamma_4\beta_1 - \gamma_3\alpha_4)$
x_4	$\alpha_3\gamma_2\gamma_1$	$\alpha_2(\alpha_1\beta_4 - \alpha_2\gamma_1)$	$\alpha_2\gamma_3\beta_1$

in der einem Knotenpunkte entsprechenden Verticalreihe sind jedesmal die Werthe seiner vier Coordinaten angegeben. Vermöge dieser Werthe bestätigt man nun, dass die Ebenen E ebenfalls durch je sechs Knotenpunkte gehen, und zwar

$$E_1 \text{ durch } 1, 5, A_1, A_5, A_{10}, A_8,$$

$$E_2 \text{ „ } 2, 5, A_2, A_6, A_8, A_9,$$

$$E_3 \text{ „ } 3, 5, A_3, A_6, A_7, A_{10},$$

$$E_4 \text{ „ } 4, 5, A_4, A_5, A_7, A_9.$$

Nunmehr aber wird es möglich, jeden der 10 Knoten in einer übersichtlicheren Weise zu bezeichnen. Bezeichnet man nämlich jeden Knoten durch die drei Eckpunkte derjenigen Pentaederebene, welche ihm selbst als Ebene α zugeordnet ist, so wird:

$$A_1 = (2 \ 3 \ 4), \quad A_6 = (2 \ 3 \ 5),$$

$$A_2 = (1 \ 3 \ 4), \quad A_7 = (3 \ 4 \ 5),$$

$$A_3 = (1 \ 2 \ 4), \quad A_8 = (1 \ 2 \ 5),$$

$$A_4 = (1 \ 2 \ 3), \quad A_9 = (2 \ 4 \ 5),$$

$$A_5 = (1 \ 4 \ 5), \quad A_{10} = (1 \ 3 \ 5).$$

Desgleichen möge auch jede der 10 Ebenen, welche den eben genannten Punkten entsprechen, durch dasselbe Symbol bezeichnet werden. Man hat alsdann:

$$E_1 = [2 \ 3 \ 4], \quad a = [3 \ 4 \ 5],$$

$$E_2 = [1 \ 3 \ 4], \quad c = [2 \ 3 \ 5],$$

$$E_3 = [1 \ 2 \ 4], \quad f = [3 \ 2 \ 5],$$

$$E_4 = [1 \ 2 \ 3], \quad b = [2 \ 4 \ 5],$$

$$d = [1 \ 4 \ 5], \quad e = [1 \ 3 \ 5].$$

Nunmehr kann man die Beziehungen der Brennfläche zu dem Pentaeder der Wendefläche, sowie die Gruppierung ihrer 10 singulären Tangentenebenen zu den 10 Knotenpunkten zweiter Art durch das folgende Schema darstellen:

(123)	123	[123]	4	5	(123)	(451)	(452)	(453)
(234)	234	[234]	1	5	(234)	(154)	(152)	(153)
(134)	134	[134]	2	5	(134)	(253)	(251)	(254)
(124)	124	[124]	3	5	(124)	(351)	(354)	(352)
(145)	145	[145]	2	3	(145)	(234)	(231)	(234)
(345)	345	[345]	1	2	(345)	(123)	(124)	(125)
(235)	235	[235]	1	4	(235)	(142)	(143)	(145)
(125)	125	[125]	3	4	(125)	(341)	(342)	(345)
(245)	245	[245]	1	3	(245)	(134)	(132)	(135)
(135)	135	[135]	2	4	(135)	(241)	(243)	(245)

In der ersten Colonne steht der betreffende Punkt, in der zweiten die Pentaederebene, welcher demselben entspricht, in der dritten die ihm zugehörige Ebene des Systems; die folgenden sechs Columnen geben die 6 Knotenpunkte an, durch welche jene letztere Ebene hindurchgeht.

Ich führe endlich noch die Gleichung der Wendefläche an. Sie lässt sich, wie eine einfache Rechnung zeigt, in die Form:

$$E_1 x_1 x_2 x_3 + E_3 x_1 x_2 x_4 + E_1 x_2 x_3 x_4 + E_2 x_1 x_3 x_4 = 0$$

bringen, welche unmittelbar die 20 auf jener Fläche gelegenen Geraden erkennen lässt. Jede der 10 Geraden, welche nicht zwei singuläre Punkte des Systems verbindet, liegt in einer Ebene des Pentaeders und schneidet die Verbindungslinie der beiden anderen Eckpunkte desselben. Ausserdem folgt aus der Identität:

$$\xi_1 E_1 + \xi_2 E_2 + \xi_3 E_3 + \xi_4 E_4 = 0,$$

dass alle 4 Ebenen E durch einen gemeinsamen Punkt gehen. Bezeichnet man diesen durch 6, so lassen sich die Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 durch die Symbole: 615, 625, 635, 645, darstellen.

§ VII.

Die singulären Tangenten des Systems.

Wie schon bemerkt, ist jede Gerade des Raumes in $n - 1$ Punkten Tangente des Systems. Es knüpft sich hieran eine Theorie der singulären Tangenten, welche vollständig der von Herrn Schubert zuerst vollendeten Theorie der Tangentensingularitäten der allgemeinen Ordnungsfäche parallel läuft. Ich werde mich daher im Folgenden der von Herrn Schubert eingeführten Bezeichnungsweise bedienen. Ein beliebiger jener $n - 1$ Punkte mag durch p_i bezeichnet werden. Dem Symbole ε_2 entspricht der Umstand, dass zwei dieser Punkte auf ihrem

Träger coincidiren, dieser ist dann eine Haupttangente, welche, sowie auch ihr ausgezeichnete Berührungspunkt, durch ε_2 ebenfalls bezeichnet werden soll. Die Geraden ε_2 bilden den oben beschriebenen *Complex C der Haupttangenten*. Dem Symbol ε_3 entspricht die stationäre Haupttangente, dieselben bilden ein *Strahlensystem*, die Punkte ε_3 selbst eine dem System *covariante Fläche* Σ . Und weiter existirt eine auf Σ liegende *Curve* K, gebildet von den Punkten ε_4 , derselben ist zugeordnet die *Regelfläche* R der Tangenten ε_4 . Endlich hat man eine *bestimmte Zahl* von Tangenten ε_5 , es ist die der Rückkehrerzeugenden von R.

Für $n = 3$ wird die Fläche Σ eine Regelfläche, gebildet von den geradlinigen Haupttangentencurven des Systems. Für $n = 4$ muss die Curve K aus einzelnen Geraden bestehen, welche das Analogon der 27 Geraden auf der Fläche dritter Ordnung bilden. Für $n = 5$ existiren im Allgemeinen keine geradlinigen Haupttangentencurven — auch die Fläche vierter Ordnung enthält im Allgemeinen keine Geraden mehr — und erst für $n = 6$ wird eine von Null verschiedene Anzahl von Tangenten ε_5 auftreten, deren Bestimmung dem Problem der fünfpunktigen Tangenten analog ist.

Ich habe im Vorigen nur einen Theil der einschlägigen Fragen berührt, weil es sich hier nicht um eine systematische Uebersicht aller aus singulären Tangenten gebildeten Configurationen handeln kann. Im Folgenden werde ich die wichtigsten der oben aufgeworfenen Fragen beantworten und mich dabei zunächst hauptsächlich algebraischer Methoden bedienen.

1) Die Tangenten ε_3 und ε_{22} .

Die ersteren sind Rückkehrkanten der Complexkegel von C, Wendekanten seiner Complexcurven. Da die Steiner-Cayley'sche Curve in einer Ebene $3(n-3)(2n-1)$ Inflexionen etc. hat, so findet man:

Das *Strahlensystem* der ε_3 ist von der Ordnung $(n-3)(n^2+2)$, der Classe $3(n-3)(2n-1)$.

Das *Strahlensystem* der Tangenten ε_{22} ist von der Ordnung $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+n+2)$, der Classe $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n^2+5-2)$.

