Ueber die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen.

Von A. BRILL in GIESSEN.

1.

Wenn ein elastisches Medium sich in einem solchen stationären Schwingungszustande befindet, dass von einem Erschütterungspunkte aus Wellen in geschlossenen Flächen von irgend welcher Form ununterbrochen ausgehen, so lassen sich die Componenten u, v, w des Schwingungsausschlags eines Punktes xyz für geradlinige Schwingungen darstellen durch Ausdrücke von der Form:

$$\Omega \cdot \cos \frac{2\pi}{\tau} (\lambda - t)$$

oder (indem man der bequemerem Form wegen noch einen imaginären Theil hinzunimmt) durch:

$$(1) \quad \Omega \cdot e^{\frac{2\pi i}{\tau} (\lambda - t)},$$

wo λ eine reelle Function der Coordinaten bedeutet, welche für alle Punkte einer jener Flächen denselben Werth hat (λ also ein „Parameter“ der Fläche ist), Ω eine reelle Function der Coordinaten, t die Zeit, τ eine Constante (die Schwingungsdauer) ist.

Mit solchen Schwingungen wollen wir uns in der Folge beschäftigen, unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass die Componenten derselben längs des Radius vector vom Erschütterungspunkte Null sind, und unter der weiteren Voraussetzung, dass in jedem Punkte die Gleichung erfüllt ist:

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die durch die genannten Eigenschaften definirten Schwingungen sollen kurzweg „Lichtschwingungen“ genannt werden, weil jene Bedingungen erfahrungsgemäss bei der Ausbreitung der Wellen von geradlinig polarisirtem Lichte erfüllt werden. Die Flächen, in welchen die Ausbreitung der letztgenannten vor sich geht, hat für isotrope und krystalinische Medien Fresnel theoretisch und experimentell festgestellt. Wir wollen nun im Nachfolgenden Lösungen der Differentialgleichungen für die verschiedenen Medien unter der Annahme suchen, dass in der

obigen Form, welche den Lösungen zukommen soll, λ eine beliebige Function des Parameters σ der, nach Fresnel, entsprechenden Wellenfläche ist. Bezeichnet man mit „Fortpflanzungsgeschwindigkeit“ der Welle den Differentialquotienten des Parameters σ nach der Zeit, gebildet unter Voraussetzung einer constanten Phase, so hat man zufolge unserer Annahme für die Form derselben die Gleichung

$$(3) \quad \frac{2\pi i}{\tau} \left(\frac{d\lambda}{d\sigma} \cdot \frac{d\sigma}{dt} - 1 \right) = 0.$$

Wir können demnach in anderer Form die Aufgabe, mit der wir uns beschäftigen wollen, dahin aussprechen: einen allgemeinen Ausdruck für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtschwingungen, welche sich in den dem Medium entsprechenden Wellenflächen ausbreiten, aus den Differentialgleichungen für dasselbe abzuleiten.

Im Folgenden wird nun gezeigt, dass jene Aufgabe für ein isotropes Medium sich zurückführen lässt auf die Integration einer Differentialgleichung zweiter Ordnung, für welche Euler das allgemeine Integral in Form einer Reihe aufgestellt hat. Dieses Integral, in Verbindung mit Lösungen einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit zwei Variablen, von welcher die Schwingungsrichtung abhängt, erweist sich zugleich als Quelle für eine bemerkenswerthe Gattung von Lösungen der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right).$$

Für krystallinische Medien sind die von Lamé aufgestellten Differentialgleichungen zu Grunde gelegt. Die genaunte Frage, für optisch einaxige Krystalle gestellt, lässt sich auf die für isotrope Medien zurückführen. Man erkennt dies auf besonders einfachem Wege, wenn man die allgemeinen Integrale der Differentialgleichungen für optisch einaxige Krystalle kennt, die wir deshalb zuvor aufgestellt haben. Für optisch zweiaxige Krystalle führen unsere Voraussetzungen auf zwei partikuläre Lösungen, zu welchen, wenn auch unter specielleren Annahmen, schon Lamé gelangt ist.

Hierbei ergibt sich der Umstand, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit für Kugelwellen in isotropen und für die ellipsoidischen Wellen in optisch einaxigen Medien eine sehr mannigfaltige sein kann, während für die Kugelwellen in optisch einaxigen und für die Wellen der Fresnel'schen Wellenfläche in optisch zweiaxigen Krystallen nur eine gleichförmige Geschwindigkeit möglich ist.

Bevor wir zur Behandlung der Differentialgleichungen für die einzelnen Medien übergehen, wollen wir aus der Einführung der beiden ersten der oben gemachten Annahmen einige Schlüsse ziehen, die in der Folge vielfache Anwendung finden werden.

2.

Zu Coordinaten wählen wir für die Folge die Parameter ϱ , ϱ_1 , ϱ_2 dreier orthogonalen Flächensysteme, deren eines (ϱ) jedenfalls aus concentrischen Kugeln bestehe. Die beiden anderen sind dann entweder Kegel oder Ebenen. Man bemerkt, dass für ein Coordinatensystem der bezeichneten Art in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelements:

$$ds^2 = \frac{d\varrho^2}{h^2} + \frac{d\varrho_1^2}{h_1^2} + \frac{d\varrho_2^2}{h_2^2},$$

in welchem $\frac{d\varrho}{h}$, $\frac{d\varrho_1}{h_1}$, $\frac{d\varrho_2}{h_2}$ Seiten eines unendlich kleinen Parallelepipeds vorstellen, h immer gleich 1 sein muss, wenn $d\varrho$ den Zuwachs des Kugelradius bedeutet, sowie dass $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ beide mit ϱ proportional sind. Der Quotient $\frac{h_2}{h_1}$ ist demnach von ϱ unabhängig und $\frac{1}{h_1 h_2}$ mit ϱ^2 proportional. — Ferner bezeichnen wir mit U die Componente des Schwingungsausschlags eines Punktes längs des Radius vector, mit V , W diejenigen längs der Linienelemente, welche die beiden anderen Flächen auf der Kugel in dem betreffenden Punkte markiren. Alsdann fasst man die erste unserer Annahmen in die Gleichung:

$$U = 0.$$

Ferner lautet die Bedingungsgleichung (2), in orthogonalen Coordinaten ausgedrückt*), da $U = 0$ ist:

$$(3^a) \quad \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{V}{h h_2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{W}{h h_1} = 0,$$

wo die h die schon oben angeführte Bedeutung haben. Die Annahme über die Form der Componenten ergibt:

$$V = \Phi \cdot e^{(\lambda - t) \frac{2i\pi}{\tau}}; \quad W = \Psi \cdot e^{(\lambda - t) \frac{2i\pi}{\tau}},$$

wo Φ und Ψ reelle Functionen von ϱ , ϱ_1 , ϱ_2 sind, welche sich durch Einsetzen von V und W in die obige Gleichung näher bestimmen. Man erhält nämlich hierbei einen reellen und einen imaginären Theil, von denen jeder für sich verschwinden muss, so dass:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{\Phi}{h h_2} + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{\Psi}{h h_1} &= 0, \\ \frac{\Phi}{h h_2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + \frac{\Psi}{h h_1} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} &= 0. \end{aligned}$$

Man erfüllt nun die erste dieser Bedingungen in ganz allgemeiner Weise, indem man setzt:

*) Die Transformation der in der Theorie der Elasticität gebräuchlichen Ausdrücke und Gleichungen in ein krummliniges orthogonales Coordinatensystem findet man in: Neumann, zur Theorie etc.; Crelle-Borchardt, Bd. 57; oder Lamé, coordonnées curvilignes.

$$\frac{\Phi}{h h_2} = \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} ; \quad \frac{\Psi}{h h_1} = - \frac{\partial F}{\partial \varrho_1},$$

wo F eine reelle Function der Coordinaten ist. Die letztere ergibt dann:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_2} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial F}{\partial \varrho_1} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt entweder:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0 ; \quad \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0 ;$$

also λ eine Function von ϱ allein; alsdann ist F völlig unbestimmt gelassen.

Oder man schliesst aus dem Verschwinden der Functional-Determinante auf eine Beziehung zwischen F und λ , unabhängig von ϱ_1 und ϱ_2 , vermittelt deren man F durch λ und ϱ ausgedrückt sich vorstellen kann. Alsdann hat man:

$$\frac{\partial F}{\partial \varrho_1} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} ; \quad \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} ;$$

also

$$V : W = h_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} : - h_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1}.$$

Nun ist aber andererseits:

$$d\lambda = d\varrho_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + d\varrho_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} + d\varrho \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho}.$$

Für die Elemente der Durchschnittscurve einer Wellenfläche mit dem Parameter λ mit der Kugel ϱ (für welche sowohl $d\lambda$ als $d\varrho$ Null ist) hat man demnach:

$$0 = d\varrho_1 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} + d\varrho_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2}$$

oder

$$\frac{d\varrho_1}{h_1} : \frac{d\varrho_2}{h_2} = h_2 \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} : - h_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1}.$$

Durch Vergleichung folgt:

$$V : W = \frac{d\varrho_1}{h_1} : \frac{d\varrho_2}{h_2}.$$

Die Glieder des letzten Verhältnisses sind aber nichts Anderes, als die absoluten Längen der Projectionen eines Bogenelementes der Durchschnittscurve auf die beiden orthogonalen Curvenelemente, längs deren V und W gezählt sind. Man hat also für eine beliebig gestaltete Wellenfläche den Satz:

Die Lichtschwingungen finden statt längs der Elemente der Durchschnittscurven der Wellenfläche mit concentrischen Kugeln, und zwar stellen sich für irgend einen Punkt die Componenten längs der orthogonalen Curvenelemente, die sich in diesem Punkte schneiden, dar in der Form:

$$(4) \quad U = 0 ; \quad V = h_2 \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho_2} \cdot e^{(2-i) \frac{2\pi i}{\tau}} ; \quad W = - h_1 \cdot \frac{\partial F}{\partial \varrho_1} \cdot e^{\frac{2\pi i}{\tau} (2-i)},$$

wo F eine Function von λ und ϱ allein ist für den Fall, dass λ noch ϱ_1 und ϱ_2 ausser ϱ enthält; im entgegengesetzten F eine beliebige Function von ϱ , ϱ_1 , ϱ_2 sein kann.

