ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE

Das Turbulenzproblem.

Von F. NOETHER in Berlin.

Die rationelle Hydromechanik¹⁾ liefert, wie bekannt, zweierlei Ansätze zur Lösung hydrodynamischer Aufgaben, die Eulerschen Grundgleichungen für ideale Flüssigkeiten und die von Navier und Stokes herrührenden Gleichungen für zähe (reibende) Flüssigkeiten. Doch die auf dieser Grundlage bisher gelösten Probleme beschränken sich im großen ganzen auf zwei Klassen, die nur vorläufigen Charakter haben:

1. die reibungsfreien Potentialströmungen,
2. diejenigen Strömungen von Flüssigkeiten mit Reibung, bei denen der Einfluß der Zähigkeit den der Trägheit stark überwiegt.

Es ist bekannt, daß die meisten technisch interessanten Flüssigkeitsströmungen in keine dieser beiden Gruppen eingeordnet werden können. Unser Problem speziell betrifft den Fall der Strömung von Flüssigkeiten in unbegrenzt langen prismatischen Leitungen; die Strömung wird dabei entweder durch ein Druck- oder Bodengefälle oder, wenn es sich um einen unendlich tiefen geradlinigen oder einen kreisringförmigen Kanal handelt, auch durch relative Verschiebung der einander gegenüberstehenden Wände hervorgerufen.

In diesen Fällen sind seit den experimentellen Arbeiten von Poiseuille²⁾ und den theoretischen von Stokes³⁾ die »Laminarströmungen«⁴⁾ als mögliche Strömungsformen bekannt. Sie sind dadurch definiert, daß die Geschwindigkeit überall parallel den Wänden gerichtet ist; die Geschwindigkeitsverteilung ist in jedem Querschnitt die nämliche, sie ist im Falle fester Begrenzungen parabolisch, in dem bewegter Wände — der von Couette⁵⁾ untersucht ist — linear; an den Wänden ruht die Flüssigkeit bzw. hat sie die Geschwindigkeit der bewegten Wände. Die durchströmende Flüssigkeitsmenge ist dem Druckgefälle (bzw. Sohlengefälle) proportional, bei bewegten Wänden ist die relative Geschwindigkeit der Wände der aufgewendeten Kraft proportional.

Diese Strömungsformen, zu denen die hydrodynamische Theorie der zweiten der oben erwähnten Klassen führt, werden aber praktisch nur beobachtet bei kleinen Geschwindigkeiten, bei sehr zähen Flüssigkeiten oder sehr engen Querschnittsdimensionen.

Schon Poiseuille [l. c.²⁾] und in weiterem Umfange Hagen⁶⁾ stellten fest, daß beim Ueberschreiten gewisser Grenzen für diese Größen (insbesondere bei Verringerung der kinematischen Zähigkeit, d. i. des Quotienten Zähigkeitskoeffizient durch Dichte, mittels Temperatursteigerung) die Strömung einen ganz andern Charakter annimmt. Die mittlere Geschwindigkeitsverteilung bleibt wieder in jedem Querschnitt die gleiche, die Geschwindigkeit ist aber viel gleichmäßiger als vorher über den Querschnitt verteilt und fällt am Rande rasch zu Null bzw. gegen die Randgeschwindigkeit ab. Dieser mittleren

¹⁾ Auf folgende zusammenfassende Berichte bzw. Lehrbücher wird im folgenden Bezug genommen: A. E. Love, Hydromechanik; Enz. d. math. Wiss. Bd. IV, Art. 15 u. 16. — Foreheimer: Hydraulik; ebenda Bd. IV, Art. 20. — H. Lamb: Lehrbuch der Hydromechanik; deutsch von J. Friedel, Leipzig 1907. — F. Auerbach: Die theoretische Hydrodynamik, Braunschweig 1881. — W. Wien: Hydrodynamik, Leipzig 1900. — Brillouin: Leçons sur la viscosité, I Teil, Paris 1907. — R. v. Mises, Technische Hydromechanik, I. Leipzig 1914.

²⁾ Recherches expérimentales sur le mouvement des liquides; Comptes Rendus Paris, 11, 12 (1840, 41); Mém. des Savants Étrangers, 9 (1846). Ueber die nachfolgenden Arbeiten vergl. vor allem das oben zitierte Werk von Brillouin.

³⁾ On the effect of the internal friction of fluids, Camb. Trans. 9 (1851). S. insbesondere auch die Literaturangaben in dem Lehrbuch von H. Lamb.