Die Classenzahl der ε_3 bestimmt man algebraisch wie folgt: Man hat auszudrücken, dass eine in der Ebene $a_x = 0$ liegende ε_2 die zu dieser Ebene gehörige Hesse'sche Curve berührt. Nun ist letztere gegeben durch:

$$V = \begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix} = 0, \quad a_x = 0$$

und die zu einem Punkte x derselben gehörige ε_2 durch:

$$\sum y_i f_i = 0, \quad a_y = 0.$$

Soll diese die Fläche V berühren, so hat man diesen Gleichungen noch die folgenden

$$b_y = 0, \quad \sum \frac{\partial V}{\partial x_i} y_i = 0$$

hinzuzufügen und erhält so die Determinantenrelation:

$$\Psi = \begin{vmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \frac{\partial V}{\partial x_3} & \frac{\partial V}{\partial x_4} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \end{vmatrix} = 0,$$

aus welcher der Factor b_x auszuschneiden ist. Mithin hat das System:

$$\Psi = 0, \quad V = 0, \quad a_x = 0$$

$12(n-1)^2$ Lösungen, von denen zunächst die des Systemes

$$a_x = 0, \quad b_x = 0, \quad V = 0$$

auszuschneiden sind. Ausserdem aber haben die Curven $V=0$, $\Psi=0$ in der Ebene $a_x=0$, wie sich zeigen lässt, in den $n^2 - n + 1$ zu dieser gehörigen singulären Punkten Doppelpunkte mit gemeinsamen Tangenten, woraus

$$12(n-1)^2 - 3(n-1) - 6(n^2 - n + 1) = 3(n-3)(2n-1)$$

sich wie oben ergibt.

2) Die Tangenten ε_3 , deren Berührungspunkte ε_3 in einer Ebene $a_x=0$ liegen, bilden eine Regelfläche G , deren Gleichung sich ergeben muss, wenn man aus

$$\begin{aligned} a_x &= 0, \\ \sum y_i f_i &= 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} &= 0, \\ \sum y_i y_k y_l f_{ikl} &= 0 \end{aligned}$$

die x eliminiert. Die Resultante muss den Factor a_y^6 enthalten und wird daher vom Grade $2(n-2)(3n+1)$ in den y . Also:

Die Regelfläche der Tangenten ε_3 , deren Berührungspunkte ε_3 in einer Ebene liegen, ist vom Grade $2(n-2)(3n+1)$.

Diese Fläche schneidet die Ebene selbst in einer Curve $2(n-2)(3n+1)$. Ordnung, welche aus $3(n-3)(2n-1)$ Geraden, den Tangenten ε_3 in dieser Ebene, und der Durchschnittcurve von Σ mit derselben besteht. Also: *Die Ordnung der Fläche Σ ist gleich $(11n-13)^*$.*

*) Für $n=2$ verliert die Zahl ihre Bedeutung.

3) Man kann die Gleichung von Σ vollständig aufstellen, indem man sich der Methode bedient, welche Clebsch zur Ermittlung der Fläche angewandt hat, welche die Berührungspunkte der vierpunktigen Tangenten aus einer algebraischen Fläche ausschneidet.

Man hat nämlich aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sum y_i f_i &= 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} &= 0, \\ \sum y_i y_k y_l f_{ikl} &= 0, \\ c_y &= 0\end{aligned}$$

die y zu eliminiren. Nimmt man statt dieser die gleichbedeutenden:

$$\begin{aligned}\sum y_i f_i &= 0, \\ \sum y_i y_k (f_{ik} + f_{ki}) &= 0, \\ (a_y)^3 = (b_y)^3 = \sum y_i y_k y_l (f_{ikl} + f_{kli} + f_{lik}) &= 0, \\ c_y &= 0\end{aligned}$$

und versteht nun unter $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, wie früher, die mit den a, c geränderte Determinante Δ' , so kann man das Eliminationsresultat zunächst in die Form bringen:

$$\begin{aligned}& \left[c \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right] \\ & \times \left[4 \left(c \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \right)^2 - 3 \begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix} \left(c^2 \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} - 2 a c \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + a^2 \begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix} \right) \right] = 0.\end{aligned}$$

Auf Grund der weiteren Relationen:

$$\begin{aligned}a_y^2 a_i &= \sum y_k y_l (f_{kli} + f_{lki} + f_{ilk}), \\ a_y a_i a_l &= \sum y_k (f_{kli} + f_{lki} + f_{ilk}), \\ a_x^2 a_i &= (n-1)(n-2) f_i, \\ a_x^2 a_i a_k &= (n-2)(f_{ik} + f_{ki})\end{aligned}$$

und der daraus folgenden:

$$\begin{aligned}a^2 \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} &= -(n-2) \Delta' c_x, \\ a \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} &= -4(n-2) \Delta', \\ a \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ d \end{pmatrix} &= -(n-2) \Delta' \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},\end{aligned}$$

welche ganz mit den von Clebsch entwickelten übereinstimmen, erhält man nun auch das Eliminationsresultat in der Form:

$$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix} - 4\Delta' \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man die Coefficienten $f_{ikl} + f_{lik} + f_{kli}$ durch u_{ikl} , die ersten und zweiten Unterdeterminanten von Δ' durch Δ'_{ik} , $\Delta'_{ik,lm}$, so kann man das erste Glied in:

$$\Theta = \sum \Delta'_{mn} \Delta'_{pq} u_{mnr} u_{pqs},$$

das zweite in

$$\Phi = \sum \Delta'_{mn} \Delta'_{pq,rs} u_{mnp} u_{qrs}$$

verwandeln und erhält so die explicite Darstellung:

$$\sum = \Theta - 4\Delta'\Phi = 0.$$

Wie man sieht ist auch hier Θ von der Form:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix},$$

falls man zur Abkürzung $\alpha_i = \sum \Delta'_{mn} u_{mni}$ setzt.

Aus der Form von Σ geht nun der weitere Satz hervor:

Die Flächen Δ' und Σ berühren sich in allen gemeinsamen Punkten, also in einer Curve $2(n-1)(11n-13)$ Grades.

Dies letztere Resultat lässt sich auch direct ableiten. Denn die Punkte der Brennfläche sind definiert durch das Bestehen der vier linearen Gleichungen:

$$\sum y_i (f_{ik} + f_{ki}) = 0$$

und die Producte $(y_i y_k)$ sind proportional den Δ'_{ik} . Soll nun eine parabolische Haupttangente zugleich eine ε_3 sein, so muss noch die weitere Bedingung:

$$\sum y_i y_k y_l f_{ikl} = \sum \Delta'_{ik} y_l f_{ikl} = \sum \beta_i y_i = 0$$

erfüllt werden. Man hat also die Curve zu betrachten, welche sämtlichen Determinanten der Matrix:

$$\begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \beta_1 \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & \beta_2 \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & \beta_3 \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & \varphi_{44} & \beta_4 \end{vmatrix}$$

gemeinsam ist. Nach bekannten Principien*) ist dieselbe aber von der Ordnung:

*) Vgl. Salmon-Fiedler, Geometrie d. R. S. 590.

$$6(n-1)^2 + 4(n-1)(4n-5) = 2(n-1)(11n-13)$$

wie oben gefunden wurde.

Und wenn man mit der Gleichung jener Curve noch die weitere Bedingung:

$$\Psi = \sum y_i y_k y_l y_m f_{iklm} \equiv \sum \Delta'_{ik} \Delta'_{lm} f_{iklm} = 0$$

verbindet, so gewinnt man den Ausdruck dafür, dass eine von einem Punkte der Brennfläche auslaufende ε_3 zur ε_4 wird.

Nun hat die Fläche Σ in den singulären Punkten *sechsfache Punkte*, weil von jedem derselben sechs stationäre Haupttangente nach verschiedenen Richtungen auslaufen. Sie hat ferner in den Knoten zweiter Art der Brennfläche aus demselben Grunde *dreifache Punkte*. Mithin muss die Berührungscurve von Δ' und Σ in den $n^3 - n^2 + n - 1$ singulären Punkten und den $10(n-1)^3$ Knoten zweiter Art selbst sechsfache und dreifache Punkte haben. Die Fläche Ψ von der Ordnung $7n - 9$ hat dagegen in den Knoten zweiter Art, wo alle Δ'_{ik} verschwinden, selbst *Doppelpunkte*; in den singulären Punkten, wo die Δ'_{ik} den x proportional werden, aber *vierfache Punkte*. Somit bleibt als Zahl der Punkte der Brennfläche, von denen Tangenten ε_4 ausgehen:

$$\begin{aligned} 2(n-1)(11n-13)(7n-9) - 60(n-1)^3 - 24(n^3 - n^2 + n - 1) \\ = 10(n-3)(n-1)(7n-5). \end{aligned}$$

Für den Fall $n=4$ erhält man 30 . 23 Punkte. Aber jede Tangente ε_4 muss dann die Brennfläche in 6 Punkten berühren. Mithin beträgt die Zahl der geradlinigen Haupttangenteencurven für $n=4$ 115; diese 115 Geraden liegen gleichzeitig auf der Fläche 31. Ordnung Σ und bilden das Analogon der 27 Geraden auf der Fläche dritter Ordnung.