Enthält λ ausser ϱ nur eine der Variablen ϱ_1 , ϱ_2 , so enthält auch F blos noch diese eine, daher ist für diesen Fall ausser U auch noch entweder V oder W gleich Null.

3.

Isotrope Medien.

Die Differentialgleichungen für Lichtschwingungen in einem isotropen Medium haben in orthogonalen Coordinaten folgende Form (s. die vorige Note):

$$\begin{aligned}
 \omega^2 \cdot \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left[\frac{h_1 h}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{V}{h_1} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left[\frac{h h_2}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{U}{h} \right) \right]; \\
 \omega^2 \cdot \frac{1}{h_2 h} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left[\frac{h_2 h_1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{W}{h_2} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\frac{h_1 h}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{V}{h_1} \right) \right]; \\
 \omega^2 \cdot \frac{1}{h h_1} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial \varrho} \left[\frac{h h_2}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{U}{h} \right) \right] \\
 &\quad - \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left[\frac{h_2 h_1}{h} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{W}{h_2} \right) \right];
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

statt die unseren Voraussetzungen entsprechende Form der Lösungen, wie wir sie aus dem vorigen Abschnitte entnehmen können, hier sogleich einzuführen, wollen wir, um übersichtlicher verfahren zu können, die folgenden allgemeineren Lösungen der Gleichung (3^a) benutzen:

$$U = 0 \quad ; \quad \frac{V}{h_2} = \frac{\partial G}{\partial \varrho_2} \quad ; \quad \frac{W}{h_1} = - \frac{\partial G}{\partial \varrho_1},
 \tag{6}$$

wo G zunächst noch eine beliebige Function der Coordinaten und der Zeit sein soll. Alsdann ergibt die erste der drei Gleichungen (5) die in (6) bereits verwendete Bedingung (3^a); die beiden letzten in Gemeinschaft ergeben:

$$\omega^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \cdot \frac{\partial G}{\partial \varrho_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \left(\frac{h_2}{h_1} \cdot \frac{\partial G}{\partial \varrho_2} \right) \right] + \frac{\partial^2 G}{\partial \varrho^2},
 \tag{7}$$

wo eine willkürliche Function von ϱ und t , welche auf den Werth von G keinen Einfluss hat, additiv in G hereingezogen ist. Diese eine partielle Differentialgleichung umfasst alle diejenigen Lösungen der drei simultanen Differentialgleichungen für isotrope Medien (und, wie wir später sehen werden, auch für optisch einaxige Krystalle),

welche sich unter der Voraussetzung bilden lassen, dass die Schwingungen transversal zum Radius vector vom Mittelpunkt des Kugelsystems und ohne kubische Dilatation stattfinden. — Führt man nun aber die im Vorigen aufgestellte speciellere Form der Lösungen (4) ein und setzt dabei, um noch der letzten Annahme zu genügen, λ als Function von ϱ allein voraus, indem bekanntlich die Form der Lichtwellen in einem isotropen Medium die von Kugeloberflächen ist, so ergibt die Vergleichung der Werthe für $\frac{V}{h_2}$ und $-\frac{W}{h_1}$ in (4) und (6) sofort die Beziehung:

$$(8) \quad G = F \cdot e^{(\lambda - t) \frac{2\pi i}{\tau}}.$$

Dieser Werth in die Differentialgleichung (7) für G eingesetzt, ergibt einen reellen und einen imaginären Theil. Der letztere (durch das letzte Glied der rechten Seite allein gebildet) ergibt:

$$2 \frac{\partial F}{\partial \varrho} \cdot \frac{d\lambda}{d\varrho} + F \cdot \frac{d^2 \lambda}{d\varrho^2} = 0$$

oder

$$2 \frac{\partial}{\partial \varrho} \log F + \frac{d}{d\varrho} \log \frac{d\lambda}{d\varrho} = 0.$$

Hieraus folgt durch Integration:

$$F^2 \cdot \frac{d\lambda}{d\varrho} = \Omega^2(\varrho_1, \varrho_2),$$

wo Ω^2 eine beliebige Function der eingeklammerten Grössen ist. Daher durch Eintragung des hieraus sich ergebenden Werthes von F in die Gleichung (8):

$$(9) \quad G = \Omega(\varrho_1, \varrho_2) \cdot R \cdot e^{-\frac{2\pi i}{\tau} \cdot t},$$

wo

$$R = \frac{e^{\frac{2\pi i}{\tau} \lambda}}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\varrho}}},$$

also R eine Function von ϱ allein ist. Aus dieser Form für G folgt mit Rücksicht auf das über die h Gesagte, dass auch V und W in zwei Factoren zerfällt werden können, deren einer bloß ϱ , deren anderer bloß ϱ_1 und ϱ_2 enthält. Daher haben die Lichtschwingungen für entsprechende Punkte zweier concentrischen Kugeloberflächen um den Erschütterungspunkt das gleiche Amplitudenverhältniss, und zwar ist dasselbe gleich dem Produkt aus dem reciproken Verhältniss der Quadratwurzeln aus den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten einer Kugelwelle, welche die eine und die andere Kugelfläche passirt, in das reciproke Verhältniss der Kugelradien. Indem wir, statt auch noch den reellen Theil der Gleichung für F und λ herzu-

stellen, zweckmässiger zu der Gleichung (7) für G zurückkehren, setzen wir den Werth (9) in dieselbe ein und erhalten:

$$-\frac{4\pi^2}{\tau^2} \cdot \omega^2 \cdot \Omega \cdot R = R \cdot \delta^2 \Omega + \Omega \cdot \frac{\partial^2 R}{\partial q^2},$$

indem wir hier wie in der Folge mit $\delta^2 \tilde{\omega}$ die Operation bezeichnen:

$$(9^a) \quad \delta^2 \tilde{\omega} = h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_1}{h_2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial q_1} \right) \right].$$

Weil nun aber in einer Bestimmungsgleichung für R q_1 und q_2 nicht mehr vorkommen können, ebensowenig wie q in einer solchen für Ω , so muss diese Gleichung in zwei zerfällbar sein, deren jede die verlangte Bedingung für Ω und R erfüllt. Dies geschieht nun, wie ersichtlich, in allgemeinsten Weise, indem man setzt:

$$(10) \quad \begin{cases} q^2 \cdot \delta^2 \Omega + \beta \Omega = 0 & \text{und} \\ \frac{d^2 R}{dq^2} = R \left(T^2 + \frac{\beta}{q^2} \right), \end{cases}$$

wo man

$$(10^a) \quad T = \frac{2i\pi}{\tau} \cdot \omega$$

gesetzt hat, und β eine willkürliche Constante bedeutet.

Die Gleichungen (9) (10) sind eine nothwendige und hinreichende Folge der Annahme (8) und der Gleichung (7) für G und somit der in (1) gemachten Annahmen in ihrer Anwendung auf isotrope Medien. — Es handelt sich nun um die Aufstellung von Lösungen für die Gleichung, welcher Ω genügt, und um die Integration der Gleichung für R .

4.