⁴⁾ Wir bezeichnen als »Laminarströmungen«, entsprechend dem Namen, soweit nichts anderes bemerkt ist, nur Strömungen in Parallschichten und zwar diejenigen, die exakte Lösungen der Stokeschen Gleichungen sind. In der Literatur ist die Bezeichnung öfters auch in allgemeinerem Sinne gebraucht.

⁵⁾ Études sur le frottement des liquides, Ann. d. chimie et de physique (6, 21) (1890); p. 433; Journ. de Physique 2^e série t. IX. (1890).

⁶⁾ Abhandl. d. preuß. Akad. d. Wiss. 1854.

Bewegung überlagern sich rasche und ungeordnete Pulsationen der Flüssigkeit, die auch Querbewegungen enthalten. Das aufzuwendende Druckgefälle wird erfahrungsgemäß annähernd dem Quadrat der Durchflußmenge bzw. die aufzuwendende Kraft dem Quadrat der relativen Geschwindigkeit der Wände proportional. Man bezeichnet gegenüber dem ersten, dem »laminaren« oder »Poiseuilleschen« Zustand, den zweiten als den »hydraulischen« oder den »turbulenten«. Doch wollen wir hier im folgenden die Bezeichnung »turbulent« nur für ein gewisses Uebergangsgebiet zwischen dem laminaren und hydraulischen Zustand verwenden.

Unter Turbulenzproblem versteht man, allgemein gesprochen, die Frage, warum der grundsätzlich immer mögliche Poiseuillesche Zustand nur begrenzt realisiert ist und dem hydraulischen Zustand Platz macht.

I. Uebersicht der experimentellen Ergebnisse.

1. Die Versuche ohne Berücksichtigung der Wandbeschaffenheit. Hagen¹⁾

beobachtete die Abhängigkeit der Durchflußmenge von der Temperatur in Röhren von verschiedener Weite und unter verschiedenem Druckgefälle. Da mit wachsender Temperatur die Zähigkeit abnimmt, findet er zunächst den Poiseuilleschen Zustand (lineare Zunahme mit der Temperatur), dann (bei hinreichend großen Drucken bzw. hinreichend weiten Röhren) ein Uebergangsgebiet, in dem die Durchflußmenge abnimmt (turbulenter Zustand, in dem die Flüssigkeit äußerlich sichthar starke Unruhe zeigt), endlich den hydraulischen Zustand, in dem die Strömung zwar äußerlich ruhig, aber von den erwähnten kleinen Pulsationen begleitet ist (schwächere Zunahme mit der Temperatur, im beobachteten Gebiet annähernd linear). Durch eine irrige Theorie geleitet²⁾, glaubte Hagen aus seinen Experimenten entnehmen zu dürfen, daß die »kritische Durchflußmenge« (nämlich die größte im Poiseuilleschen Zustand mögliche) der Länge des Rohres und dem reziproken Quadrat des Durchmessers proportional sei. Seine Zahlen sind aber hinreichend genau, um die Unrichtigkeit dieses Gesetzes und die Richtigkeit des sogleich zu besprechenden Reynoldsschen zu bestätigen.

Osborne Reynolds³⁾ ging von viel tiefer begründeten theoretischen Anschauungen aus. Nach seiner Auffassung sind es im wesentlichen die Stokesschen hydrodynamischen Grundgleichungen, die auch den hydraulischen Zustand bestimmen; nicht eine Veränderung des ursprünglichen Widerstandsgesetzes bewirkt den Eintritt des veränderten Zustandes; vielmehr bleibt dieses das nämliche lineare Stokessche Gesetz, also auch die Laminarbewegung eine mögliche Strömungsform in allen Fällen; beim Ueberschreiten der kritischen Durchflußmenge werde diese nur labil und mache daher einer anderen, unregelmäßigen Strömungsform Platz. Hiernach kann die kritische Durchflußgeschwindigkeit nur von den in den Stokesschen Gleichungen vorkommenden Größen μ , der Zähigkeitskonstanten und ρ , der Dichte sowie von den Dimensionen des Rohres, Radius a und Rohrlänge l , abhängen. Von letzterer betrachtet Reynolds den Strömungszustand als unabhängig bzw. er zieht nur sehr lange Röhren in Betracht. Die Geringfügigkeit der Abhängigkeit von der Länge hat später Couette experimentell bestätigt (l. c.³⁾ S. 125). Dann muß das Gesetz für die kritische Geschwindigkeit, aus Dimensionsgründen, die Form haben