Die Curve K der Berührungspunkte ε_4 der Tangenten ε_4 lässt sich nun ebenfalls bestimmen. Zunächst findet man:

Die Curve K berührt die Brennfläche in allen mit ihr gemeinsamen Punkten. Denn K liegt auf Σ und muss deshalb die Brennfläche überall, wo sie dieselbe trifft, berühren. Da nun K durch keinen der singulären Punkte, sowie der Knoten zweiter Art hindurchgehen kann, so muss die soeben bestimmte Zahl gleich der Hälfte der Zahl der Schnittpunkte von K und Δ' sein, d. h.:

Die Ordnung der von den Berührungspunkten ε_4 der Tangenten ε_4 gebildeten Curve ist

$$\varepsilon_4 b_4 = 5(n-3)(7n-5).$$

4) Die Regelfläche R der Tangenten ε_4 . Um die Ordnung derselben zu finden, hat man aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i &= 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} &= 0, \quad \sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0, \\ \sum y_i y_k y_l y_m f_{iklm} &= 0,\end{aligned}$$

die y zu eliminiren. Setzt man die Werthe derselben aus den drei ersteren linearen Gleichungen in die drei letzten ein, so hat man drei Flächen V, F, G von der Ordnung $3n - 1, 4n - 2, 5n - 3$, deren wesentliche Schnittpunkte die gesuchte Zahl $\varepsilon_4 g$ geben. Da nun y ein Punkt einer bestimmten Geraden $(\alpha\beta)$ ist, kann man auch setzen:

$$y_i = z_i + \lambda \xi_i$$

und erhält

$$\lambda \sum \xi_i f_i + \sum z_i f_i = 0.$$

Man erkennt so, dass V, F, G die *Polare* von $(\alpha\beta)$ zur 2, 3 und vierfachen Curve haben. Andererseits aber überzeugt man sich leicht, dass:

$$y_i = \kappa x_i + \mu_i \alpha_x + \nu_i \beta_x$$

gesetzt werden kann. Denn wenn man:

$$y_i = \frac{\partial \Omega}{\partial \gamma_i}$$

setzt, wo:

$$\Omega = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & f_3 & f_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \end{vmatrix},$$

so erkennt man durch Multiplication von Ω mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{vmatrix},$$

dass Ω auch in der Gestalt $\alpha_x A + \beta_x B + \gamma_x C$ geschrieben werden kann, womit die y die oben angegebene Form erhalten. Demgemäss ist weiter zu setzen:

$$\alpha_x \sum \mu_i f_i + \beta_x \sum \nu_i f_i = 0.$$

Trägt man nun die $y_i = \kappa x_i + \xi_i$ in die Form:

$$H = \sum y_{i_1} y_{i_2} \dots y_{i_p} f_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

ein, so erhält man wegen

$$\sum f_i \xi_i = 0:$$

$$H = \alpha_1 x^{p-2} \sum \xi_i \xi_k f_{ik} + \alpha_2 x^{p-3} \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} + \dots \sum \xi_i \xi_{i_2} \dots \xi_{i_p} f_{i_1 i_2 \dots i_p}$$

wo die $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ Zahlenfactoren sind. Der Factor x aber ist, wie aus dem obigen hervorgeht, die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \sum a_i f_i & \sum b_i f_i & \sum c_i f_i \\ \sum a_i \alpha_i & \sum b_i \alpha_i & \sum c_i \alpha_i \\ \sum a_i \beta_i & \sum b_i \beta_i & \sum c_i \gamma_i \end{vmatrix}.$$

Und für diejenigen Werthe von x , für welche:

$$\begin{aligned} \sum z_i f_i = 0, \quad \sum \xi_i f_i = 0, \quad \sum z_i \alpha_i = 0, \quad \sum z_i \beta_i = 0, \\ \sum \xi_i \alpha_i = 0, \quad \sum \xi_i \beta_i = 0, \end{aligned}$$

muss offenbar die Beziehung stattfinden:

$$f_i = \alpha_i + \varrho \beta_i.$$

Daher verschwindet x überall dann, wenn $\sum z_i f_i = 0$, $\sum \xi_i f_i = 0$, d. h. auf der Polare von $(\alpha\beta)$. Mithin kann man für die drei Flächen

$$V = \xi_i \xi_k f_{ik} = 0,$$

$$F = x \alpha_1 \sum \xi_i \xi_k f_{ik} + \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = 0,$$

$$G = x^2 \beta_1 \sum \xi_i \xi_k f_{ik} + x \beta_2 \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} + \sum \xi_i \xi_k \xi_l \xi_m f_{iklm} = 0$$

auch die drei neuen Flächen

$$V' = V = 0,$$

$$F' = F - x \alpha V = 0,$$

$$G' = G - x \beta_2 (F' - x \alpha V) - x^2 \beta_1 V = 0$$

setzen, welche nun sowohl $(\alpha\beta)$ als seine Polare als 2, 3, 4 fache Linien enthalten müssen. Nunmehr hat man die auf diese Curven entfallenden Schnittpunkte der 3 Flächen zu ermitteln.

Dazu benutze man die von Herrn Nöther gegebene Regel:*)

Wenn drei Flächen von den Ordnungen n_1, n_2, n_3 , welche zwei gemeinsame Curven C und C' von den Ordnungen m und m' , dem Range r und r' besitzen, die sich in s Punkten begegnen, so ist die Zahl der den drei Flächen gemeinsamen nicht auf diesen Curven liegenden Punkte gleich:

*) Nöther, Sulle curve multiple di superficie algebriche, Ann. di mat. ser. II, 5. p. 165.

$$n_1 n_2 n_3 - M_1 - M_2 + \mu$$

wo:

$$M_1 = m [i_2 i_3 n_1 + i_3 i_1 n_2 + i_1 i_2 n_3] - 2 i_1 i_2 i_3 \left(m + \frac{r}{2}\right),$$

$$M_2 = m' [i_2' i_3' n_1 + i_3' i_1' n_2 + i_1' i_2' n_3] - 2 i_1' i_2' i_3' \left(m' + \frac{r'}{2}\right),$$

$$\mu = s [i_2' i_3' i_1 + i_3' i_1' i_2 + i_1' i_2' i_3 - i_1' i_2' i_3']$$

falls jene Curven auf den genannten Flächen, je $i_1, i_2, i_3; i_1', i_2', i_3'$ -fache Curven sind und zwei der Zahlen i gleich oder grösser sind als die correspondirenden Zahlen i' sind.

Man hat nun im vorliegenden Falle:

$$n_1 = 3n - 1, \quad i_1 = 2 = i_1', \quad m = 1, \quad m' = n^2,$$

$$n_2 = 4n - 2, \quad i_2 = 3 = i_3', \quad r = 0, \quad r' = 2n^2(n-1),$$

$$n_3 = 5n - 3, \quad i_3 = 4 = i_3', \quad s = n - 1$$

also für die Zahl $\varepsilon_4 g$:

$$\begin{aligned} \varepsilon_4 g &= (3n-1)(4n-2)(5n-3) \\ &\quad - (n^2+1)[12(3n-1) + 8(4n-2) + 6(5n-3) - 48 - 48(n-1)] \\ &= 10(n-4)(n^2-1). \end{aligned}$$

In derselben Weise bestimmt man die Ordnung einer Covariante von Σ , nämlich der Fläche X , welche von den einfachen Berührungspunkten auf allen ε_3 gebildet wird, oder die Zahl $\varepsilon_3 p^2$. Man hat nämlich die Zahl der gemeinsamen Lösungen x der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i &= 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} &= 0, \quad \sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0, \\ \sum x_i f_i &= 0 \end{aligned}$$

zu ermitteln.