Die Gleichung für Ω ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung mit noch zwei willkürlich Veränderlichen. Eine Zerfällung derselben in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen kann erst nach Einführung eines bestimmten Coordinatensystems auf der Kugel vorgenommen werden. Man hat nun vorzugsweise zwei solcher orthogonaler Systeme näher studirt, deren eines aus zwei Schaaren homofokaler Kugelellipsen, deren anderes aus zwei Schaaren von Kugelkreisen gebildet wird. Für das letztere, das gewöhnliche Polarcordinatensystem, sei hier die Trennung und Integration der daraus entstehenden Differentialgleichungen zweiter Ordnung bis zu Ende durchgeführt. *)

*) Führt man die Trennung auch für das erstgenannte Coordinatensystem aus, so erhält man Gleichungen, die man auf die bemerkenswerthe Form bringen kann:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial v_1^2} = k \cdot \Omega \left[\frac{\sin^2 am v_1}{b^2} + \frac{\cos^2 am v_1}{a^2} \right]; \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial v_2^2} = -k \cdot \Omega \left[\frac{\sin^2 am v_2}{b^2} - \frac{\cos^2 am v_2}{c^2} \right],$$

wo zu dem Argument v_1 der Modul $\kappa = \frac{c}{b} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}$, zu v_2 der complementäre

Wir führen statt der Bezeichnungen ϱ , ϱ_1 , ϱ_2 die üblichen ein: r , φ , ψ . Ferner bestehe für das Linienelement die Gleichung:

$$(11) \quad ds^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \cos^2 \varphi d\psi^2,$$

dann hat die Gleichung für Ω die Form:

$$\frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \cdot \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} + \beta \Omega = 0.$$

Man spaltet diese Gleichung in die folgenden mit getrennten Veränderlichen:

$$(12^a) \quad \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} + \alpha \cdot \Omega = 0,$$

$$(12^b) \quad \frac{1}{\cos \varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} \right) = \frac{\alpha \Omega}{\cos^2 \varphi} - \beta \Omega,$$

wo α eine neue willkürliche Constante. Die erste dieser beiden Gleichungen liefert bekanntlich das Integral:

$$\Omega = \Phi_1 \cos(\psi \sqrt{\alpha}) + \Phi_2 \sin(\psi \sqrt{\alpha}),$$

wo die Φ noch zu bestimmende Functionen von φ sind. Für $\alpha=0$ kommt:

$$\Omega = \Phi_3 \psi + \Phi_4.$$

Die Summe beider Integrale:

$$(13) \quad \Omega = \Phi_1 \cos(\psi \sqrt{\alpha}) + \Phi_2 \sin(\psi \sqrt{\alpha}) + \Phi_3 \psi + \Phi_4.$$

in (12^b) eingesetzt, genügt dieser Gleichung, wenn Φ_1 und Φ_2 einzeln genügen und Φ_3 , Φ_4 für den Werth $\alpha=0$ genügt.

Nun lässt sich aber mit Hilfe einer von Euler*) angegebenen Methode das allgemeine Integral der Gleichung (12^b) für die Function Φ in Form einer nach Potenzen von $\cos \varphi$ oder $\sin \varphi$ entwickelten Reihe aufstellen. Führt man nämlich als unabhängige Variable in jener Gleichung ein:

$$x = \cos \varphi,$$

so kommt:

$$(14) \quad x^2 (1-x^2) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + x (1-2x^2) \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \Phi (-\alpha + \beta x^2) = 0.$$

Nimmt man für Φ die Reihenentwicklung an:

$$v = x^\nu (A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \dots),$$

so sind die Constante ν und die A so zu bestimmen, dass der vorliegenden Differentialgleichung identisch genügt wird. Setzt man die obige Reihe ein und ordnet nach Potenzen von x , so müssen die Coefficienten dieser letzteren einzeln verschwinden. Man erhält so durch Betrachtung des Coefficienten von x^ν die Bedingung:

Modul α' gehört. a, b, c sind Constante, die von dem Coordinatensystem abhängen, k eine willkürliche Constante.

*) Institutiones calc. int. II, p. 183 sqq.

$$v = \pm \sqrt{\alpha}.$$

Die höheren Potenzen ergeben Gleichungen, aus denen ein Coefficient (A_p) durch den vorhergehenden (A_{p-1}) ausgedrückt werden kann, und zwar findet man:

$$4p(p+v) \cdot A_p = A_{p-1} [2(p-1)(2p+2v-1) + v^2 + v - \beta].$$

Weil nun das Verhältniss $A_p : A_{p-1}$ mit wachsendem p sich der 1 nähert, so convergirt die Reihe, so lange φ reell ist, indem $x = \cos \varphi$ alsdann unterhalb 1 bleibt. — Die beiden Werthe von v geben zwei verschiedenen Integralen v und u Entstehung, jedes mit einer willkürlichen Constanten, deren Summe:

$$(14) \quad \Phi = u + v$$

das vollständige Integral bildet. Nur für den Fall, dass $\sqrt{\alpha}$ eine ganze Zahl ist, lassen sich die Terme der einen Reihe nicht mehr bestimmen; aber man genügt alsdann allgemein durch den Werth:

$$(14^a) \quad \Phi = u + v \cdot \log kx,$$

wo k eine willkürliche Constante, v eine Reihe der oben beschriebenen Art, u eine ähnliche mit v weiteren Gliedern vor A_0 mit negativen geraden Exponenten ist. Man überzeugt sich leicht hiervon durch Einsetzen. Hiernach erhält man für $\alpha = 0$ das Integral:

$$(14^b) \quad \Phi = (A + B \log x) (A_0 + A_1 x^2 + A_2 x^4 + A_3 x^6 + \dots),$$

wo die A sich aus der oben angegebenen Formel bestimmen.

Wenn von den Coefficienten A in der angegebenen Reihe v einmal einer Null wird, so werden alle folgenden Null und man erhält ein Integral in geschlossener Form. Die Bedingung dafür, dass der p . Coefficient verschwindet, ist aber einfach dadurch erfüllt, dass in der Gleichung zwischen A_p und A_{p-1} die eckige Klammer verschwindet. — Die Einführung von $y = \sin \varphi$ als unabhängige Variable in die Gleichung für Φ würde ebenfalls und zwar auf andere Integrale in geschlossener Form führen. Doch mag es genügen, dies erwähnt zu haben.

Die Differentialgleichung, von der R abhängt:

$$\frac{d^2 R}{d\varphi^2} = R \left(T^2 + \frac{\beta}{\varphi^2} \right),$$

lässt sich nach der soeben angewandten Methode gleichfalls integrieren.*) In der That, man setze für R die Reihe ein:

$$v = \varphi^\mu (A_0 + A_1 \varphi^2 + A_2 \varphi^4 + \dots),$$

*) Neuerdings hat man die Riccati'sche Differentialgleichung 2^{ter} Ordnung, auf welche sich die obige zurückführen lässt, mittelst Bessel'scher Functionen integriert (Lommel, Bessel'sche Functionen).

so bestimmt sich, wie früher μ aus der Gleichung, die dem Coefficienten von ϱ^μ entstammt:

$$\mu^2 - \mu - \beta = 0.$$

Ferner ergibt die Methode der unbestimmten Coefficienten:

$$p(2p + 2\mu - 1)A_p = -\frac{T}{2} \cdot A_{p-1};$$

daher nach Einsetzung:

$$v = A \cdot \varrho^\mu \left[1 + \frac{T^2 \varrho^2}{2} \cdot \frac{1}{2\mu+1} + \frac{T^4 \varrho^4}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2\mu+1 \cdot 2\mu+3} + \right. \\ \left. + \frac{T^6 \varrho^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{2\mu+1 \cdot 2\mu+3 \cdot 2\mu+5} + \dots \right].$$

Diese Reihe convergirt für jeden endlichen Werth von ϱ . A ist eine willkürliche Constante. Die Gleichung für μ ist quadratisch und giebt somit zweien Integralen u und v Entstehung, deren Summe:

$$R = u + v$$

das allgemeine Integral darstellt, so lange nicht:

$$\beta = -\frac{1}{4} + q^2,$$

wo q eine ganze Zahl. In diesem Falle genügt man allgemein durch den Werth:

$$(15^a) \quad R = u + v \cdot \log k\varrho,$$

wo k eine willkürliche Constante, v die obige Reihe für den einen Werth von μ ist, u eine ähnliche mit noch q Gliedern vor A_0 , die aus negativen geraden Potenzen gebildet sind. Setzt man nun je nach dem Werth von β für R den Werth (15) oder (15^a) in die Gleichung (9) für G ein, verfährt ebenso mit dem Ausdruck für Ω (13), nachdem man darin Φ_1 und Φ_2 aus (14) oder (14^a) (je nach dem Werthe von α), sowie Φ_3 und Φ_4 aus (14^b) eingetragen, so hat man hierdurch eine solche Lösung G der Gleichung (7), welche, unter den vorgeschriebenen Bedingungen, zugleich in Rücksicht auf R die allgemeinste ist.

Aus diesem Grunde lässt sich aber auch das allgemeine Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit unter den gegebenen Bedingungen in eine Formel zusammenfassen. Es folgt nämlich aus (9):

$$R = \frac{e^{\frac{2\pi i}{\tau} \lambda}}{\sqrt{\frac{d\lambda}{d\varrho}}},$$

durch Integration und nachmalige Differentiation:

$$\frac{d\lambda}{d\varrho} = -\frac{1}{\frac{4i\pi}{\tau} \cdot R^2 \cdot \int \frac{d\varrho}{R^2}},$$

das Integral mit beliebiger unterer Grenze genommen. Daher hat man für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit den Ausdruck:

$$(16) \quad \frac{d\varrho}{dt} = -\frac{4i\pi}{\tau} \cdot R^2 \cdot \int \frac{d\varrho}{R^2};$$

welcher nach Einsetzung von R aus (15), (15^a) ausführbar wird.