$$U_k = \Re \frac{\mu}{\rho a},$$

wobei $\Re$, eine unbenannte Konstante, die kritische »Reynoldssche Zahl« genannt wird. U_k ist die mittlere Geschwindigkeit, nämlich Durchflußmenge: Querschnitt im kritischen Fall. Dieses Gesetz haben Reynolds' Versuche, die an Röhren verschiedener Weite (und mit verschiedenen Flüssigkeiten) durchgeführt wurden, bestätigt. Als numerischen Wert des kritischen $\Re$ fand Reynolds rund 1900. Für den Druckabfall erhielt Reynolds empirisch wieder die lineare Abhängigkeit von der Geschwindigkeit im Poiseuilleschen, dagegen ein Potenzgesetz mit einem Exponenten von annähernd 1,7 im hydraulischen Zustand. Nach anderen Versuchen (z. B. den älteren von Darcy)⁴⁾ war der Exponent 1,9, also nahezu 2. Reynolds hatte aber mit bedeutend besser geglätteten Rohrwänden gearbeitet.

¹⁾ Vgl. Fußn. ⁶⁾ S. 125.

²⁾ Vgl. Brillouin: *Leçons sur la viscosité*, Livre II, No. 170 ff.

³⁾ O. Reynolds: An experimental investigation of the circumstances Phil. Trans. CCXXIV part. III, p. 935 (1883), *Papers* vol. II, p. 51.

⁴⁾ *Mémoires des Savants Étrangers*, t. XV, p. 857 sowie *Récherches expérimentales relatives au mouvement de l'eau*, Paris 1855.

Couette (l. c.⁵⁾ S. 125) untersuchte die nach ihm benannte Anordnung: Strömung zwischen einem ruhenden und einem konzentrischen rotierenden Zylinder, und zwar mit verschiedenen Flüssigkeiten (Wasser: $\frac{\mu}{\rho} = 0,011$ und Öl: $\frac{\mu}{\rho} = 0,15$). Auch hier bestätigte sich das Reynoldssche Gesetz, mit der kritischen Zahl annähernd 2000, wenn hier unter a der Abstand der beiden Zylinder und unter U ihre relative Geschwindigkeit verstanden wird. L. Hopf¹⁾ hat ähnliche Resultate auch bei offenen Leitungen gefunden.

Eine wichtige Bestätigung und Erweiterung fanden die Reynoldsschen Experimentalergebnisse durch die Untersuchungen von E. Bose²⁾ und W. Sorkau³⁾. Beide untersuchten eine große Anzahl verschiedener Substanzen, z. B. Alkohole, Chloroform usw. beim Durchströmen durch Röhren. Sie bestätigen den scharf markierten Eintritt eines turbulenten Zustandes und ihre Zahlen stimmen gut mit dem Reynoldsschen Gesetz überein⁴⁾. Sie finden aber auch, daß das Uebergangsgebiet vom laminaren zum hydraulischen Zustand, das Hagen fand, sich ebenfalls in mehrere, scharf getrennte Zustandsgebiete zerlegen läßt, die Sorkau als Turbulenz I, Turbulenz II usw. bezeichnet. Sie sind empirisch unterschieden durch den verschiedenen Exponenten des Potenzgesetzes, durch das die Abhängigkeit des Druckgefälles von der Durchströmungsmenge sich angenähert ausdrücken läßt. Diese Exponenten sind für die Turbulenzzustände I: 1,5, II: 2,3, III: 2,1. II und III scheinen bereits dem hydraulischen Zustand ähnlich.

2. Berücksichtigung der Wandbeschaffenheit. Bei den bisher erwähnten Versuchen wurde die Abhängigkeit der Turbulenzerscheinung vom Material der Wände nicht in Betracht gezogen, insofern jeder der Genannten nur mit einheitlichen, gut geglätteten Röhren bzw. Zylinderwänden arbeitete (Hagen und Couette mit Metall, Reynolds, Bose-Sorkau mit Glas). Auf Grund von Reynolds' theoretischen Anschauungen hatte sich zunächst die Ansicht gebildet, daß der numerische Wert der kritischen Reynoldsschen Zahl vom Material unabhängig, durch die Stokeschen Gleichungen allein bestimmt sei. Die späteren Erfahrungen entsprachen dieser Ansicht nicht mehr. Zunächst ist die Untersuchung von W. Ruckes⁵⁾ über die Turbulenzerscheinungen bei Luftströmung durch Glas- und Metallkapillaren zu nennen. Ruckes bestätigt bei den Glaskapillaren den Reynoldsschen Wert Re_k rund 2000, dagegen findet er bei Metallkapillaren nur Re_k rund 400 bis 500.