Man erhält:

$$\begin{aligned} n_1 &= 3n - 1, \quad i_1 = 2, \quad i_1' = 2, \quad m = n^2, & m' &= 1, \\ n_2 &= 4n - 2, \quad i_2 = 3, \quad i_2' = 3, \quad r = 2n^2(n-1), & r' &= 0, \\ n_3 &= n^2 + 1, \quad i_3 = n, \quad i_3' = 4, \quad s = n - 1, & n &\geq 4, \end{aligned}$$

mithin:

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 p_1^2 &= (3n-1)(4n-2)(n^2+1) \\ &\quad - n^2[(3n-1)3n + (4n-2)2n + (n^2+1)6 - 12n - 12n(n-1)] \\ &\quad - [(3n-1)12 + 8(4n-2) + 6(n^2+1) - 48] \\ &\quad + (n-1)(6n+24) \\ &= (n-4)(n^3 + n^2 + 12n - 12). \end{aligned}$$

Und setzt man weiter:

$$\begin{aligned}\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} = 0, \\ \sum x_i f_i = 0, \quad \sum x_i x_k f_{ik} = 0,\end{aligned}$$

so erhält man die Zahl $\varepsilon_{22} b_2^2$ der Tangenten ε_{22} , bei denen einer der Punkte ε_2 auf einer gegebenen Geraden liegt, oder die Ordnung der von den Berührungspunkten der ε_{22} gebildeten Fläche Ω (Doppeltangentenfläche). Hier wird:

$$\begin{aligned}n_1 = 3n - 1, \quad i_1 = 2, \quad i_1' = 2, \quad m = n^2, \quad m' = 1, \\ n_2 = n^2 + 1, \quad i_2 = n, \quad i_2' = 3, \quad r = 2n^2(n-1), \quad r' = 0, \\ n_3 = n(n-1) + 2, \quad i_3 = n-1, \quad i_3' = 3, \quad s = (n-1), \quad n \geq 4,\end{aligned}$$

und man erhält:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22} b_2^2 &= (3n-1)(n^2+1)(n^2-n+2) \\ &\quad - n^2[(3n-1)n(n-1) + 2(n-1)(n^2+1) + 2n(n^2-n+2) \\ &\quad \quad - 4n(n-1) - 4n(n^2-1)] \\ &\quad - [12(3n-1) + 6(n^2+1) + 8(n^2-n+2) - 48] \\ &\quad + (n-2)[8(n-1) + 6n + 2 \cdot 12 - 24] \\ &= (n-1)(n-4)(3n+11).\end{aligned}$$

5) Zieht man von jedem Punkte P einer Geraden $(\alpha\beta)$ eine Tangente ε_2 , welche in P einen Berührungspunkt p_1 hat, so hat man die Gleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0, \quad \sum y_i f_i = 0, \\ \sum y_i y_k f_{ik} = 0, \quad \sum x_i f_i = 0,\end{aligned}$$

in denen x der Punkt ε_2 ist. Aus diesen ergeben sich zwei Flächen V und F' mit 2- und n -facher Polare von $(\alpha\beta)$, sowie der 2- und 3-fachen Geraden $(\alpha\beta)$. Ihre eigentliche Schnittcurve ist daher von der Ordnung:

$$(3n-1)(n^2+1) - 6 - 2n^3 = n^3 - n^2 + 3n - 7,$$

da dieselbe $11n - 13$ Punkte mit $(\alpha\beta)$ gemein hat, bleibt die Zahl $\varepsilon_2 g_1 p_1 = n^3 - n^2 - 8n + 6$ übrig, welche die Ordnung der Curve der einfachen Berührungspunkte auf den in einer Ebene liegenden ε_2 angiebt.

6) Eine willkürliche Gerade wird von Tangenten ε_3 getroffen, welche eine Regelfläche H bilden. Dieselbe ist von der Ordnung $(n-3)(6n^2 + 6n - 1)$ und die Punkte ε_3 bilden auf ihr eine Curve von der Ordnung:

$$11n - 13 + 3(n-3)(2n-1) = 2(n-2)(3n+1).$$

Algebraisch ist dieselbe charakterisirt durch die Gleichungen:

$$\sum y_i f_i = 0, \quad \sum y_i y_k f_{ik} = 0, \quad \sum y_i y_k y_l f_{ikl} = 0, \\ \alpha_y = 0, \quad \beta_y = 0$$

aus denen man zwei Flächen $3n - 1$. und $4n - 2$. Ordnung erhält, welche sowohl die Gerade $(\alpha\beta)$ als ihre Polare zur zwei und dreifachen Linie haben und deren weiterer Schnitt von der Ordnung

$$(3n-1)(4n-2) - 6n^2 - 6 = 2(n-2)(3n+1)$$

jene Curve darstellt.

§ VIII.

Anwendung des Correspondenzprincips zur Bestimmung der Tangentensingularitäten.

Weitere Anzahlbestimmungen gewinnt man mit Hülfe des Correspondenzprincipes. Ich benutze dasselbe zunächst in der folgenden Form:

Befinden sich auf einer Regelfläche p . Ordnung zwei Curven M . und N . Ordnung, welche den Erzeugenden in je μ und ν Punkten begegnen, so beträgt die Anzahl der beiden Curven gemeinsamen Punkte:

$$M\nu + N\mu - \nu\mu p.$$

Eine Curve M . Ordnung, welche jeder Erzeugenden einer Regelfläche p . Ordnung in μ Punkten begegnet, berührt dieselben in

$$(\mu-1)[2M - p\mu]$$

Punkten.

1) Von sämtlichen Punkten einer Geraden g gehen je zwei Tangenten ε_2 aus, bei denen der Punkt ε_2 auf g selbst liegt. Sie bilden eine Regelfläche $3n - 1$. Ordnung, welche eine Doppelcurve von der Ordnung $\frac{3}{2}(n-1)(3n-4) + n - 1$ und eine Doppelgerade besitzt. Aus der hiermit gegebenen Classe $10(n-1)$ ihres ebenen Schnittes findet man die Zahl:

$$2[10(n-2) - 3n + 1]$$

ihrer singulären Erzeugenden. Solche entstehen aber erstens in den Punkten, wo die Leitgerade g von der Brennfläche getroffen wird. Nach Abzug derselben bleiben:

$$10(n-1) - 4$$

übrig, deren Zahl angiebt, wie oft die in den Ebenen durch g gelegten Hesse'schen Curven des Systems mit g eine Berührung eingehen. Auf den Erzeugenden der Regelfläche bilden die weiteren Punkte p_1 eine Curve der Ordnung

$$M = 11n - 13 + 3(n-1)(n-3).$$

Setzt man also $p = 3n - 1$, $\mu = n - 3$, so findet man:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{22}b_2^2 &= (n-4)[2(11n-13) + 6(n-1)(n-3) - (n-3)(3n-1)] \\ &= (n-1)(n-4)(3n+11),\end{aligned}$$

2) Bezeichnet man die Anzahl der Tangenten ε_{22} in einer Ebene durch α , durch einen Punkt mit β , so ist die Ordnung der Regelfläche der eine Gerade schneidenden ε_{22} gleich $\alpha + \beta$. Die von den Punkten ε_2 gebildete Curve auf den Erzeugenden ist von der Ordnung

$$2\alpha + \varepsilon_{22}b_2^2.$$

Daraus gewinnt man die Zahl der Tangenten ε_4 , welche eine Gerade schneiden:

$$g\varepsilon_4 = 10(n-4)(n^2-1),$$

falls man

$$M = 2\alpha + \varepsilon_{22}b_2^2, \quad \mu = 2, \quad p = \alpha + \beta = (n-3)(n-4)(n^2+3n)$$

setzt.

3) Auf jeder Erzeugenden der Regelfläche H (§ VII, 6) liegen $n-4$ weitere Punkte, welche eine Curve von der Ordnung

$$3(n-3)(2n-1)(n-4) + \varepsilon_3p_1^2$$

bilden.

Setzt man:

$$\begin{aligned}M &= 2(n-2)(3n+1), \quad \mu = 1, \\ N &= 3(n-3)(n-4)(2n-1) + \varepsilon_3p_1^2, \quad v = n-4, \\ p &= (n-3)(n^2+6n-1),\end{aligned}$$

so hat man aus der Gleichung

$$g\varepsilon_4 = Mv + N\mu - v\mu p$$

die Formel

$$\varepsilon_3p_1^2 = (n-4)(n^3+n^2+12n-12).$$

Und die Anzahl der Berührungen jener Curve mit den Erzeugenden liefert die Zahl $g\varepsilon_{32}$, d. h. die Zahl der Tangenten ε_{32} , welche eine Gerade schneiden,

$$g\varepsilon_{32} = (n-4)(n-5)(n^3+11n^2+n-9).$$

4) Die Zahl $\varepsilon_3p_1^2$ erhält man auch auf folgendem Wege. Man betrachte die Regelfläche von Tangenten ε_2 , welche einen weiteren Punkt p_1 auf einer Geraden g haben. Die Ordnung derselben ist nach § VII, 5

$p = n^3 - n^2 - 8n + 6 + (n+1)(n-2) - 4 = (n-3)(n^2+3n)$; denn durch einen Punkt von g gehen $(n-2)(n+1) - 4$ Erzeugende, in einer Ebene durch g liegen $n^3 - n^2 - 8n + 6$. Auf den Erzeugenden liegt die von weiteren Punkten p_1 gebildete Curve von der Ordnung:

$$M = (n-4)(n^3 - n^2 - 8n + 6) + \varepsilon_{22}b_2^2, \quad \mu = n-4;$$

die Ordnung der von den Punkten ε_2 gebildeten Curve ist:

$$N = n^3 - n^2 - 8n + 6 + 11n - 13, \quad \nu = 1.$$

Beide Curven treffen sich daher in

$$\varepsilon_3 p_1^2 = (n-4)(n^3 + n^2 + 12n - 12)$$

Punkten. Und die Curve M berührt die Erzeugenden in

$$\frac{1}{2}(n-4)(n-5)(n^3 + 4n^2 + 9n - 10) = \varepsilon_{22} p_1^2$$

Punkten.