Die Reihe v für R bricht zwar niemals ab, doch lässt sich für manche Werthe von β v auf die Entwicklung von bekannten Functionen zurückführen. So hat man für $\beta = 2$ ($\mu = +2$ oder $\mu = -1$) durch Zusammenziehen der beiden Entwicklungen das Integral:

$$(17) \quad R = A \left(\frac{1}{e^T} - 1 \right) e^{T\varrho} + B \left(\frac{1}{e^T} + 1 \right) e^{-T\varrho}, \quad \text{wo } T = \frac{2i\pi}{\tau}.$$

Man findet alsdann für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit:

$$1 - \frac{1}{T^2 \varrho^2}.$$

Für diesen Fall ($\beta = 2$) mögen beispielsweise noch zwei Lösungen vollständig hingeschrieben werden. Man stelle G auf und findet alsdann aus (6) und (11):

$$V = \frac{1}{r \cos \varphi} \cdot \frac{\partial G}{\partial \varphi}; \quad W = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial G}{\partial \psi};$$

also für $\alpha = 1$:

$$V = (-A \sin \psi + B \cos \psi) \cdot \frac{R}{\varrho}; \quad W = (A \cos \psi + B \sin \psi) \cdot \sin \varphi \cdot \frac{R}{\varrho};$$

für $\alpha = 4$:

$$V = (-A \sin 2\psi + B \cos 2\psi) \cdot \frac{1}{\cos^3 \varphi} \cdot \frac{R}{\varrho}; \quad W = -(A \cos 2\psi + B \sin 2\psi) \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \cdot \frac{R}{\varrho};$$

wo R in beiden Fällen den Werth (17) hat.

Wir wollen diese Beispiele von Lösungen der gegebenen Differentialgleichungen in geschlossener Form hier nicht vermehren, sondern nur gelegentlich der beiden angeschriebenen auf ein wesentliches Unterscheidungsmerkmal derselben, sowie überhaupt aller Lösungen, die sich bei Einführung von Polarcoordinaten ergeben, aufmerksam machen. Die letztere der beiden Lösungen wird unstetig für $\varphi = 0$, also längs der ganzen Axe der Kegel φ ; die erstere nur für den einen Punkt $\varrho = 0$. Soll nun die Unstetigkeit längs einer geraden Linie vermieden werden, so darf die Reihenentwicklung v für Φ nur Potenzen von x enthalten, deren Exponenten ≥ 1 sind. Man erreicht dies dadurch, dass man $\alpha \geq 1$ annimmt, und für Φ diejenige Reihenentwicklung als partikuläres Integral annimmt, welche dem positiven Werthe von v entspricht. Soll endlich die Lösung V , W auch nicht für den Punkt $\varrho = 0$ unstetig werden, also für jeden im Endlichen liegenden Punkt endlich bleiben, so ist ausserdem für R diejenige Reihenentwicklung als partikuläres Integral anzusetzen, welche, nachdem β jedenfalls positiv angenommen, dem positiven Werthe von μ entspricht (in der Lösung (17) z. B. für $B = -A$). Diese Bedingungen sind gleichzeitig erfüllbar.

Die in diesem Abschnitte aufgestellten Lösungen der Differentialgleichungen (5) liefern aber zugleich eine Quelle von Lösungen der auch in anderen Gebieten der Physik vielfach auftretenden Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial z^2} \right).$$

Denn dieser Gleichung genügen bekanntlich die Componenten:

$$\begin{aligned} u &= U \sin \varphi & + & V \cos \varphi \\ (19) \quad v &= U \cos \varphi \sin \psi - V \sin \varphi \sin \psi + W \cos \psi \\ w &= U \cos \varphi \cos \psi - V \sin \varphi \cos \psi - W \sin \psi, \end{aligned}$$

für rechtwinklige Coordinaten:

$$(19^a) \quad x = r \sin \varphi \quad ; \quad y = r \cos \varphi \sin \psi \quad ; \quad z = r \cos \varphi \cos \psi,$$

wenn die U , V , W den Differentialgleichungen (5), für Polarcoordinaten specialisirt, genügen. Man hat $b^2 = \frac{1}{\omega^2}$ zu setzen und irgend eine der für U , V , W gefundenen Lösungen in den Gleichungen (19) für die u , v , w anzunehmen. So genügt beispielsweise (T aus 10^a):

$$\tilde{\omega} = \frac{x}{r^2} \left[\frac{1}{rT} - 1 \right] e^{\left(r - \frac{t}{\omega}\right)T} \quad ; \quad \tilde{\omega} = \frac{z}{z^2 + y^2} e^{\left(r - \frac{t}{\omega}\right)T};$$

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{x^2}{Vz^2 + y^2} - \frac{z^2}{(z^2 + y^2)^2}} (A + B \log kr) \left[1 + \left(\frac{Tr}{2}\right)^2 + \left(\frac{T^2 r^2}{2 \cdot 4}\right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{T^3 r^3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \dots \right] e^{-\frac{tT}{\omega}};$$

nebst den Differentialquotienten nach x , y , z , $z + iy$, $z - iy$, u. s. w. Lösungen, die wir hierher gesetzt haben, um daran auf die der Trennung der Variabeln in der Gleichung für Ω entstammende Einseitigkeit aufmerksam zu machen.

5.

Optisch einaxige Krystalle.

Für die Fortpflanzung des Lichts in Krystallen hat Lamé, indem er die von Green aufgestellte Behandlungsweise adoptirte, homogene Differentialgleichungen 2^{ter} Ordnung angegeben, welche sich durch ihre Einfachheit empfehlen und, ohne weitere Annahmen nöthig zu machen, einen raschen Uebergang zu der Gleichung der Fresnel'schen Wellenfläche ermöglichen. Wir werden uns bei der Betrachtung von krystallinischen Medien dieser Gleichungen bedienen. Dieselben enthalten drei Constante und sind unter der Voraussetzung gebildet, dass die kubische Dilatation Null sei*). Der Uebergang von optisch

*) Lamé, Elastic. S. 297.

zweiartigen auf optisch einaxige Medien wird dadurch bewirkt, dass man zwei jener Constanten einander gleich setzt. Demnach kann man die hieraus oder aus den (weiter unten (38^a) angeführten) Laméschen Differentialgleichungen für $b = c$ sich ergebenden Differentialgleichungen auf die Form bringen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \\ (21) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) - (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) - (b^2 - a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen schliessen, wie leicht ersichtlich, die Bedingung ein:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Die Lösungen u, v, w eines Systems von Differentialgleichungen der obigen Art enthalten nun im Allgemeinen je zwei willkürliche Functionen. Doch bestehe in unserem Falle die obige Gleichung für zweimal drei derselben, so dass die Anzahl der in die vollständigen Integrale eingehenden willkürlichen Functionen nur noch 4 beträgt.

Die Form (21) der Gleichungen für optisch einaxige Medien ist nun aber eine so einfache, dass man die allgemeinsten Integrale derselben noch in übersichtlicher Gestalt aufstellen kann. Wir wollen dieselben hier geben, um so mehr, als sich aus ihnen mit grosser Leichtigkeit die Lösung der im ersten Abschnitt gestellten Frage ableiten lässt. Man wird sehen, dass die Integrale von den Lösungen zweier partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung von bekannter Form abhängen, deren jede zwei willkürliche Functionen mit sich führt, so dass die Gesamtzahl der erforderlichen willkürlichen Functionen erfüllt wird. Die Integrale lassen sich in eine solche Form bringen, welche der von Herrn Clebsch für isotrope Medien gebildeten ähnlich ist.

Setzt man:

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = U', \text{ also } U' = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z},$$

so besteht für U' dieselbe Differentialgleichung, wie für u , für welche wir den Weg zu partikulären Integralen schon oben gezeigt haben. Differentiirt man ferner die zweite der vorliegenden Gleichungen nach z , die dritte nach y , und zieht die letztere ab, so kommt eine Differentialgleichung für

$$\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = U;$$

man hat nämlich alsdann:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = b^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right).$$

Diese Differentialgleichung geht in die für u über, wenn man darin statt y, z resp. $\frac{a}{b} \cdot y, \frac{a}{b} \cdot z$ setzt. Daher liefert jede Lösung der einen Gleichung eine solche für die andere.

Es bleibt also nur noch die Berechnung von u, v, w aus den Gleichungen übrig:

$$(22) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -U' \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= U' \\ \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= U, \end{aligned}$$

wo U und U' Integrale der Gleichungen sind:

$$(22^a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 U'}{\partial t^2} &= b^2 \left(\frac{\partial^2 U'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} &= b^2 \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

u zunächst ergibt sich durch Quadratur.

Um v und w zu erhalten, setze man:

$$(23) \quad \begin{aligned} z + iy &= \lambda & z &= \frac{\mu + \lambda}{2} \\ &\text{also} & & \\ z - iy &= \mu & y &= i \frac{\mu - \lambda}{2}. \end{aligned}$$

Alsdann hat man noch:

$$(23^a) \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \mu}; \quad \frac{\partial}{\partial y} = -i \frac{\partial}{\partial \lambda} + i \frac{\partial}{\partial \mu}; \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \mu};$$

die letzten beiden der obigen Gleichungen gehen alsdann über in:

$$2. \frac{\partial(v + iw)}{\partial \mu} = U + iU'; \quad 2. \frac{\partial(v - iw)}{\partial \lambda} = U - iU';$$

daher folgt:

$$\begin{aligned} 4v &= \int (U + iU') d\mu + \int (U - iU') d\lambda \\ 4w &= \int (U + iU') d\mu - \int (U - iU') d\lambda, \end{aligned}$$

wo die dabei auftretenden willkürlichen Functionen von μ und λ in die Integralzeichen herein gezogen sind.