In der entgegengesetzten Richtung findet V. W. Ekman⁶⁾ Abweichungen von den Reynoldsschen Zahlen, ebenso wie früher schon Mallock⁷⁾ bei Versuchen, deren Zuverlässigkeit wegen sonstiger Unstimmigkeiten allerdings zweifelhaft erscheint, bemerkt hatte. Auch Barnes und Coker⁸⁾ hatten schon Laminarströmungen oberhalb der Reynoldsschen kritischen Zahl beobachtet.

Ekman arbeitete mit dem Reynoldsschen Apparat, aber mit sorgfältiger bearbeiteten Glasröhren, und insbesondere bei sorgfältiger Herstellung glatter Einstromungsverhältnisse. Das Ergebnis war, daß die kritische Grenze nicht eine bestimmte Zahl ist, wie Reynolds glaubte. Der Eintritt der turbulenten Strömung erfolgt vielmehr bei um so höheren Zahlen, je kleiner die Ursachen von Störungen des laminaren Zustandes sind, ja, es konnte bis zum 4fachen Wert der von Reynolds angegebenen kritischen Zahl die laminare Strömung aufrecht erhalten werden. Kleine Fehler im Ansatz des Einstromungsstückes, die offenbar Wirbel erzeugten, setzten die Grenze sofort wieder herunter. Daß aber turbulente Bewegung oberhalb der Reynoldsschen Grenze tatsächlich möglich ist, geht daraus hervor, daß, wenn der turbulente Zustand einmal erreicht ist, bei Verringerung der Geschwindigkeit nicht wieder der laminare Zustand eintritt, sondern der

¹⁾ Turbulenz bei einem Fluß, Ann. d. Physik 32. 1910, p. 777 sowie Diss. München 1909.

²⁾ E. Bose — D. Rauert: Experim. Beitrag zur turbulenten Flüssigkeitsbewegung. Phys. Ztschr. 10 (1909); — Experimentelle Untersuchung über die innere Reibung im turbulenten Strömungszustand: Phys. Ztschr. 12 (1911) S. 582; 15 (1914) S. 582, 768.

³⁾ Phys. Ztschr. 13, (1912) S. 805; 14, (1913) S. 147.

⁴⁾ Vergl. Th. v. Karman: Phys. Ztschr. 12 (1911) S. 283 und G. Mie: Phys. Ztschr. 14 (1913) S. 93 sowie C. Schäfer — Frankenberg, ebenda S. 89.

⁵⁾ Untersuchungen über den Ausfluß komprimierter Luft aus Kapillaren und die dabei auftretenden Turbulenzerscheinungen. Diss. Würzburg 1907. S. auch den Vortrag von W. Wien: Ueber turbulente Bewegungen; Phys. Ztschr. 8 (1904) Verh. d. d. Phys. Ges. 9 (1907).

⁶⁾ Turbulent Motions of Liquids: Archiv f. Mat. Astr. och Fysik, Bd. 6, No. 12 (1910).

⁷⁾ Experiments on Fluid Viscosity, Phil. Trans. 187 (1896).

⁸⁾ The flow of water through pipes, Proc. Roy. Soc. of London, t. LXXIV, p. 341 (1904/5).

turbulente bestehen bleibt. Nur in der Nähe der Reynoldsschen Grenze tritt dann, wie Reynolds beobachtet hatte, Laminarströmung ein. Hiernach scheint die Reynoldssche Zahl 2000 eine untere Grenze für die Möglichkeit turbulenter Strömung zu sein, die allerdings, nach den Versuchen von Ruckes, noch vom Material der Röhren abhängen müßte.