5) Die Regelfläche der Tangenten ε_{22} , welche eine Gerade schneiden, ist nach 2) von der Ordnung

$$p = (n-3)(n-4)(n^2 + 3n).$$

Und die Ordnung der Curve der Berührungspunkte ε_2 auf ihren Erzeugenden

$$M = (n-3)(n-4)(n^2 + 5n - 2) + \varepsilon_{22} b_2^2, \quad \mu = 2;$$

ferner die Curve der weiteren Punkte p_1 auf denselben von der Ordnung:

$$N = \frac{1}{2}(n-3)(n-4)(n-5)(n^2 + 5n - 2) + \varepsilon_{22} p_1^2, \quad \nu = n - 5.$$

Hieraus findet man

$$g\varepsilon_{32} = (n-4)(n-5)(n^3 + 11n^2 + n - 9)$$

wie in Nr. 3) und

$$\begin{aligned} g\varepsilon_{222} &= \frac{1}{3}(n-4)(n-5)(n-6)[(n-3)(n^2 + 5n - 2) + n^2 + 4n^2 \\ &\quad + 9n - 10 - (n-3)(n^3 + 3n)] \\ &= \frac{1}{3}(n-4)(n-5)(n-6)(n^3 + 6n^2 + n - 4). \end{aligned}$$

Dies ist die Ordnung der Regelfläche der dreifachen Haupttangenten des Systems.

6) In einer Ebene giebt es $n^2 - 1$ Tangenten, welche zwei ihrer Punkte p_1, p_2 auf zwei in dieser gegebenen Geraden haben. Dagegen ist die Zahl der Tangenten mit einfachen Berührungspunkten auf 2 windschiefen Geraden gleich $n^2 + 1$. Von den Punkten einer Geraden g ziehe man nun Tangenten, welche auf dieser einen Punkt p_1 und in einer festen Ebene einen Punkt p_2 haben. Dieselben bilden eine Regelfläche mit n -facher Leitlinie g von der Ordnung $n^2 + n - 1 = p$. Die von den weiteren Punkten auf ihren Erzeugenden gebildeten Curve ist von der Ordnung:

$$(n^2 - 1)(n - 3) + 11n - 13 + 3(n - 1)(n - 3) = M.$$

Daraus folgt: Es giebt

$$p_1^2 p_2 p_3 = (n-3)(n^2 + 3n - 4) + (11n - 13)$$

Tangenten, welche zwei Berührungspunkte auf gegebenen Ebenen, einen dritten auf gegebener Geraden haben, und es giebt

$$\varepsilon_2 p_1^2 p_2 = (n-4)(n^3 + 2n^2 - 5)$$

Haupttangenten, welche zwei einfache Berührungspunkte auf einer gegebenen Ebene und einer gegebenen Geraden haben.

In derselben Art erhält man noch:

$$gp_1p_2p_3 = (n^2-1)(n-3) + (n^2+3n-4) + 11n - 13,$$

$$g\epsilon_2p_1p_2 = (n-4)[2(n^2-1)(n-3) + 2p_1^3p_2p_3 - (n-3)(2n^2-n-1)],$$

$$g\epsilon_2b_2p_1 = (n-3)(n^2+5n-5) + 11n - 13,$$

$$g\epsilon_{22}b_2 = (n-4)(n^3+5n^2-9n+5).$$

In systematischer Weise wird die Ermittlung aller dieser und ähnlicher Zahlen bewerkstelligt durch den Calcul der abzählenden Geometrie. Ich werde denselben auf die auch bei Herrn Schubert angeführte Tabelle der Symbole:*)

- 1) ϵ_2g_s , 2) $\epsilon_2b_2g_e$;
- 3) ϵ_3g_e , 4) ϵ_3g_p , 5) $\epsilon_3b_3^2$;
- 6) $\epsilon_{22}g_e$, 7) $\epsilon_{22}g_p$, 8) $\epsilon_{22}b_2$, 9) $\epsilon_{22}b_2c_2$;
- 10) ϵ_4g , 11) ϵ_4b_4 ;
- 12) $\epsilon_{32}g$, 13) $\epsilon_{32}b_3$, 14) $\epsilon_{32}b_2$;
- 15) $\epsilon_{222}g$, 16) $\epsilon_{222}b_2$;
- 17) ϵ_5 , 18) ϵ_{42} , 19) ϵ_{33} , 20) ϵ_{322} , 21) ϵ_{2222}

anwenden.

Man hat zunächst die Formeln:

- 1) $\epsilon_2g_s = G + 2p_1^2g_e$,
- 2) $\epsilon_2b_2g_e = p_1p_2g_e - G$,
- 3) $\epsilon_3g_e = -3p_1^2g_e - 3G + 3p_1p_2g_e$,
- 4) $\epsilon_3g_p = G + 3p_1^3p_2$,
- 5) $\epsilon_3b_3^2 = 2p_1^3p_2 + p_1^2p_2p_3 - 2p_1^2p_2^2 - 2p^2g_e + G$,
- 6) $2\epsilon_{22}g_e = 4p_1p_2g_e - 3G - 4g_ep^2$,
- 7) $2\epsilon_{22}g_p = 4p_2p_1^3 + G$,
- 8) $\epsilon_{22}b_2^2 = 2p_1^3p_2 + 2p_1^2p_2p_3 - p_1^3g - 3p_1^2gp_2 + p_1^2g^2$,
- 9) $\epsilon_{22}b_2c_2 = p_1^2p_2^2 + 2p_1^2p_2p_3 + p_1p_2p_3p_4 - 2g[p_3p_1^2 + p_1p_2p_3] + g^2p_1p_2$,
- 10) $\epsilon_4g = gp_1^3 + 3p_1^2p_2g + 4p_1p_2p_3g - g^2(3p_1^2 + 9p_1p_2) + 6p_1g^3 - g^4$,
- 11) $\epsilon_4b_4 = 3p_1^3p_2 + 3p_1^2p_2p_3 + p_1p_2p_3p_4 + 3p_1p_2g^2 - g^3p_1 + 3p_1^2g^2 - g[3p_1^3 + 6p_1^2p_2 + 3p_1p_2p_3]$,
- 12) $\epsilon_{32}g = 2p_1^2p_2g + 6gp_1p_2p_3 - 11p_1p_2g^2 + 6p_1g^3 - g^2p_1^2 - g^4$,

*) Schubert, Calcul der abzählenden Geometrie. Leipzig 1889, S. 232 u. ff.