Setzt man, um die Bezeichnung mittelst Integralzeichen zu vermeiden:

$$U = 4 \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial \lambda \partial \mu}; \quad U' = 4 \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial \lambda \partial \mu \partial x},$$

so lassen sich in dem Ausdrucke für v und w die Differentialquotienten nach λ und μ wieder zusammenfassen und man hat (23^a):

$$(24) \quad \begin{aligned} u &= -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \\ v &= \frac{\partial S}{\partial z} + \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}; \\ w &= -\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial x}; \end{aligned}$$

Diese Form für die u, v, w umfasst jedenfalls die allgemeinen Integrale. Ob dieselbe nicht noch zu specialisiren ist, damit sie wirklich Integrale der gegebenen Gleichungen sind, muss man durch Einsetzen entscheiden. Diese Operation liefert die Differentialgleichungen, denen alsdann S und T zu genügen haben, und zwar findet man, dass die nothwendige und hinreichende Form der Integrale der gegebenen Differentialgleichungen die oben aufgestellte (24) ist, wenn S und T aus den Gleichungen bestimmt werden:

$$(24^a) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} &= b^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 S}{\partial t^2} &= b^2 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + a^2 \left(\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \right) \end{aligned}$$

Es sei uns erlaubt, einige für isotrope Medien bekannte Lösungen für optisch einaxige zu erweitern.

Auf Lösungen von der Form:

$$(25) \quad \begin{aligned} u &= \frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \\ v &= \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \\ w &= \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \end{aligned}$$

kommt man, wenn man setzt (λ und μ in der obigen Bedeutung):

$$(26) \quad T = -\frac{1}{4} \int \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) d\lambda d\mu; \quad S = U - \frac{1}{4} \int \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} \right) d\lambda d\mu,$$

wo
$$\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} = M \text{ und } \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = N$$

bezüglich den Gleichungen für T und S Genüge leisten. Auch U muss der letzteren genügen.

Setzt man z. B.

$$\begin{aligned} U &= A \cdot e^{p-mt} \\ V &= B \cdot e^{p-mt} \\ W &= C \cdot e^{p-mt}, \end{aligned}$$

wo $p = \alpha x + \beta y + \gamma z$ α, β, γ die Cosinus der Neigungswinkel irgend einer Richtung gegen die Axen sind, m eine Constante, so kommt:

$$M = (B\gamma - C\beta) e^{p-mt}; \quad N = (B\beta + C\gamma) e^{p-mt}.$$

Daher hat man: $(B\gamma - C\beta) (m^2 - b^2) = 0$

$$(B\beta' + C\gamma' (m^2 - a^2\alpha^2 - b^2 [\gamma^2 + \beta^2])) = 0,$$

dies giebt zwei Lösungen:

$$1) B\gamma - C\beta = 0 \text{ und } m^2 = a^2\alpha^2 + b^2 (\beta^2 + \gamma^2);$$

$$2) B\beta + C\gamma = 0 \text{ und } m^2 = b^2 \text{ u. s. w.}$$

Für isotrope Medien folgt aus den Bedingungsgleichungen für S und T , dass U , V , W , wenn $a = b$, alle dieselben Gleichungen, welchen T für optisch einaxige genügt, befriedigen müssen. Diese Form ist dann die allgemeinste für Lösungen der Differentialgleichungen für isotrope Medien*).

Man genügt den Bedingungsgleichungen für $\tilde{M}$, N und U auch, indem man setzt

$$V = 0; \quad W = 0; \quad U = \frac{e^{(q-r)\frac{2\pi i}{\tau}}}{q},$$

$$\text{wo } q = \sqrt{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2}}$$

oder für U irgend ein anderes Integral der Gleichung für S . Auf die von Lamé**) für optisch zweiaxige Krystalle angegebenen Lösungen, specialisirt für den Fall optisch einaxiger, kommt man, indem man setzt:

$$(27) \quad T = -\frac{1}{2} \int e^{(\frac{r}{b} - t) \frac{2\pi i}{\tau}} \left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu} \right); \quad S = -\frac{1}{2} \int e^{(q-r) \frac{2\pi i}{\tau}} \left(\frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\mu}{\mu} \right),$$

wo q in der eben erwähnten Bedeutung genommen ist, λ und μ in der früher angewandten.

6.

Die Lösungen, die wir oben gefunden, setzen sich additiv je aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen zusammen, deren einer, von S herrührend, den in optisch einaxigen Medien auftretenden ellipsoidischen Wellen entspricht, während der andere, T entstammend, den Kugelwellen Entstehung giebt. Der letztere Theil genügt der Gleichung:

$$(28) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

welche Gleichung aber auch zugleich den erstern Theil der Lösungen ausschliesst, indem sich daraus sofort ergibt:

$$S = 0.$$

*) Für isotrope Medien wurde diese Form schon von Herrn Clebsch angegeben. Crelle-Borchardt, Bd. 61.

**) Elasticité, p. 319, 23. leq.

Umgekehrt ist die Gleichung:

$$(29) \quad u = 0$$

der Repräsentant für den ersteren Theil der Lösungen allein und umfasst dieselben vollständig.

Diese Bemerkungen genügen, um die Ableitung und Behandlung der aus Einführung der Form der Lösungen, die im 1. und 2. Abschnitt aufgestellt worden, sich ergebenden Differentialgleichungen zurückzuführen auf die nämliche Aufgabe für isotrope Medien, eine Aufgabe, die wir bereits gelöst. In der That, betrachten wir blos diejenigen Schwingungen, welche durch die Gleichungen definirt sind:

$$(30) \quad u_1 = -\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; v_1 = \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial x}; w_1 = \frac{\partial^2 T}{\partial z \partial x},$$

wo T der Gleichung zu genügen hat:

$$(30^a) \quad \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = b^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),$$

so bemerkt man, dass der Buchstabe a , das Unterscheidungszeichen der optisch einaxigen von isotropen Medien, daraus verschwunden ist. — Andererseits haben wir im vorigen Abschnitt gesehen, dass die Lösungen (25) die allgemeinsten sind für isotrope Medien, wenn die U , V , W der zuletzt angeschriebenen Gleichung (30^a) genügen. Führt man in die Gleichungen (25) die Bedingung (28) ein, so folgen Lösungen von eben der Form (30). Fügt man also den unter irgend welchen besonderen Voraussetzungen für isotrope Medien aufgestellten Lösungen die Bedingung hinzu:

$$(28) \quad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 0,$$

so sind dadurch alle diejenigen unter jenen Voraussetzungen sich ausbreitenden Schwingungen charakterisirt, welche den optisch einaxigen und den isotropen Medien zugleich zukommen. Wir haben oben durch die Gleichung:

$$(7) \quad w^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \delta^2 G + \frac{\partial^2 G}{\partial \rho^2},$$

wo $\delta^2 G$ die frühere Bedeutung (9^a) hat, alle diejenigen Schwingungen definirt gesehen, welche ohne kubische Dilatation und transversal zum Radius vector von einem gewissen Punkte aus vor sich gehen. Die obige Bedingungsgleichung (28) in die hier benutzten Coordinaten ϱ , ϱ_1 , ϱ_2 transformirt, lautet*):

$$\frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot A \cdot h^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \cdot B \cdot h_1^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2 = 0,$$

*) Lamé, coordonnées curvilignes, p. 288.

$$(31) \left\{ \begin{array}{l} \text{wo } A = \frac{h_1 h_2}{h} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{W}{h_2} \right); \quad B = \frac{h_2 h}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial q} \frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial q_2} \frac{U}{h} \right); \\ \Gamma = \frac{h h_1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial q_2} \frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial q} \frac{V}{h_1} \right). \end{array} \right.$$

Nun hat man aber, unter den beiden soeben citirten Voraussetzungen:

$$U = 0; \quad \frac{V}{h_2} = \frac{\partial G}{\partial q_2}; \quad \frac{W}{h_1} = - \frac{\partial G}{\partial q_1}.$$

Daher ist die transformirte Gleichung:

$$(32) \quad \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \delta^2 G - \frac{\partial x}{\partial q_1} h_1^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial q \partial q_1} - \frac{\partial x}{\partial q_2} h_2^2 \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial q \partial q_2} = 0,$$

wo $\delta^2 G$ die obige Bedeutung (9^a) hat.

Diese Gleichung (32) zusammen mit der Gleichung (7) für G umfasst nun alle diejenigen Schwingungen, welche sich sowohl in einem isotropen, wie in einem optisch einaxigen Medium in Kugelwellen fortpflanzen können, unter der Voraussetzung, dass die Schwingungen ohne Dilatation und in den Kugeloberflächen selbst vor sich gehen.