Neuerdings hat auch L. Schiller¹⁾ die Ergebnisse von Ekman bestätigt, wonach wesentlich durch günstige Einströmungsverhältnisse der Eintritt des turbulenten Zustandes zu viel höheren Durchflußgeschwindigkeiten verschoben werden kann. Es gelingt ihm, die Laminarbewegung bis $Re = 9600$ aufrecht zu erhalten, während er $Re = 1400$ als die erwähnte untere Grenze turbulenter Strömung feststellt. Daß sie tiefer liegt, als die Reynoldssche kritische Zahl 1900, stimmt vielleicht, da die Versuche mit Metallröhren ausgeführt sind, mit den obigen Bemerkungen über die Abnahme der kritischen Zahl mit zunehmender Wandrauhigkeit überein. Immerhin bleibt noch eine bedeutende Differenz gegen die von Ruckes gefundene untere Grenze 400 aufzuklären, über die erst nach dem Vorliegen genauerer Mitteilungen über die Versuche geurteilt werden kann.

Als einen Widerspruch gegen die Annahme einer Abhängigkeit der kritischen Zahl von der Rauigkeit sieht Schiller die Feststellung an, daß durch Einscheiden eines Gewindes (von 0,3 mm Tiefe bei einem Rohrdurchmesser von 16 mm) der Eintritt der Turbulenz nicht beeinflusst, wohl aber der Widerstand im turbulenten Zustand erhöht wurde.

II. Theoretische Untersuchungen.

Bereits Reynolds selbst hat sich nicht auf experimentelle Feststellungen der Turbulenzerscheinungen beschränkt, sondern sie — auf Grund der Stokesschen hydrodynamischen Grundgesetze — zu verstehen gesocht. Seiner Untersuchung ist eine größere Zahl weiterer gefolgt; verwandte Ueberlegungen von Rayleigh gehen den Reynoldsschen bereits voraus. Es muß aber gleich betont werden, daß eine vollständige Erklärung bisher nicht erreicht ist. Wir unterscheiden im folgenden drei Gruppen von Untersuchungen:

1. Die auf der Methode der kleinen Schwingungen (Zerlegung in Partialstörungen) beruhenden, die im wesentlichen als abgeschlossen betrachtet werden können, aber zu keinem Ergebnis hinsichtlich der Entstehung der Turbulenz geführt haben.
2. Die nur energetischen Ansätze, die noch nicht abgeschlossen sind, in ihrer Fortführung aber auf Ansätze nach Gruppe 3 hinweisen.
3. Die Ansätze, die endliche Störungen der Laminarströmung in Betracht ziehen wollen. Der Schwierigkeit der Aufgabe entsprechend sind diese Ansätze noch sehr unvollkommen.

1. Methode der kleinen Schwingungen. Ich beschränke mich, soweit formelmäßige Angaben in Betracht kommen, stets auf den zweidimensionalen Fall, der auch von den meisten Autoren bevorzugt ist. Die Uebertragung der Ansätze auf den dreidimensionalen Fall erfolgt ohne Schwierigkeit, die Durchführungen werden dann allerdings erheblich schwieriger. Die Strömung hat den Stokesschen hydrodynamischen Grundgleichungen²⁾ zu genügen:

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \right\} \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \dots \dots \dots (2),$$

wobei die Richtung x in die Stromrichtung, die Richtung y quer dazu fallen soll. Die Randbedingungen bestehen darin, daß die Flüssigkeit an den Wänden haften ($u = v = 0$) bzw. die Geschwindigkeit der Wände annehmen ($u = U$, $v = 0$) soll. Der laminaren Strömung entspricht die Lösung

$$u = U_0(y); \quad v = 0 \dots \dots \dots (3).$$

¹⁾ L. Schiller: Rauigkeit und kritische Zahl. Ein experimenteller Beitrag zum Turbulenzproblem. Ztschr. f. Physik III (1920), S. 412.

²⁾ Stokes, l. c. S. 125³⁾. S. auch Lamb: Hydrodynamics, Kap. XI.

Im Reynoldsschen Fall fester Röhren ist U_0 eine quadratische Funktion von y , im Couetteschen Fall bewegter Wände eine lineare.

Wegen der Gl. (2) führt man die Stromfunktion f ein:

$$u = \frac{\partial f}{\partial y}; \quad v = -\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \dots \quad (4),$$

eliminiert p und führt geeignete Maßeinheiten ein (etwa als Längendimension die Rohrweite, als Zeitdimension diejenige Zeit, die ein mit der mittleren Geschwindigkeit bewegter Punkt zur Durchquerung der Rohrweite brauchte. Man erhält dann:

$$\varrho a U \left[\frac{\partial \Delta f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \left(U \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial \Delta f}{\partial y} \right] = \mu \Delta \Delta f + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (5),$$

