der stetigen Funktion einführen sowie eine Reihe der wichtigsten Sätze über stetige Funktionen beweisen. Hingegen ist es nicht möglich, zu beweisen, daß jede abgeleitete Menge abgeschlossen ist. Um dies zu zeigen, wählt Fréchet für L die Menge aller Funktionen einer reellen Veränderlichen, für den Limesbegriff den der einfachen Konvergenz, für E die Menge der stetigen Funktionen. Die abgeleitete Menge besteht dann aus den stetigen Funktionen und den Funktionen der ersten Klasse und ist nicht abgeschlossen, da es Folgen von Funktionen erster Klasse gibt, die gegen Funktionen der zweiten Klasse konvergieren. — Da nun der Satz von der Abgeschlossenheit der abgeleiteten Mengen für die Punktmengentheorie fundamental ist, wird es notwendig, den Limesbegriff so zu beschränken, daß dieser Satz beweisbar wird. Dies geschieht auf Grund des „Abstandes“ (a, b) zweier Elemente a und b . Auch dieser Abstand wird nicht definiert, sondern hat nur zwei Forderungen zu genügen: 1. der Abstand (a, b) ist eine nicht negative Zahl, und dann und nur dann Null, wenn a und b identisch sind; 2. es gibt eine mit ε gegen Null konvergierende Funktion $f(\varepsilon)$, so daß aus $(a, b) < \varepsilon$ und $(b, c) < \varepsilon$ folgt: $(a, c) < f(\varepsilon)$. Eine Klasse von Elementen, in der ein solcher Abstands begriff besteht wird bezeichnet als Klasse V . Der Limesbegriff wird nun so definiert: die Folge $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ habe a_0 zum Limes, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n, a_0) = 0$. Offenbar ist nun jede Klasse V eine Klasse L , aber nicht umgekehrt. In den Klassen V gilt der Satz von der Abgeschlossenheit der abgeleiteten Mengen, sowie eine große Zahl anderer bekannter Sätze. Besonders interessant ist das Studium, dem das Heine-Borelsche Theorem unterworfen wird. — Den zweiten Teil der Untersuchungen von Fréchet bilden Anwendungen der allgemeinen Resultate des ersten Teiles auf spezielle Klassen V . Für V werden der Reihe nach gewählt: die Punkte einer Geraden (mit dem Limesbegriff der Arithmetik), was die gewöhnliche Theorie der Punktmengen ergibt; die stetigen Funktionen eines Intervalls (mit gleichmäßiger Konvergenz als Limesbegriff); der Raum mit abzählbar unendlich vielen Dimensionen, was besonders im Hinblick auf die seither erschienenen Arbeiten von Hilbert und seinen Schülern über Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen von Interesse ist. Der von Fréchet benutzte Abstands begriff führt hier zu der Auffassung des Limes, die bei Hilberts Vollstetigkeit zur Verwendung kommt. Weiter wird für V gewählt die Menge aller im selben Gebiete regulären analytischen Funktionen, endlich die Menge aller stetigen Kurven (die stetige Kurve im weitesten Sinne gefaßt: die Menge der Punkte (x, y, z) die durchlaufen werden, wenn $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, wobei f, g, h stetig und t von a bis b wächst). Ich möchte die Hoffnung aussprechen, daß der Verfasser auf dem so erfolgreich begonnenen Wege weiterschreite und insbesondere die in Aussicht gestellte Anwendung seiner Theorien auf Mengen stetiger Flächen bald veröffentlichen möge.

Hans Hahn.

Die philosophischen Grundlagen der Wissenschaften. Vorlesungen, gehalten an der Universität Berlin von Prof. Dr. B. Weinstein. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 1906. XIV u. 543 S. Preis geb. 9 M.