Fügen wir dieser Voraussetzung noch diejenige über die Form der Lösungen G hinzu (8, 9), welche die Schwingungen zu Lichtschwingungen machen, indem wir dem Obigen zufolge λ als eine Function von q allein voraussetzen, so muss, zufolge der Bedingung (9), die Gleichung (32) in zwei zerfallen, eine für R und eine andere für Ω allein. Dieselben sondern alsdann aus den Lösungen der Gleichungen (10) diejenigen aus, welche auch optisch einaxigen Krystallen genügen. Setzt man die Form (9) in (32) ein, so kommt:

$$(33) \quad \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \delta^2 \Omega \cdot R - \left[\frac{\partial x}{\partial q_1} h_1^2 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial q_1} + \frac{\partial x}{\partial q_2} h_2^2 \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial q_2} \right] \frac{\partial R}{\partial q} = 0.$$

Nun ist $\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}$ proportional mit q , wenn q_1, q_2 Parameter von Kegel-(Ebenen-)Systemen sind, h_1^2, h_2^2 proportional mit $\frac{1}{q^2}, \frac{\partial x}{\partial q}$ aber von der 0^{ten} Ordnung für q . Man hat daher, wenn diese Gleichung in zwei zerfallen soll, in denen die Variablen getrennt vorkommen, zu setzen: die eckige Klammer gleich:

$$\frac{\Omega}{q} \cdot \frac{\partial x}{\partial q} \cdot \gamma,$$

wo γ eine Constante ist. Man hat ferner die Gleichung für Ω (10):

$$q^2 \cdot \delta^2 \Omega + \beta \Omega = 0.$$

Alsdann kommt für R die Gleichung:

$$\beta \cdot R - \frac{\partial R}{\partial q} \cdot \frac{\gamma}{q} = 0;$$

dieselbe hat aber als einzige Lösung die mit (10) nicht verträgliche:

$$R = k \cdot \varphi,$$

welche somit unbrauchbar ist. — Aber jene Gleichung für R wird andererseits auch noch erfüllt durch:

$$\gamma = \beta = 0.$$

Die eckige Klammer in (33) verschwindet alsdann gleichfalls. Man kann dieselbe auch in solche Form schreiben, dass man erhält:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0.$$

Wir wollen diese Gleichung in den oben (19^a) eingeführten Polarcordinaten schreiben, für welche:

$$x = r \sin \varphi; \quad y = r \cos \varphi \sin \psi; \quad z = r \cos \varphi \cos \psi.$$

Man hat alsdann:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi} = 0$$

und aus: $\delta^2 \Omega = 0$ folgt nunmehr:

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \psi^2} = 0,$$

also

$$\Omega = m\psi + n,$$

wo m und n Constante. Ferner folgt aus der Gleichung (10) für R , wenn $\beta = 0$:

$$R = \text{const. } e^{\varphi \cdot \frac{2\pi i}{\tau} \cdot w}$$

Daher sind die einzig denkbaren Lichtschwingungen, welche sich in Kugelwellen in einem optisch einaxigen Medium ausbreiten können, darstellbar in Polarcordinaten durch:

$$(34) \quad U = 0; \quad V = \frac{E \cdot e^{\left(\frac{r}{b} - t\right) \frac{2\pi i}{\tau}}}{r \cdot \cos \varphi}; \quad W = 0.$$

Man bemerkt, dass dieselben der Richtung wie der Fortpflanzungsgeschwindigkeit nach eindeutig bestimmt sind.

Ganz anders verhält sich der Theil der Lösungen, welcher den ellipsoidischen Wellen entspricht. Wenn man die Gleichung:

$$u = 0,$$

welche diesen Theil von den Kugelwellen absondert, in die allgemeinen Lösungen für isotrope Medien (25) einführt, und vergleicht alsdann dieselben mit den für optisch einaxige aus derselben Bedingung entspringenden:

$$u_2 = 0; \quad v_2 = \frac{\partial S}{\partial z}; \quad w_2 = - \frac{\partial S}{\partial y},$$

so stimmen beide in der Form genau überein, nachdem man in der

Gleichung, welcher S zu genügen hat, die Transformation vorgenommen hat:

$$x = x' ; \quad y = y' \cdot \frac{a}{b} ; \quad z = z' \cdot \frac{a}{b} .$$

Die Bedingung $u = 0$ für isotrope Medien sagt aber nur aus, dass die Schwingungen parallel der YZ Ebene vor sich gehen, also, in den vorhin eingeführten Polarcoordinaten ausgedrückt, dass:

$$(35) \quad \frac{\partial G}{\partial \psi} = 0 ,$$

also dass die Constante α (12^a) verschwindet.

ψ geht mithin in die Lösung G nicht ein. Daher erstreckt sich die Transformation von x, y, z bloß auf r , wenn man dieselbe in Polarcoordinaten ausdrücken will. Alle unter der Voraussetzung $\frac{\partial G}{\partial \psi} = 0$ für isotrope Medien abgeleiteten Lösungen der Gleichung (7) für G , nachdem dieselbe in Polarcoordinaten ausgedrückt, gelten also, nachdem man überall für $\frac{r^2}{b^2}$ die Grösse: $q^2 = \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2 + z^2}{a^2}$ eingesetzt, auch noch für die ellipsoidischen Wellen in optisch einaxigen Medien, indem dabei λ als Function des Parameters q eines Rotationsellipsoids vorausgesetzt wird. Weil durch die obige Bedingung die Gleichung für R (10) nicht alterirt wird, so hat man den Satz:

Nach denselben Gesetzen, nach welchen in isotropen Medien eine Verbreitung von Lichtschwingungen in Kugeln möglich ist, kann auch, abgesehen von der Schwingungsrichtung, eine solche in ellipsoidischen Wellen in einem optisch einaxigen Krystall stattfinden. Dagegen giebt es nur eine einzige Art der Verbreitung von Kugeln in dem letztgenannten.

7.

Optisch zweiaxige Krystalle.

Die Frage nach dem Gesetz für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Lichtschwingungen, die sich in Fresnel'schen Wellenflächenwellen in einem optisch zweiaxigen Medium ausbreiten, beantworten wir, aus Gründen, die wir schon in 5. angegeben, durch Untersuchung derjenigen Differentialgleichungen, welche Lamé hierfür aufgestellt, indem wir in dieselben die Bedingungen, durch welche wir Lichtschwingungen definirt haben (1) und (2), einführen. Diese Operation ist aber wie im Vorigen so auch hier wesentlich erleichtert, wenn die Differentialgleichungen für ein solches Coordinatensystem aufgestellt sind, wie wir es in 2. beschrieben haben. Wegen der in den Differentialgleichungen auftretenden Constanten (3 an der Zahl) wollen wir,

um die Transformation übersichtlich bis zu Ende durchführen zu können, ein gleichfalls mit 3 willkürlichen Parametern versehenes Coordinatensystem wählen, welches unten näher bezeichnet werden soll. Man kann nun die mühsame Rechnung, welche eine directe Transformation der Differentialgleichungen verursachen würde, auf die weit einfachere Aufgabe der Transformation eines gewissen vielfachen Integrals zurückführen, dessen erste Variation, gleich Null gesetzt, jene Gleichungen ergibt. Nun lässt sich zwar in vielen Fällen die Form desselben sofort errathen, wenn die Differentialgleichungen gegeben vorliegen. Doch soll hier eine directe Ableitung aus einem bekannten Princip der Mechanik wenigstens angedeutet werden.

Ueber die zwischen den einzelnen Theilen eines elastischen homogenen Mediums wirkenden Kräfte machen wir die Voraussetzung, dass sie eine Kräftefunction, U , besitzen. Sind äussere Kräfte nicht vorhanden, so verschwindet nach einem von Hamilton aufgestellten Princip der Mechanik die erste Variation des Integrals

$$\int dt (U - T),$$

wo t die Zeit, T die lebendige Kraft des ganzen Systems (das man sich von beliebiger räumlicher Ausdehnung vorstellen kann) bedeutet. Die Variation der Kräftefunction stellt nun aber die bei einer virtuellen Verschiebung des Systems geleistete Arbeit dar. Andererseits ist dieselbe gleich der Summe der Arbeiten der auf ein (als starr gedachtes) Elementarparallelepiped des Mediums wirkenden Kräfte und Kräftepaare, diese Summe ausgedehnt über das ganze Medium. Nimmt man nun an, dass jene Kräfte und Kräftepaare lineare Functionen der als sehr klein aufzufassenden sechs Verschiebungsgrössen in diesem Punkte seien, so sind die virtuellen Arbeiten lineare Functionen sowohl der Verschiebungsgrössen selbst, als ihrer Variationen, der virtuellen Wege. Die Kräftefunction also, deren Variation zufolge der Definition ein vollständiges Differential ist, kann als quadratischer (homogener) Ausdruck der sechs Verschiebungsgrössen dargestellt werden. Derselbe enthält noch $\frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2}$ unabhängige Constante. Geht man von der durch das Experiment wahrscheinlich gemachten Annahme aus, dass das lichtfortpflanzende Medium incompressibel sei, so wird man *) zu einer Reduction der obigen Constantenzahl veranlasst, welche Zahl durch die weitere Annahme von drei ausgezeichneten, aufeinander senkrechten Richtungen in dem Medium (die Schnitte der Symmetrieebenen, parallel den Coordinatenaxen gedacht) auf drei herabzudrücken ist. Werden statt der oben genannten Verschiebungsgrössen die Componenten u, v, w der Verschiebungen eines Punktes

*) Lamé, élasticité, 17. leç.

x, y, z (durch welche auch die Grösse T ausgedrückt werden muss) mittelst der bekannten Ausdrücke in den partiellen Differentialquotienten eingeführt, so erhält man für U, T die folgenden Ausdrücke:

$$(36) \left\{ \begin{aligned} U &= \iiint dx \, dy \, dz \left[a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + b^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \iiint dx \, dy \, dz \cdot \Omega; \\ T &= \iiint dx \, dy \, dz \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= \iiint dx \, dy \, dz \cdot S. \end{aligned} \right.$$

Man hat daher die Gleichung:

$$(37) \quad \delta \iiint dx \, dy \, dz \, dt (\Omega - S) = 0.$$

Aus derselben fliessen sofort drei partielle Differentialgleichungen von der Form:

$$(38) \quad \begin{aligned} - \frac{\partial (\Omega - S)}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial (\Omega - S)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial (\Omega - S)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial x}} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial (\Omega - S)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial y}} + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial (\Omega - S)}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial z}} = 0. \end{aligned}$$

Setzt man darin für ω der Reihe nach u, v, w , so kommt das von Lamé behandelte System von Differentialgleichungen für die Bewegung in einem krystallinischen Medium:

$$(38^a) \quad \begin{aligned} c^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial y} - b^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ a^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)}{\partial z} - c^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)}{\partial x} &= \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ b^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right)}{\partial x} - a^2 \cdot \frac{\partial \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right)}{\partial y} &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Wir wollen uns hierbei nicht aufhalten, sondern gleich zur Transformation des Integrals (37) übergehen.