wobei

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Man sieht, daß hier nur die »Reynoldssche« Zahl $R = \varrho a \frac{U}{\mu}$ als wesentliche Konstante eingeht¹⁾. Die Methode der kleinen Schwingungen setzt nun (im genannten Maßsystem):

$$u = U_0 + u_1; \quad v = v_1; \quad f = f_0(y) + f_1,$$

worin f_0 gegeben ist durch $U_0 = \frac{df_0}{dy}$ und erhält, unter Beibehaltung nur linearer Glieder in f :

$$\varrho a U \left[\frac{\partial \Delta f_1}{\partial t} + U_0 \frac{\partial \Delta f_1}{\partial x} - U_0'' \frac{\partial f_1}{\partial x} \right] = \mu \Delta \Delta f_1 \quad (6),$$

wozu nach (3) und (4) die Randbedingungen:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial y} = 0 \quad (7)$$

an beiden Rändern kommen. Eine beliebig vorgegebene Anfangsstörung denkt man sich nun in Fourierscher Weise in Einzelstörungen aufgelöst, die periodisch in der x -Richtung sind und fragt nach deren zeitlichem Verlauf; setzt also:

$$f_1 = e^{i(\alpha x - \beta t)} \varphi(y).$$

So wird:

$$\varrho U a i \left[(\alpha U_0 - \beta) \left(\frac{d^2 \varphi}{dy^2} - \alpha^2 \varphi \right) - \alpha U_0'' \varphi \right] = \mu \left[\frac{d^4 \varphi}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \alpha^4 \varphi \right] \quad (6')$$

und statt (7) kommen die Randbedingungen:

$$\varphi = \frac{d\varphi}{dy} = 0 \quad (7')$$

an beiden Wänden. Die Frage ist, welche Werte β annimmt, bei beliebigen reellen Werten von α . Labilität der Strömung wäre erwiesen, wenn sich positiv imaginäre β (aperiodische Zunahme) oder komplexe β mit positiv imaginärem Teil (anwachsende Schwingungen) ergäben. In ähnlicher Form scheint der Ansatz der freien Schwingungen erstmals von Rayleigh²⁾ gemacht zu sein. Rayleigh wählt für $U(y)$, die Verteilung der laminaren, reibenden Strömung in Röhren (U_0 quadratische Funktion in y) und zeigt, daß diese Strömung für kleine Werte von U sicher stabil ist.

Dieser Behandlung gehen eine Reihe verwandter Untersuchungen des nämlichen Verfassers³⁾ voraus, die sich aber mit dem reibungsfreien Problem ($\mu = 0$) beschäftigen und daher nur eine der beiden Randbedingungen (7') berücksichtigen können. Sie können also nicht als eine Annäherung der vorliegenden Aufgabe betrachtet werden, vor allem

¹⁾ S. z. B. A. Sommerfeld; l. c. S. 131^b), S. 118. E. Noether; l. c. S. 134^b), S. 315.

²⁾ On the question of the stability of the flow of fluids Phil. Mag. (5. 34) (1892); (Papers III p. 575); vergl. auch A. E. H. Love: Enzyklopädie d. math. Wissensch. IV, 15 (Hydrodynamik I) Nr. 18.

³⁾ Lord Rayleigh: Proc. London Math. Soc. X (1878) p. 4 (Papers I, p. 36); ebenda: XI (1880) p. 57 (Papers I, p. 484); ebenda XXVII (1895) (Papers IV, p. 209). S. auch: Lord Kelvin, Brit. Assoc. Rep. 1880, p. 492; (Papers IV, p. 186). Love: Proc. London Math. Soc. XXVII, 1896, p. 202. Eine kritische Zusammenfassung dieser Untersuchungen findet sich bei William M. Fadden Orr: The stability or instability of the Steady Motion of a Perfect Liquid and of viscous Liquid; (Proc. of the Royal Irish Academy, XXVII (A) 1907), Part I, p. 9 ff; Part II, p. 69 ff; insbesondere Part I.

⁴⁾ 1. c. S. 129 ³⁾ Part II, p. 95 ff., p. 117 ff.

der Besselschen Funktionen vom Index $\frac{1}{3}$ zurückführen. Als Gleichung, die die möglichen Werte von β liefert und damit nach obigem über die Stabilität entscheidet, ergibt sich hieraus eine transcendente Gleichung, die Integrale über Besselsche Funktionen enthält. Den besprochenen Ansatz von Orr, der in Deutschland unbekannt geblieben ist, hat A. Sommerfeld¹⁾ später unabhängig neu mitgeteilt.