- $$\begin{aligned}
13) \quad \varepsilon_{32} b_3 &= 2p_1^3 p_2 + 4p_1^2 p_2 p_3 - 6gp_2 p_1^2 - gp_1^3 - p_1 g^3 + 2p_1 p_2 p_3 p_4 \\
&\quad - 5gp_1 p_2 p_3 + 4g^2 p_1 p_2 + 2g^2 p_1^2, \\
14) \quad \varepsilon_{32} b_2 &= p_1^2 p_2^2 + 4p_1 p_2 p_3^2 + 3p_1 p_2 p_3 p_4 - 5gp_1^2 p_2 - 7gp_1 p_2 p_3 \\
&\quad + g^2 p_1^2 + 5g^2 p_1 p_2 - g^3 p_1, \\
15) \quad 3! g \varepsilon_{222} &= 8gp_1 p_2 p_3 - 12p_1 p_2 g^2 + 6p_1 g^3 - g^4, \\
16) \quad 2\varepsilon_{222} b_2 &= 4p_1^2 p_2 p_3 + 4p_1 p_2 p_3 p_4 - 8gp_1 p_2 p_3 - 4gp_1^2 p_2 \\
&\quad + 5gp_1 p_2 + g^2 p_1^2 - g^3 p_1, \\
17) \quad \varepsilon_5 &= 4p_1^3 p_2 + 6p_1^2 p_2 p_3 + 5p_1 p_2 p_3 p_4 - 12gp_1^2 p_2 + 6p_1^2 g^2 \\
&\quad - 16gp_1 p_2 p_3 + 18g^2 p_1 p_2 - 8g^3 p_1 + g^4 - 4gp_1^3, \\
18) \quad \varepsilon_{42} &= 2p_1^3 p_2 + 6p_1^2 p_2 p_3 - p_1^3 g + 8p_1 p_2 p_3 p_4 - 9gp_1^2 p_2 \\
&\quad - 22gp_1 p_2 p_3 + 21p_1 p_2 g^2 + 3p_1^2 g^2 - 8p_1 g^3 + g^4, \\
19) \quad \varepsilon_{33} &= p_1^2 p_2^2 + 6p_1 p_2 p_3^2 + 9p_1 p_2 p_3 p_4 - 8gp_1^2 p_2 + 22g^2 p_1 p_2 \\
&\quad + 2p_1^2 g^2 + g^4 - 8p_1 g^3 - 24gp_1 p_2 p_3, \\
20) \quad 2\varepsilon_{322} &= 4p_1^2 p_2 p_3 + 12p_1 p_2 p_3 p_4 - 4gp_1^2 p_2 - 28gp_1 p_2 p_3 \\
&\quad + 23g^2 p_1 p_2 - 8g^3 p_1 + g^2 p_1^2 + g^4, \\
21) \quad 4! \varepsilon_{2222} &= 16p_1 p_2 p_3 p_4 - 32gp_1 p_2 p_3 + 24g^2 p_1 p_2 - 8g^3 p_1 + g^4.
\end{aligned}$$

Diese Formeln gehen in die von Herrn Schubert gegebenen über, wenn die Symbole $p_1^3 p_2$, $p_1^2 g$ gleich Null gesetzt werden. In denselben kommen die Symbole:

$$\begin{aligned}
&p_1 p_2 p_3 p_4, p_1^2 p_2^2, p_1^3 p_2, p_1 p_2 p_3^2, \\
&gp_1 p_2 p_3, gp_1^2 p_2, gp_1^3, \\
&g p_1 p_2, g^3 p_1, p^2 g, p^2 g^2, \\
&g^2 p_1 p_2, g^4, G
\end{aligned}$$

vor, welche mit Hülfe der Formeln:

$$\begin{aligned}
g^4 &= 2G, gp^3 = p^2 g, pg^3 = 2G + 2p^2 g, \\
p^2 g^2 &= G + 2p^2 g, p_1^2 p_2 g = p_1^2 p_2^2 + p_1^2 g = p_1^3 p_2 + p_1 p_2 g, \\
g^2 p_1 p_2 &= p_2 p_1^3 + p_1 p_2 g + G + p^2 g, \\
gp_1^2 p_2 &= p_2 p_1^3 + p_1 p_2 g, \\
gp_1 p_2 p_3 &= p_2 p_3 p_1^2 + p_1 p_2 g
\end{aligned}$$

auf die sechs Stammzahlen:

$$G, p_1 p_2 p_3 p_4, p_1^3 p_2, p_1^2 p_2 p_3, p_1^2 g, p_1 p_2 g$$

zurückgeführt werden. Die Werthe dieser letzteren sind aber mit Ausnahme der Zahl $p_1 p_2 p_3 p_4$ in den früheren Untersuchungen (§ VII) direct gegeben, oder unmittelbar aus ihnen zu entnehmen. Man erhält:

$$\begin{aligned}
G &= (n-1)(n-2) \cdots (n-i), \\
p^2 g &= (n-2)(n-3) \cdots (n-i), \\
p_1 p_2 g &= (n^2-1)(n-3) \cdots (n-i),
\end{aligned}$$

$$p_1^3 p_2 = n(n-3)(n-4) \cdots (n-i),$$

$$p_1^2 p_2 p_3 = \{(n-3)(n^2+3n-4) + 11n - 13\} (n-4) \cdots (n-i),$$

Die Zahl $p_1 p_2 p_3 p_4$ berechnet man aus der algebraisch bestimmten Zahl $\varepsilon_4 b_4$ (S. 394), mit Hülfe der Gleichung Nr. 11:

$$\begin{aligned} p_1 p_2 p_3 p_4 &= \varepsilon_4 b_4 - 4p^2 g_e - 4G + 6p_1 p_2 g_e \\ &= (n+1)(n-3)(2n^2-2n-1). \end{aligned}$$

Es ist die Zahl der Tangenten, welche auf 4 gegebenen Ebenen je einen Berührungspunkt haben.*) Allgemein ist daher zu setzen:

$$p_1 p_2 p_3 p_4 = (n+1)(n-3)(2n^2-2n-1)(n-5) \cdots (n-i).$$

Hiernach sind die obigen 21 Anzahlen, soweit sie noch nicht direct bestimmt waren, vollständig bestimmt. So erhält man z. B. für die Anzahl der Tangenten ε_5 , d. h. der Rückkehrerzeugenden der Fläche R ,

$$\varepsilon_5 = 5(n-5)(17n^2-44n+19).$$

Auf demselben Wege gewinnt man aber alle anderen Zahlen, z. B.:

$$\varepsilon_2 p_1^2 p_2 = 2p_1^2 p_2 p_3 - g p_1 p_2^2 = (n-4)(n^3+2n^2-5),$$

$$g \varepsilon_2 p_1 p_2 = 2g p_1 p_2 p_3 - g^2 p_1 p_2,$$

$$g \varepsilon_2 b_2 p_1 = 2g p_1^2 p_2 - g^2 p_1 p_2,$$

$$\begin{aligned} g \varepsilon_2 b_2 &= 2p_1^2 p_3 g + 2p_1 p_2 p_3 g - 3p_1 p_3 g^2 - p_1^2 g^2 + p_1 g^3 \\ &= (n-4)(n^3+5n^2-9n+5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 p_1^2 &= p_1^2 p_2^2 + 3p_1 p_2 p_3^2 - 4p_1^3 p_2 - 4p_1 p_2 g_e + G + 2p^2 g_e \\ &= (n-4)(n^3+n^2+12n-12). \end{aligned}$$

Man kann die ermittelten Werthe durch andere Formeln des anzahlgeometrischen Calculs bestätigen. Man findet a. a. O. S. 252 die Formeln

- 1) $\varepsilon = 5p_{1234} - 10p_{123}^2 + 10p_{12}^3$ für $n = 5$,
- 2) $\varepsilon g = 4p_{123}^2 - 6p_{12}^2 + 6g_e p_{12} - 8g_e p_1^2$ „ $n = 4$,
- 3) $\varepsilon g_p = 3p_{12}^3 + 3g_e p_1^2 + G$ „ $n = 3$,
- 4) $\varepsilon g_e = 3g_e p_{12} - 3g_e p_1^2$ „ $n = 3$,
- 5) $\varepsilon g_s = 2g_e p_1^2 + G$ „ $n = 2$,
- 6) $p_1 p_2 p_3 p_4 = s_4 + g_e s_2 - g_e s_1^2 + 2G$ „ $n = 4$,
- 7) $g p_1 p_2 p_3 = s_3^2 + g_e s_2 + 2G$ „ $n = 3$,
- 8) $g_p p_1 p_2 = s_2^2 + g_e s_1^2 + G$ „ $n = 2$,
- 9) $g_e p_1 p_2 = g_e s_2 + G$ „ $n = 2$,
- 10) $g_s p_1 = g_e s_1^2 + G$ „ $n = 1$.

*) Für $n = 4$ hat man wieder die 115 ausgezeichneten Geraden des Systems.

