AGGIUNTA ALLA NOTA " SUI CAMPI ELETTROMAGNETICI PURI „

di LEONELLA CAFFARATTI.

Nell'ultimo numero della nota « Sui campi elettromagnetici puri » ¹⁾ ho osservato che, per il caso di una distribuzione simmetrica, non è possibile mantenere il campo per pura rotazione, supposto che la velocità delle cariche rimanga al di sotto della velocità della luce.

Ma la dimostrazione inceppa in una difficoltà dovuta alla circostanza seguente: Io non ho tenuto debito conto della distinzione fra il campo occupato dalle cariche e quello in cui la densità ρ è nulla.

In quest'ultimo debbono essere verificate non già le equazioni (I'), (III'), (IV'), della pag. 390, ma (rimanendo identicamente soddisfatta la equazione di Lorentz) le sole equazioni di Hertz:

$$A \frac{dE}{dt} = - \text{rot } H ,$$

$$A \frac{dH}{dt} = \text{rot } E ,$$

$$\text{div } E = \text{div } H = 0 ,$$

relative all'etere.

Tenendo conto che si tratta di campi stazionari e simmetrici, quelle concernenti la forza magnetica (che sole ci interessano per il confronto colle (I'), (III'), (IV')) assumono l'aspetto:

$$(Q) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{rot } H = 0 , \\ \text{div } H = 0 . \end{array} \right.$$

1) Nuovo Cimento, Maggio 1908, pag. 369-394.

Mi propongo di far vedere come si possa modificare la mia dimostrazione così da rispecchiare (con eguale semplicità) il vero stato delle cose.

Si vedrà che il risultato negativo da me enunciato seguita certamente a sussistere sotto una lieve restrizione, che lascia dubbio soltanto il caso, in cui il campo effettivamente occupato dalle cariche sia limitato da una superficie non ovunque convessa.

Rileviamo in primo luogo dalle equazioni (Q) che H deriva da un potenziale armonico, sarà quindi in particolare (riferendomi alle notazioni del precedente lavoro)

$$(1) \quad \Delta L = 0 \quad (\text{nei punti esterni a } \sigma);$$

mentre entro σ vale la relazione ¹⁾:

$$(2) \quad \Delta L = \frac{2}{r} \frac{d}{dr} (s-1) L.$$

Mostreremo che, sotto conveniente restrizione concernente la forma di σ , ogni funzione finita e continua in tutto lo spazio assieme alle sue derivate prime ed annullantesi all'infinito (come un potenziale newtoniano), che soddisfaccia alla (1) nei punti esterni a σ , ed alla (2) entro σ , è identicamente nulla.

Per far questo avremo bisogno del lemma espresso dalla formula ²⁾:

$$(3) \quad \int_S U \frac{dV}{dr} dS = - \int_S V \frac{dU}{dr} dS - \int_S U V \frac{dS}{r} - \\ - \int_{\sigma} U V \left(\frac{x}{r} \alpha + \frac{y}{r} \beta \right) d\sigma,$$

nella quale U e V designano due generiche funzioni dei punti di S finite e continue assieme alle loro derivate prime, α , β i coseni degli angoli che la normale al contorno diretta verso l'interno del campo fa colle direzioni positive degli assi x , y

1) Nuovo Cimento, Maggio 1908, pag. 390-391.

2) *ibidem* pag. 391-392.

ed r la distanza del punto d'integrazione dall'asse di rotazione.

Ciò premesso, applichiamo il corollario del primo teorema di Green alla funzione L tanto nello spazio interno alle cariche quanto nello spazio esterno osservando che la sfera all'infinito non reca alcun contributo, per l'ammesso comportamento di L .

Avremo per lo spazio interno S

$$\int_S L \Delta L dS + \int_S (\Delta L)^2 dS + \int_{\sigma} L \frac{dL}{dn} d\sigma = 0$$

dove, al solito, n designa la normale diretta verso l'interno del campo d'integrazione; e per lo spazio esterno S_e , ricorrendo anche la (1), avremo semplicemente:

$$\int_{S_e} (\Delta L)^2 dS - \int_{\sigma} L \frac{dL}{dn} d\sigma = 0 ,$$

con n indicandosi sempre la normale che entra nello spazio occupato dalle cariche e che è volta quindi verso l'esterno rispetto al nuovo campo d'integrazione.