Sind die neuen Coordinaten $\varrho, \varrho_1, \varrho_2$, und haben die U, V, W wieder die frühere Bedeutung (1), desgleichen die h, h_1, h_2 , so bestehen zwischen den u, v, w und U, V, W lineare Relationen, dieselben, welche zwischen den Projectionen einer Strecke auf je die drei Axen zweier rechtwinkliger Coordinatensysteme bestehen.

Man hat nun (36):

$$S - \Omega = \Sigma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Sigma a^2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2.$$

Alsdann ist zunächst wegen der zwischen den u, v, w und U, V, W bestehenden Relationen:

$$(39) \quad S = \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2.$$

Man kann ferner leicht die Formeln beweisen*):

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} &= \frac{\partial x}{\partial \varrho} \cdot Ah^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \cdot Bh_1^2 + \frac{\partial x}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial y}{\partial \varrho} \cdot Ah^2 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_1} \cdot Bh_1^2 + \frac{\partial y}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \varrho} \cdot Ah^2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_1} \cdot Bh_1^2 + \frac{\partial z}{\partial \varrho_2} \cdot \Gamma \cdot h_2^2, \end{aligned}$$

$$\text{wo } A = \frac{h_1 h_2}{h} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{V}{h_1} - \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{W}{h_2} \right) ; \quad B = \frac{h_2 h}{h_1} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{W}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{U}{h} \right) ;$$

$$\Gamma = \frac{h h_1}{h_2} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{U}{h} - \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{V}{h_1} \right).$$

Wir wollen nun die Werthe $\frac{\partial x}{\partial \varrho}$ etc. wirklich berechnen und zwar durch Einführung eines Coordinatensystems, das durch die drei Flächenschaaren**):

$$(41) \quad \begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= \varrho^2 \\ \frac{a^2 x^2}{a^2 - \varrho_1^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - \varrho_1^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - \varrho_1^2} &= 0 \\ \frac{a^2 x^2}{a^2 - \varrho_2^2} + \frac{b^2 y^2}{b^2 - \varrho_2^2} + \frac{c^2 z^2}{c^2 - \varrho_2^2} &= 0 \end{aligned}$$

mit drei positiven beliebigen Constanten ($a^2 > b^2 > c^2$) gebildet wird.

Sie sollen mit den in dem Integrausdruck vorkommenden identisch sein. Die erste der drei Flächenschaaren sind concentrische Kugeln, die beiden letzten confocale Kegel 2^{ter} Ordnung. Bedient man sich der abkürzenden Bezeichnungen ($i = 1, 2$):

$$(41^a) \quad \begin{aligned} a_i^2 &= \varrho_i^2 - a^2 ; \quad b_i^2 = \varrho_i^2 - b^2 ; \quad c_i^2 = \varrho_i^2 - c^2 ; \quad n_i^2 = a_i^2 b_i^2 c_i^2 \\ A^2 &= \frac{a^2}{a^2 - b^2, a^2 - c^2} ; \quad B^2 = \frac{b^2}{b^2 - a^2, b^2 - c^2} ; \quad C^2 = \frac{c^2}{c^2 - a^2, c^2 - b^2} ; \quad n^2 = a^2 b^2 c^2, \end{aligned}$$

so bestehen zwischen A, B, C und a, b, c bekannte Relationen, mit Hülfe deren man leicht die aus (41) folgenden Formeln verificirt:

*) Lamé, coord. curv. p. 288.

**) Herr Hesse (Geometrie des Raumes) hat für dieses System die Bezeichnung: elliptische Kugelcoordinaten.

$$(42) \quad \begin{aligned} x^2 &= \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \cdot a_1^2 a_2^2 \frac{A^2}{a^4}; \\ y^2 &= \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \cdot b_1^2 b_2^2 \frac{B^2}{b^4}; \\ z^2 &= \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2} \cdot c_1^2 c_2^2 \frac{C^2}{c^4}. \end{aligned}$$

Bildet man hieraus die partiellen Differentialquotienten der rechtwinkligen Coordinaten nach den neuen, alsdann das Quadrat des Linienelements, so erhält man für die h die Ausdrücke:

$$(43) \quad h = 1; \quad h_1 = \frac{\varrho_1 \varrho_2 \cdot n_1}{\varrho \cdot n \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}}; \quad h_2 = \frac{\varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot n_2}{\varrho \cdot n \sqrt{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}}.$$

Setzt man diese Werthe sowie die für die partiellen Differentialquotienten in die Gleichungen (40) ein, und addirt, nachdem man quadriert und resp. mit a^2, b^2, c^2 multiplicirt hat, so kommt der transformirte Ausdruck für Ω . — Derselbe nimmt eine einfache Gestalt an, wenn man die mit Hülfe der zwischen den A, B, C, a, b, c bestehenden Relationen aufgestellten Beziehungen bemerkt ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} \right)^2 h^2 &= \frac{h^2}{\varrho^2} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}; \quad \sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i} \right)^2 \cdot h_i^2 = \varrho_i^2 + \frac{h_i^2}{\varrho_i^2} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}; \\ \sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_1} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_2} \right) &= \frac{h_1 h_2}{\varrho_1 \varrho_2} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}; \quad \sum a^2 \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho} \right) \left(\frac{\partial x}{\partial \varrho_i} \right) = -\frac{h_i h}{\varrho_i \varrho} \cdot \frac{\varrho^2 n^2}{\varrho_1^2 \varrho_2^2}. \end{aligned}$$

So ergibt sich, wenn man zusammenfasst:

$$(44) \quad \Omega = B^2 \cdot h_1^2 \cdot \varrho_1^2 + \Gamma^2 \cdot h_2^2 \varrho_2^2 + \frac{\varrho}{\varrho_1 \varrho_2} \left[-\frac{A h^2}{\varrho} + \frac{B h_1^2}{\varrho_1} + \frac{\Gamma h_2^2}{\varrho_2} \right]^2;$$

für die Transformation des Volumelementes entnehmen wir der Theorie der Functionaldeterminanten:

$$(45) \quad dx \, dy \, dz = \mathcal{A} \cdot d\varrho \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 = \frac{1}{h_1 h_2} d\varrho \, d\varrho_1 \, d\varrho_2$$

9.

Aus den Formeln (39), (44), (45) des voranstehenden Abschnittes ergibt sich sofort die Transformation des Integrals. Wir schliessen sie ein in die folgenden Formeln:

$$(46) \quad \begin{aligned} \delta \iiint dx \, dy \, dz \, dt (\Omega - S) &= \delta \iiint d\varrho \, d\varrho_1 \, d\varrho_2 \, dt (\Omega' - S') = 0 \\ S' &= \frac{1}{h_1 h_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial t} \right)^2 + \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{\partial V'}{\partial t} \right)^2 + \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{\partial W'}{\partial t} \right)^2; \\ \Omega' &= \varrho_1^2 \cdot \frac{h_2}{h_1} \left(\frac{\partial W'}{\partial \varrho} - \frac{\partial U'}{\partial \varrho_2} \right)^2 + \varrho_2^2 \cdot \frac{h_1}{h_2} \left(\frac{\partial U'}{\partial \varrho_1} - \frac{\partial V'}{\partial \varrho} \right)^2 + \\ &+ \frac{\varrho \cdot h_1 h_2 \cdot a b c}{\varrho_1 \varrho_2} \left[\left(\frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial U'}{\partial \varrho_1} - \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial U'}{\partial \varrho_2} \right) - \left(\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial V'}{\partial \varrho_2} + \frac{1}{\varrho_2} \frac{\partial V'}{\partial \varrho} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{1}{\varrho_1} \cdot \frac{\partial W'}{\partial \varrho} + \frac{1}{\varrho_1} \frac{\partial W'}{\partial \varrho_1} \right) \right]^2; \end{aligned}$$

wo für einen Augenblick:

$$(46^a) \quad U = U'; \quad \frac{V}{h_1} = V'; \quad \frac{W}{h_2} = W'$$

gesetzt ist. Die hieraus fließenden Differentialgleichungen haben die Form:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \omega} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial \varrho} \frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \varrho}} + \frac{\partial}{\partial \varrho_1} \frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_1}} + \\ + \frac{\partial}{\partial \varrho_2} \frac{\partial(\Omega' - S')}{\partial \frac{\partial \omega}{\partial \varrho_2}} = 0, \end{aligned}$$