Nun ist in 1)

$$p_{1231} = 5(n-3)(n-5)(7n-5),$$

$$p_{123}^2 = (n-4)(n-5)(11n-13),$$

$$p_{12}^3 = 2(n-3)(n-4)(n-5),$$

also

$$\varepsilon = 5(n-5)(17n^2-44n+19),$$

in 2)

$$p_{123}^2 = (11n-13)(n-4), \quad p_{12}^3 = 2(n-3)(n-4),$$

$$g_e p_{12} = 3(n-1)(n-3)(n-4); \quad g_e p_1^2 = (n-2)(n-3)(n-4),$$

also

$$\varepsilon g = 10(n^2-1)(n-4),$$

in 3)

$$G = (n-1)(n-2)(n-3), \quad g_e p_1^2 (n-2)(n-3),$$

$$p_{12}^3 = 2(n-3)$$

also

$$\varepsilon g_p = (n-3)(n^2+2), \quad \text{u. s. w.}$$

Ferner bei 6)

$$s_1 = p_{1231}, \quad s_2 = 6p_{12}, \quad g_e p_{12} = 3(n-1)(n-3)(n-4),$$

$$s_1 = 4p_1^2, \quad g_e p_1^2 = (n-2)(n-3)(n-4),$$

also

$$p_1 p_2 p_3 p_1 = (n+1)(n-3)(2n^2-2n-1),$$

bei 7)

$$s_3 = p_{123}^2 = 11n-13, \quad s_2 = 3p_{12}, \quad g_e p_{12} = 3(n-1)(n-3),$$

$$G = (n-1)(n-2)(n-3),$$

also

$$g p_1 p_2 p_3 = (n-3)(2n^2+3n-5) + 11n-13 \quad \text{u. s. w.}$$

§ IX.

Die Doppelcurve der Fläche Σ .

Die beiden einem Punkte x zugehörigen Haupttangente sind zugleich die Haupttangente der Fläche

$$F = \sum z_i f_i = 0.$$

Daher drückt das Verschwinden der Hesse'schen Determinante D von F aus, dass x ein parabolischer Punkt ist. Setzt man in dieser Determinante D an Stelle von x wieder z , so muss die Bedingung für zusammenfallende Haupttangente, d. h. die Gleichung der Brennpunktefläche entstehen. Ganz ebenso kann man die Bedingung dafür auf-

stellen, dass x ein Punkt der Curve vierpunktiger Berührung von F ist; man erhält dann die Gleichung der Fläche Σ .

In derselben Weise kann man einen anderen wichtigen Satz der allgemeinen Flächentheorie übertragen. Die cubische Polarfläche

$$\sum y_m y_k y_i z_i f_{iklm} = 0$$

wird nämlich von der Tangentialebene von F im Punkte x in einer Curve dritter Ordnung C mit Doppelpunkt geschnitten. Dabei gilt der bekannte Satz:

Die Polare $\sum y_k \frac{\partial D}{\partial x_i} = 0$ schneidet die Tangentialebene des Punktes x in einer Geraden, welche die drei Inflexionspunkte von C enthält. Setzt man auch hier $z = x$, und bezeichnet man die Ebene $\sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} = 0$ als *Polare der Brennfläche in Bezug auf den Punkt x* , falls man jeden in der Entwicklung auftretenden Differentialquotienten $f_{ikl} + f_{kil}$ durch den symmetrischen Werth $f_{ikl} + f_{kil} + f_{lik}$ ersetzt, so hat man:

Die 3 Inflexionspunkte der Curve 3. Ordnung C , in welcher die dem Punkte x zugehörige cubische Polarfläche $\Sigma y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$ von der zugehörigen Ebene des Systems geschnitten wird, liegen in der Geraden, in welcher seine Ebene die Polare des Punktes in Bezug auf die Brennfläche trifft. Und ebenso findet man: Für jeden Punkt x der Brennfläche Δ' schneidet die Tangentialebene dieses Punktes sich mit der Polare der Brennfläche in derjenigen Geraden, welche den Wendepunkt in der Curve 3. Ordnung $\Sigma y_i f_i = 0$, $\Sigma y_i y_k y_l f_{ikl} = 0$ mit ihrem in x liegenden Rückkehrpunkte verbindet, der Wendepunktslinie.

Ein directer Beweis jener beiden Sätze, welche als speciellen Fall wieder das bekannte Theorem der Flächentheorie enthalten, scheint nicht überflüssig zu sein. Ich führe denselben durch Verlegung des fraglichen Punktes x in den Coordinatenanfang $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Die Ebene $x_1 = 0$ sei die zugehörige Tangentialebene, die in ihr liegenden Kanten des Coordinatentetraeders die Tangenten des Doppelpunktes der Curve C . Setzt man nun, wie in § I

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2 A + x_3 B + x_4 C, \\ f_2 &= -x_1 A + x_3 D + x_4 E, \\ f_3 &= -x_1 B - x_2 D + x_4 F, \\ f_4 &= -x_1 C - x_2 E - x_3 F \end{aligned}$$

und bezeichnet die Differentialquotienten der $A, B, \dots$ durch Indices, so muss zunächst sein:

$$\begin{aligned} E_2 = 0, \quad E_4 = 0, \quad F_3 = 0, \quad F_4 = 0, \\ f_{24} + f_{42} = 0, \quad f_{34} + f_{43} = 0, \quad f_{22} = f_{33} = f_{44} = 0. \end{aligned}$$

Nimmt man die Kante $x_1 = 0$, $x_4 = 0$ zur Wendepunktsgerade der Curve C , so müssen die weiteren Bedingungen:

$$\begin{aligned} f_{444} &= 0, \\ 2f_{223} + f_{322} &= 2f_{322} + f_{233} = 2f_{224} + f_{422} = 2f_{112} + f_{244} = 2f_{334} + f_{433} \\ &= 2f_{443} + f_{344} = 0 \end{aligned}$$

bestehen. Damit aber ergibt sich als Gleichung der Polare der Brennfläche im Schnitte mit der Ebene $y_1 = 0$:

$$\begin{aligned} &y_2[(f_{32} + f_{24})(f_{142} + f_{241} + f_{421}) - (f_{12} + f_{21})(f_{234} + f_{321} + f_{423})], \\ &y_3[(f_{23} + f_{32})(f_{143} + f_{413} + f_{311}) - (f_{13} + f_{31})(f_{234} + f_{132} + f_{423})] \\ &+ y_4 P = 0, \end{aligned}$$

wo P einen nicht verschwindenden Ausdruck bedeutet. Man zeigt nun leicht, dass die Coefficienten von y_2 und y_3 verschwinden. Denn für $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ hat man:

$$\begin{aligned} f_{231} + f_{432} + f_{312} &= x_1(E_{34} + F_{24}), \\ f_{142} + f_{412} + f_{214} &= x_4(C_{42} + E_{11}), \\ f_{341} + f_{134} + f_{413} &= x_4(C_{13} + F_{41}), \\ f_{12} + f_{21} &= x_1(E_1 + C_2) \equiv x_1^2(E_{11} + C_{21}), \\ f_{23} + f_{32} &= x_1(E_3 + F_2) \equiv x_1^2(E_{31} + F_{21}), \\ f_{13} + f_{31} &= x_1(F_1 + C_3) \equiv x_1^2(F_{11} + C_{31}). \end{aligned}$$

Und ebenso möge, um den Beweis des zweiten Satzes zu führen, ein beliebiger Punkt der Brennfläche zum Coordinatenanfang $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ gewählt werden, und die Wendepunktlinie die Gleichung $y_1 = 0$, $y_3 = 0$ haben, die Rückkehrtangente der Curve C $y_2 = 0$, $y_1 = 0$ sein. Ist endlich $y_4 = 0$, $y_1 = 0$ die Wendetangente von C , so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned} f_{33} &= 0, f_{44} = 0, f_{23} + f_{32} = 0, f_{24} + f_{42} = 0, f_{34} + f_{43} = 0, \\ f_{222} &= 0, f_{444} = 0, \\ 2f_{223} + f_{322} &= 2f_{332} + f_{233} = 2f_{334} + f_{433} = 2f_{113} + f_{344} \\ &= 2f_{442} + f_{244} = 2f_{224} + f_{422} = 0, \\ f_{234} + f_{324} + f_{432} &= 0. \end{aligned}$$

Dann aber ergibt sich für $\sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i}$, falls man $y_1 = 0$ und $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ setzt:

$$(f_{14} + f_{41})^2 f_{22} f_{333} y_3 = 0,$$

wie zu zeigen war.