Sommando le due precedenti equazioni si ha

$$(4) \quad \int_{S+S_e} (\Delta L)^2 dS + \int_S L \Delta L dS = 0 ,$$

dalla quale, ponendo per ΔL il valore dato dalla (2), deduciamo l'altra:

$$(4') \quad \int_{S+S_e} (\Delta L)^2 dS + \int_S \frac{2}{r} L^2 \frac{ds}{dr} dS + \int_S \frac{s-1}{r} 2L \frac{dL}{dr} dS = 0 .$$

L'ultimo degli integrali precedenti si può scrivere sotto la forma:

$$\int_S \frac{s-1}{r} \frac{dL^2}{dr} dS .$$

Applicando la (3) si può scinderlo in altri tre:

$$-\int_S L^2 \frac{d}{dr} \left(\frac{s-1}{r} \right) dS - \int_S L^2 \frac{s-1}{r^2} dS - \int_{\sigma} L^2 \frac{s-1}{r} \left(\frac{x}{r} \alpha + \frac{y}{r} \beta \right) d\sigma,$$

e portando nella (4') tale espressione, dopo aver eseguita la derivazione rispetto ad r , si ha in definitiva:

$$(4'') \quad \int_{S+S_e} (\Delta L)^2 dS + \int_S L^2 \left(\frac{1}{r} \frac{ds}{dr} \right) dS - \\ - \int_{\sigma} L^2 \frac{s-1}{r} \left(\frac{x}{r} \alpha + \frac{y}{r} \beta \right) d\sigma = 0.$$

Essendo [per la fatta posizione (pag. 391), in cui si scriva r al posto di x_2]

$$s = \frac{1}{1 - A^2 \omega^2 r^2},$$

si ha:

$$\frac{1}{r} \frac{ds}{dr} = \frac{2 A^2 \omega^2}{(1 - A^2 \omega^2 r^2)^2},$$

che è, come si vede, una quantità essenzialmente positiva, cosicchè il secondo integrale è positivo.

Vediamo come per una categoria molto vasta ed interessante di superfici, sia positivo anche l'ultimo addendo.

Notiamo all'uopo che

$$-\left(\frac{x}{r} \alpha + \frac{y}{r} \beta \right)$$

non è altro che il coseno dell'angolo formato dal raggio del parallelo preso in senso negativo con la normale a σ diretta verso l'interno del campo occupato dalle cariche. L'angolo formato da queste due direzioni è poi sempre acuto e quindi il coseno positivo, qualora la curva meridiana (della superficie rotonda σ che limita il campo occupato dalle cariche) incontri l'asse di rotazione in due soli punti (poli) A B e sia tale che le proiezioni dei suoi punti sull'asse non escano dal tratto A B.

In tale classe di superfici sono incluse tutte le superfici convesse, giacchè la proiezione sull'asse di un generico punto della superficie si trova sulla corda determinata dal punto e dal suo simmetrico rispetto all'asse, e questa, per la nota proprietà delle superfici convesse, giace tutta entro σ .

Noi ci riferiremo quindi a campi cosiffatti. Per essi l'ultimo integrale della (4'') è effettivamente positivo in quanto lo è la funzione sotto il segno, che risulta dal prodotto del detto coseno e di

$$L^2 \frac{s-1}{r} = L^2 \frac{A^2 \omega^2 r}{1 - A^2 \omega^2 r^2},$$

positivo anch'esso, dovendo la velocità di ogni carica mantenersi al di sotto della velocità della luce.

Ciò posto, affinchè valga la equazione (4''), dovrà ogni termine della equazione stessa annullarsi. Dal primo termine osservando che, affinchè l'integrale sia nullo, deve esser nullo ogni elemento di integrale, abbiamo

$$L = 0.$$

Ne consegue in base alla formula (III').

$$\rho = 0 \quad c. d. d.$$

Come si vede l'ipotesi di un campo simmetrico, privo di singolarità, porta (sotto la lieve restrizione accennata) alla conclusione che si annulla identicamente la ipotetica distribuzione che dovrebbe generare il campo colla sua uniforme rotazione.