wo für ω die drei Functionen U , V , W oder auch die U' , V' , W' der Reihe nach zu setzen sind. Wählen wir die letzteren, um das erste (mit negativem Vorzeichen versehene) Glied in der letztangeschriebenen Gleichung zum Verschwinden zu bringen. Wenn man die Gleichungen, welche man auf diese Weise erhält, addirt, nachdem man sie beziehungsweise mit $\frac{1}{\varrho}$, $\frac{1}{\varrho_1}$, $\frac{1}{\varrho_2}$ multiplicirt hat, so heben sich die von der eckigen Klammer in Ω' stammenden Glieder gegenseitig auf. Setzt man noch in der so entstandenen Gleichung $U=0$, d. h. führt man die Bedingung ein, dass die Schwingungen senkrecht zum Radius vector vom Ursprung stattfinden, so kommt die folgende einfache Gleichung (in welcher blos noch die Coordinaten in den Coefficienten auftreten):

$$\begin{aligned} (47) \quad \frac{1}{\varrho_1} \left(\frac{\partial^2 V''}{\partial t^2} - \varrho_2^2 \frac{\partial^2 V''}{\partial \varrho^2} \right) + \frac{1}{\varrho_2} \left(\frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \varrho_1^2 \frac{\partial^2 W''}{\partial \varrho^2} \right) = \\ = \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varrho} \left(\varrho_2^2 \frac{\partial V''}{\partial \varrho_1} + \varrho_1^2 \frac{\partial W''}{\partial \varrho_2} \right); \end{aligned}$$

wo wir der Kürze wegen gesetzt haben:

$$\frac{V}{h_2} = V''; \quad \frac{W}{h_1} = W''.$$

Man bemerkt zunächst, dass die Gleichung (47) eine besonders einfache Lösung zulässt, wenn V'' oder W'' gleich Null ist. Verfolgen wir z. B. den ersten Fall weiter. Wenn man die früher (1) und (2) besprochenen Eigenschaften der Schwingungen auch hier einführt, so kommt die Annahme $V''=0$ darauf hinaus, λ unabhängig von ϱ_2 zu setzen, d. h. auf die Voraussetzung, dass durch den Durchschnitt der Kegel ϱ_1 mit der Kugel je eine Wellenfläche hindurchgehe. Wir setzen hierbei über die Form der Function λ nichts Näheres fest. Als dann ist aber auch W'' selbst nur noch Function von ϱ_1 und ϱ ; die Gleichung (47) reducirt sich somit auf:

$$\frac{\partial^2 W''}{\partial t^2} - \varrho_1^2 \frac{\partial^2 W''}{\partial \varrho^2} = 0,$$

deren Integration sofort ergibt:

$$W'' = \Pi \left(\frac{q}{q_1} - t, q_1 \right),$$

wo Π eine willkürliche Function der eingeklammerten Grössen ist. — Andererseits folgt aber aus den ersten der drei Differentialgleichungen für U' , V' , W' (die wir als leicht herleitbar hier nicht angeschrieben haben), wenn man darin U' und V' gleich Null, W'' als von q_2 unabhängig annimmt:

$$\frac{1}{q_1} \frac{\partial W'}{\partial q} + \frac{1}{q} \frac{\partial W'}{\partial q_1} = 0,$$

$$\text{oder } W' = \Pi_1 \left(\frac{q}{q_1}, q_2, t \right).$$

Daher, weil $W'' = \frac{W}{h_1}$ (47^a); $W' = \frac{W}{h_2}$ (46^a) und mit Rücksicht auf die Werthe der h_1, h_2 :

$$\frac{n_2}{h_1} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\Pi \left(\frac{q}{q_1} - t, q_1 \right)}{\Pi_1 \left(\frac{q}{q_1}, q_2, t \right)}.$$

Hieraus folgt, dass $n_2 \Pi_1$ nicht mehr Function von q_2 sein kann, ebenso wie $n_1 \Pi$ nicht mehr Function von q_1 allein sein kann. Vielmehr sind beide Functionen von $\frac{q}{q_1} - t$ allein, daher man schliesslich hat (zufolge unserer Annahme über die Form der periodischen Function):

$$(48) \quad U = 0 \quad ; \quad V = 0 \quad ; \quad W = \text{const.} \frac{h_1}{n_1} \cdot e^{\left(\frac{q}{q_1} - t \right) \frac{2\pi i}{\tau}}$$

Durch Vertauschung der Indices 1 und 2, sowie von V und W erhält man noch eine andere Lösung der gegebenen Differentialgleichungen.

Man überzeugt sich leicht, dass der hierbei nicht benutzte Theil der Differentialgleichungen nichts Widersprechendes oder Beschränkendes ergibt.

Es lässt sich aber zeigen, dass die zwei hier auftretenden Wellenflächen

$$\lambda = \frac{q}{q_1} \text{ und } \lambda = \frac{q}{q_2}$$

identisch sind mit den beiden Mänteln der von Fresnel angegebenen Wellenfläche. Die Form der Gleichung der letzteren ist bekanntlich:

$$(49) \quad \frac{a^2 x^2}{r^2 - \lambda^2 a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - \lambda^2 b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - \lambda^2 c^2} = 0,$$

wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ (also unser q^2) ist. Nun bemerkt man aber,

dass diese Gleichung zusammenfällt mit der zweiten, bezüglich dritten der Gleichungen (41) (welche von den x, y, z in (42) identisch erfüllt werden), je nachdem man setzt:

$$\frac{r^2}{\lambda^2} = \varrho_1^2 \text{ oder } \frac{r^2}{\lambda^2} = \varrho_2^2,$$

daher wird die Gleichung der Wellenfläche identisch befriedigt durch die beiden Werthe von λ :

$$\lambda_1^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho_1^2} \quad ; \quad \lambda_2^2 = \frac{\varrho^2}{\varrho_2^2}.$$

Dies sind zugleich die einzigen Werthe von λ , welche diese Gleichung befriedigen, weil dieselbe in λ quadratisch ist. Soll nun die oben allgemein gestellte Frage nach den Gesetzen der Fortpflanzung von Wellenflächen auch hier beantwortet werden, so geschieht dies durch die Einführung beliebiger Functionen von λ_1 oder von λ_2 für λ . Aber man erhält alsdann sofort bezüglich:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_2} = 0 \text{ oder } \frac{\partial \lambda}{\partial \varrho_1} = 0,$$

also bezüglich

$$V = 0 \text{ oder } W = 0,$$

mithin nichts Anderes als den bereits oben behandelten Fall, welcher uns auf $\lambda = \lambda_1$ oder $= \lambda_2$ geführt hat. Dieser Fall ist also der einzig denkbare. Es ist bemerkenswerth, dass die grosse Mannigfaltigkeit von Formen, welche für isotrope und für die ellipsoidischen Wellen in optisch einaxigen Krystallen jene Function λ noch haben kann, hier für beide Wellen auf eine einzige Form herabsinkt.

Durch Addition der beiden oben angegebenen Lösungen erhält man die allgemeinere (indem man für die h die Werthe aus (43) entnimmt):

$$U = 0 \quad ; \quad V = \varepsilon_2 \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho \sqrt{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}} \cdot e^{\left(\frac{\varrho}{\varrho_2} - t\right) \frac{2\pi i}{\varepsilon}} ;$$

$$W = \varepsilon_1 \cdot \frac{\varrho_1 \varrho_2}{\varrho \sqrt{\varrho_1^2 - \varrho_2^2}} \cdot e^{\left(\frac{\varrho}{\varrho_1} - t\right) \frac{2\pi i}{\varepsilon}} ;$$

wo die ε Constante bedeuten. Setzt man diese Werthe für U, V, W in die für die u, v, w bestehenden linearen Ausdrücke derselben, so erhält man die von Lamé unter specielleren Voraussetzungen und, wie es scheint, auf weniger organischem Wege abgeleiteten Lösungen*).

Das hier angewandte Coordinatensystem besteht nicht mehr, wenn zwei der Constanten a, b, c einander gleich werden. Man hilft sich

*) Elasticité, p. 318, 319, 23. leq.

alsdann zweckmässig durch die Einführung von Winkeln, welche das System in Polarcoordinaten transformiren. Sollen z. B. die oben gegebenen Lösungen für isotrope Medien specialisirt werden, so hat man zu setzen:

$$\begin{aligned}\varrho_1^2 &= b^2 \sin^2 \varphi + a^2 \cos^2 \varphi \\ \varrho_2^2 &= c^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi \\ \varrho^2 &= r^2.\end{aligned}$$

Nach vorgenommener Transformation setze man $a = b = c$, indem man zugleich über den Grenzwert des Verhältnisses:

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2 - b^2}$$

irgendwie verfügt. Ist derselbe z. B. gleich Null, so ergeben sich Polarcoordinaten, für welche $h_1 = r$; $h_2 = r \cos \varphi$, und die Lösungen erhalten die Form:

$$U = 0 \quad ; \quad V = \frac{\varepsilon_2}{r \cdot \cos \varphi} e^{\left(\frac{r}{b} - t\right) \frac{2\pi i}{\tau}} \quad ; \quad W = \frac{\varepsilon_1}{r \cos \varphi} \cdot e^{\left(\frac{r}{b} - t\right) \frac{2\pi i}{\tau}}$$

Giessen, 20. October 1868.