Es ist eine beklagenswerte Erscheinung, daß Philosophen über naturwissenschaftliche Gegenstände, Vertreter der Naturwissenschaften über philo-

sophische Fragen Bücher schreiben, ohne die dazu nötige gründliche Kenntnis des betreffenden Faches sich angeeignet zu haben. Dagegen wendet sich Chwolson in seiner bekannten Schrift „Hegel, Haeckel, Kossuth und das zwölfte Gebot“ in der denkbar treffendsten Weise: mir will es scheinen, als stellte auch Herr Weinsteins Buch eine schwere Versündigung gegen Chwolsons zwölftes Gebot dar. Ich möchte dieses Urteil nur durch einige charakteristische Zitate belegen. Über das Problem der Zeitmessung heißt es (S. 288): „Nun herrscht zwischen den äußeren Vorgängen zwar außerordentliche Verschiedenheit; wir können uns aber Vorgänge vorstellen, welche in nie sich ändernder Weise, gleichmäßig, ablaufen. Solche, zunächst nur vorstellbare, gleichmäßige Vorgänge nehmen wir, um mit ihnen die anderen Vorgänge zu vergleichen. Wir scheiden aus jenen einen Teil des Geschehenen aus und benutzen diesen als Maß, Zeitmaß, für die anderen Vorgänge. Auf Erden ist ein außerordentlich gleichmäßiger Vorgang die Umdrehung der Erde um ihre Achse. Nehmen wir die einmalige Umdrehung als Teil des Vorganges, so ist der Tag das Maß, bei ein Vierundzwanzigstel davon die Stunde, bei ein Sechzigstel der Stunde ist es die Minute, bei ein Sechzigstel der Minute die Sekunde.“ So wie in diesen Sätzen geht es fast im ganzen Buche zu: die selbstverständlichsten Dinge — daß der Tag 24 Stunden hat etc. — werden ausführlich vorgetragen, am eigentlichen Problem aber wird vorbeigeredet; was soll es heißen, wenn man von einem gleichmäßig ablaufenden Vorgange spricht, ohne daß noch die Messung der Zeit gegeben ist, was soll es heißen, einen Zeitabschnitt in soundsoviele gleiche Teile teilen? Ist nicht gerade dies das Problem und somit alles Obige nur ein Circulus? Auf Seite 299: „Da wir uns auch nicht vorstellen können, was hinter dem Raume sein möchte — die Vierdimensionalen würden sagen, der vierdimensionale Raum — schreiben wir dem Raume unendliche Ausdehnung zu.“ Man braucht wohl keine Spezialkenntnisse über vierdimensionale Geometrie, um zu erkennen, daß das ein Unsinn ist. Auf derselben Stufe stehen die Bemerkungen über euklidische und nichteuklidische Räume S. 283, 284. Besonders zu bedauern ist, daß auch die der Physik näher stehenden Kapitel, wie die über Substanz, Naturgesetze etc. nichts weniger als einwandfrei sind, obwohl doch der Verfasser Physiker ist. Auch hier nur wenige Belege: „Die mathematische Formel, welche die Bewegung der Erde um die Sonne beschreibt, schließt einen Stoß ein, als Ursache dafür, daß die Erde sich überhaupt einmal in Bewegung gesetzt hat.“ (S. 339.) Der Verfasser bemüht sich (S. 420 ff.) außer den Gesetzen von der Erhaltung der Substanz und der Energie ein Gesetz von der Erhaltung der Kräfte zu konstruieren! Daß (in der 21. Vorlesung) aus den Variationsprinzipien einfach Minimalprinzip gemacht werden und daraus dann unbegründete Schlüsse gezogen werden, kann nach dem früheren kaum mehr überraschen. Diese wenigen Zitate ließen sich beliebig vervielfachen, dürften aber wohl genügen.

Hans Hahn.

Grundlehren der neueren Zahlentheorie. Von Paul Bachmann. (Sammlung Schubert LIII.) Leipzig, G. J. Göschen, 1907.

Das neue Werk des Verfassers der Gesamtdarstellung der Zahlentheorie enthält die Theorie des rationalen und des quadratischen Zahlkörpers unter Verwendung der neuesten Hilfsmittel, aber in ausführlicher Behandlung. Im