Die Diskussion der transzendenten Gleichung zur Bestimmung der β -Werte hat bereits Orr²⁾ durch Benutzung asymptotischer Formeln für die Zylinderrfunktionen begonnen und ist zu der Vermutung gekommen, daß nur abklingende Schwingungen existieren, ohne sie streng zu begründen. L. Hopf³⁾ hat auf ähnlichem Wege, im Anschluß an die Sommerfeldsche Arbeit, diesen Beweis streng durchgeführt und zugleich eine ausführliche Untersuchung der Schwingungstypen angeschlossen. Bei kleinen Werten von $\mathcal{R}$ überwiegen Wellen, ähnlich denen auf ruhendem Wasser, die die Kanalbreite in mehrere zirkulierende Gebiete unterteilen und sich mit einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit fortpflanzen. Bei großem $\mathcal{R}$ überwiegen Störungen, die sich vorzugsweise je auf eine kleine Schicht der Kanalbreite beschränken und mit der dort herrschenden lokalen Geschwindigkeit fortpflanzen. Auf einem direkteren Weg hatte vorher auch schon R. v. Mises⁴⁾ den Stabilitätsbeweis für beliebiges $\mathcal{R}$ geführt. Nach Rayleighs zitierter Untersuchung war die Stabilität für kleine $\mathcal{R}$ sichergestellt. Mises fragt daher direkt nach der Grenze, für die die Stabilität in Labilität übergehen könnte, für die es also rein periodische Störungswellen (β reell) geben müßte. Die Forderung, (8), (9) bei reellem β zu lösen, ist ein Eigenwertproblem, das zu einer transzendenten Gleichung für $\lambda = i\mathcal{R}$ führt. Mises stellt sie direkt durch Potenzentwicklung in der Art einer Fredholmischen Entwicklung auf, deren Form er durch den Grenzübergang aus der betreffenden Differenzenaufgabe zur Differentialaufgabe gewinnt. Man erkennt durch gewisse Überlegungen, daß die Gleichung unendlich viele reelle Wurzeln λ hat und der Grenzübergang gestattet zugleich die Abzählung, daß diese ihre sämtlichen Wurzeln sind. Daraus folgt, daß es keine reellen »kritischen« Reynoldsschen Zahlen $\mathcal{R}$ gibt, also stets nur gedämpfte Partialschwingungen vorhanden sind.

Diese Untersuchungen sind noch ergänzt durch den von O. Haupt geführten Nachweis, daß mit ihnen der Fall einer beliebig vorgegebenen Anfangsstörung erledigt wird. Zu dem Zweck war der formelle Nachweis nötig, daß eine willkürlich vorgegebene Funktion von y , die die Randbedingungen (7) erfüllt, sich nach den durch die homogene Aufgabe (8), (9), bei festem $\mathcal{R}$ definierten Funktionen entwickeln läßt. Dieser Entwicklungssatz ist allerdings von Haupt auch nur unter Voraussetzung gewisser Stetigkeitsbedingungen erbracht worden, die, ähnlich den oben von Oseen vorausgesetzten, nicht hydrodynamisch begründet sind. Nach Analogie der über Fouriersche Reihen seit langem vorliegenden Resultate dürfte aber die Entwickelbarkeit nicht auf die so eingeschränkte Funktionsklasse beschränkt sein, wohl aber die absolute Konvergenz der Entwicklung. Hierauf werden wir unten noch eingehen⁵⁾.

Hiermit hat diese Gruppe von Untersuchungen einen gewissen Abschluß erreicht. Mit einem nachher noch zu erwähnenden Vorbehalt kann man sagen, daß sie die Stabilität der Laminarbewegung, soweit man sie durch den linearen Ansatz feststellen kann, beweisen. Es liegt hiernach theoretisch keine Labilität in dem Sinn vor, wie sie z. B. bei einem in der Längsrichtung belasteten Balken besteht, der, ohne Berücksichtigung anderer Umstände, oberhalb der »Knickgrenze« sich bekanntlich theoretisch und empirisch als labil erweist.

2. Energetische Ansätze. Osborne Reynolds⁶⁾, der Begründer der Turbulenztheorie, hat die Stabilitätsfrage enger gefaßt, als der im vorausgehenden Abschnitt be-

¹⁾ Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung: Atti del IV. Congr. intern. del Matematici, Roma, 1908.