Die Fläche Σ hat nun zur Doppelcurve die Curve Γ derjenigen Punkte, von denen zwei Tangenten ε_3 auslaufen. Besonders deutlich

sieht man das in dem Falle $n = 3$, wo Σ eine Regelfläche 20. Ordnung wird; die Curve T ist die Doppelcurve derselben. Für jene Curve T zerfällt nun die Curve dritter Ordnung C in die beiden Haupttangente ε_3 und eine Gerade. Zieht man nun zunächst von einem willkürlichen Punkte des Raumes x eine Gerade, welche die willkürliche Gerade mit den Coordinaten $\lambda a_i + \mu b_i$ und die dem Punkte x zugehörige Curve dritter Ordnung in einem Punkte A trifft, so hat letzterer die Coordinaten:

$$\xi_i = \lambda a_i + \mu b_i + \varrho x_i = h_i + \varrho x_i$$

und es ist:

$$(1) \quad \sum \xi_i f_i = 0,$$

$$(2) \quad \sum \xi_i \xi_k \xi_l f_{ikl} = 0.$$

Soll nun A ein Inflexionspunkt der Curve dritter Ordnung sein, so muss die Gleichung:

$$(3) \quad \sum y_i \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i} = \sum y_i \Delta'_{ik} (f_{kil} + f_{ikl} + f_{lik}) = 0$$

für $y_i = \xi_i$ bestehen. Setzt man die Werthe der ξ in die Gleichungen (1), (2), (3) ein, so ergibt sich:

$$(4) \quad \sum h_i f_i = 0,$$

$$(5) \quad \sum h_i h_k h_l f_{ikl} + \varrho(n-2) \sum h_i h_k (f_{kil} + f_{ikl}) = 0,$$

$$(6) \quad \sum \Delta'_{ik} h_l (f_{ikl} + f_{lik} + f_{kil}) + 4\varrho(n-2)\Delta' = 0.$$

Durch Elimination von ϱ erhält man die Gleichung

$$(7) \quad \alpha \Delta_3 \Delta' = \Delta_2 \sum h_l \frac{\partial \Delta'}{\partial x_i}$$

wo α ein numerischer Factor,

$$\Delta_2 = \sum h_i h_k f_{ik}, \quad \Delta_3 = \sum h_i h_k h_l f_{ikl}$$

zu setzen ist. Trägt man endlich aus (1) das Verhältniss $\frac{\lambda}{\mu}$ ein, so stellt (7) ein Flächensystem von der Ordnung $8n - 6$ vor, welches aus Σ diejenigen Punkte ausschneidet, deren Verbindungslinie mit einem Wendepunkt der diesem Punkte zugehörigen Curve 3. Ordnung eine willkürliche Gerade schneidet.

Nun erkennt man aber in derselben Weise, wie dies von Clebsch gezeigt ist:

Es gibt ein Flächensystem $8n - 6$. Ordnung, welches durch die Doppelcurve von Σ hindurchgeht.

Und der Schnitt dieses Systems mit der Fläche Σ besteht aus der Doppelcurve T und den Punkten, deren Tangenten ε_3 jene Gerade (ab) treffen. Nimmt man an, dass jene Punkte dreifach zu zählen sind, so erhält man, da die Curve der Punkte, auf der die Berührungspunkte jener ε_3 liegen, von der Ordnung

$$11n - 13 + 3(n-3)(2n-1)$$

ist, als Ordnung x der genannten Doppelcurve

$$2x = (11n - 13)(8n - 6) - 6(n-2)(3n+1),$$

$$x = 5(7n^2 - 14n + 9).$$

Diese Curve hat in den singulären Punkten des Systems $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$ fache, in den Knoten zweiter Art dreifache Punkte. Daher ist die Zahl ihrer in nicht singuläre Punkte entfallenden Schnittpunkte mit der Brennfläche:

$$\begin{aligned} 20n[7n^2 - 14n + 9](n-1) - 30(n^3 - n^2 + n - 1) - 60(n-1)^3 \\ = 10(n-1)[5n^2 - 16n + 9]. \end{aligned}$$

Dies ist die Zahl der Punkte auf der Brennfläche, von denen zusammenfallende Haupttangenten auslaufen, welche beide als ε_3 zu betrachten sind. Diese Punkte haben eine besondere Bedeutung, sie sind offenbar solche Punkte der Doppelcurve T , welche Theile derselben mit reellen Mänteln der Fläche Σ von solchen mit imaginären scheiden; d. h. sie sind Pinch-Punkte der Fläche Σ .

Für $n = 3$ muss also die Regelfläche $N = 20$. Ordnung 120 singuläre Erzeugende σ haben. Da ihre Doppelcurve 150. Ordnung ist, hat man als Classe R ihres ebenen Schnittes 80. Und hieraus ergibt sich mit Hülfe der Formel

$$\sigma = 2(R - N)$$

ebenfalls $\sigma = 120$ als Zahl der singulären Erzeugenden. Endlich bemerke man noch:

Die Curve K der Berührungspunkte ε_4 begegnet der Doppelcurve T in $5(n-3)(7n-5)(8n-6) - 10(n-4)(n^2-1)$ Punkten.

Ich will schliesslich noch zeigen, wie man durch eine geometrische Betrachtung die Ordnung von T bestimmen kann. Zur Abkürzung sollen die Bezeichnungen:

$$p = 3(n-1)(n-3),$$

$$q = 11n - 13,$$

$$r = n^3 - n^2 - 8n + 6,$$

$$s = 3(n-3)(2n-1),$$

$$t = 5(n-3)(7n-5),$$

eingeführt werden. Nach § VIII, 4 giebt es auf einer Geraden $(p+r)$

Punkte, deren Haupttangente in Punkten einer willkürlichen Ebene einen Punkt p_1 haben. Daraus folgt: Die Regelfläche der Tangenten $\varepsilon_2 p_1 b_2$, welche ihren Punkt ε_2 in einer willkürlichen Ebene E_1 , den Punkt p_1 in einer zweiten Ebene E_2 haben, ist von der Ordnung $p + q + r$; sie durchschneidet die Ebene E_1 in einer eigentlichen Curve C_1 der Ordnung $p + r$, die Ebene E_2 in einer Curve C_2 von der Ordnung $q + r$. Beide Curven schneiden sich auf der Schnittlinie von E_1, E_2 in q der Fläche Σ angehörigen Punkten. Mithin schneidet die Curve C_1 die Fläche Σ in:

$$(q-1+p)q$$

weiteren Punkten, welche in 2 Gruppen P und Q zerfallen. In den Punkten P stützt sich die Gerade, welche in E_2 einen Punkt p_1 hat, mit einem Punkte ε_3 auf E_1 ; in den Punkten Q ist der letztere Stützpunkt nur vom Charakter ε_2 , während die andere von demselben ausgehende Haupttangente stationär ist.

Nun lässt sich aber die Anzahl der Punkte P leicht bestimmen. Denn die Curve der einfachen Berührungspunkte, welche auf allen stationären Haupttangente liegen, die von einem beliebigen ebenen Schnitt S von Σ auslaufen, ist von der Ordnung

$$t + (n-4)s;$$

mithin ist die Anzahl der Punkte Q

$$Q = (q-1+p)q - [t + (n-4)s].$$

Nunmehr denke man sich die Regelfläche der Tangente ε_2 , welche von den Punkten der Curve S auslaufen, construirt und betrachte die auf den Erzeugenden derselben liegende Curve von weiteren Punkten p_1 . Die Ordnung derselben ist Q . Diese Curve begegnet nun der Ebene von S :

erstens in den Punkten, von denen zwei stationäre Tangente auslaufen, d. h. den Punkten der Doppelcurve von Σ ;

zweitens in den Punkten, welche sich auf den in der Ebene von S liegenden Haupttangente befinden, ihre Anzahl ist

$$[3(n-1)q - s](n-3);$$

endlich in den Punkten von S , welche zugleich auf der Brennfläche liegen. Ihre Anzahl ist $2q(n-1)$, weil die Curve S in allen Punkten die Fläche Δ' berührt, wo sie dieselbe trifft. Man hat also für die Anzahl der ersten Kategorie von Punkten:

$$\begin{aligned} Q &= [3(n-1)q - s](n-3) - 2(n-1)q \\ &= 10(7n^2 - 14n + 9). \end{aligned}$$

Wie es sein muss, ist dies in der That die doppelte Ordnungszahl der Doppelcurve T .

Mit der Fläche Σ stehen die beiden anderen Covarianten X und Ω in mehrfachem Zusammenhange. Offenbar berühren sich Σ und X nach der Curve der Punkte ε_4 ; die Tangenten ε_4 sind zugleich Tangenten von Σ .*) Durch dieselbe Curve muss auch die Fläche Ω hindurchgehen. Die Doppelcurve von Ω ist der Ort der Punkte, von denen zwei Haupttangente ausgehen, welche anderswo wieder Haupttangente sind; ebenso hat auch X eine Doppelcurve, sie ist der Ort der Punkte, von denen zwei einfache Tangente ausgehen, die anderwärts einen Punkt ε_3 haben. Die Ordnungen beider Curven lassen sich in ähnlicher Weise wie die von T bestimmen.

Dresden im September 1883.

*) Auch die Tangenten ε_3 , welche zu Punkten der Berührungscurven von Δ' und Σ gehören, sind Tangente von Σ .