²⁾ l. c. p. 119 ff.

³⁾ Der Verlauf kleiner Schwingungen auf einer Strömung reibender Flüssigkeit; Ann. d. Physik, 43 (1914).

⁴⁾ Beitrag zum Oszillationsproblem: Heinrich-Weber-Festschrift, 1912, S. 252; vergl. auch: Kleine Schwingungen und Turbulenz; Jahresber. d. deutschen Math. Ver., XXI, 1912, p. 241.

⁵⁾ Ueber die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Eigenfunktionen des Turbulenzproblems; Sitzungsber. d. K. bayr. Akademie d. Wiss., Math.-Phys. Kl. 1912, S. 289. Haupt fordert 3 mal stetige Differenzierbarkeit der Geschwindigkeit der Anfangsstörung (l. c., S. 300) oder eine gleichwertige Bedingung: Hydrodynamisch läßt sich nur 1 mal stetige Differenzierbarkeit begründen.

⁶⁾ l. c. S. 126³⁾ und Phil. Trans. A 186, Part I 1895 (Papers II, p. 535): On the dynamical theory of incompressible Viscous Fluids and the determination of the criterion.

sprochene Rayleighsche Ansatz der kleinen Schwingungen. Wenn wir ihn trotzdem, nachdem der letztere bereits zu einem negativen Resultat geführt hat, noch erwähnen müssen, so ist es deshalb, weil er doch auf Fälle hinweisen kann, in denen die Neigung zur Labilität bei dem Rayleighschen Ansatz der Zerlegung in Partialschwingungen verdeckt bleiben würde. Reynolds betrachtet eine vorgegebene »mittlere Strömung«, der Störungsbewegungen überlagert sind. Die mittlere Bewegung ist definiert als laminare Strömung, während der zeitliche Mittelwert der Störungsbewegung verschwinden soll¹⁾. Er fragt, ob die Energie der in einem beliebigen Zeitpunkt vorgegebenen Störung mit der Zeit anwächst oder abnimmt. Setzt man in unseren Grundgleichungen (1)

$$u = U_0 + u_1, \quad v = v_1,$$

wobei U_0 die mittlere Bewegung (zu unterscheiden von der früheren »Grundbewegung«) und u_1, v_1 die Störungsbewegung bedeuten, so ist die Energiezunahme der Störungsbewegung:

$$\frac{dT}{dt} = -\mu \int \Phi_1 dw - \mu \Re \int \Psi_1 dW,$$

worin

$$\Phi_1 = 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y} \right)^2$$

die Dissipationsfunktion, ferner

$$\Psi_1 = u_1 v_1 \frac{\partial U_0}{\partial y}$$

bedeutet und die Integrale über den ganzen Flüssigkeitsraum zu erstrecken sind. Wenn die Störung so gewählt werden kann, daß Ψ_1 negativ wird, so muß bei hinreichend großer Reynoldsscher Zahl $\Re$ das zweite Integral das erste überwiegen, die Energie der Störung also zunehmen. Reynolds hat spezielle Störungsformen untersucht, für die diese Grenze sich zu $\Re = 517$ ergab; H. A. Lorentz²⁾ hat (für den Couetteschen Fall) durch andere Wahl der Störung $\Re = 288$ gefunden. Sharpe³⁾ hat die Grenze auf 167 herabgesetzt. W. M. F. Orr⁴⁾ formuliert die Aufgabe als ein Variationsproblem, (das Verhältnis des Integrals über Ψ_1 zu dem über Φ_1 möglichst groß zu machen), das auf die Randwertaufgabe führt:

$$\Delta \Delta \psi + \Re \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = 0$$

bei den Randbedingungen

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0$$

und findet so den numerischen Wert $\Re = 177$ durch Ansatz spezieller Lösungsformen, die aber noch nicht den kleinstmöglichen Wert ergeben.

G. Hamel⁵⁾ hat das nämliche Variationsproblem in mathematisch schärferer Form und auch für den Fall der Strömung in Röhren begründet. Durch Zurückführung auf eine Integralgleichung zeigt er zugleich, daß es immer eine von 0 verschiedene »kritische« Reynoldssche Zahl in diesem Sinne gibt.

Haben nun diese Betrachtungen weitergehende Bedeutung als die vorausgehend besprochene Zerlegung in (kleine) Partialschwingungen? Soweit sie an die dortigen Voraussetzungen (kleine Anfangsstörungen mit weitgehenden Stetigkeitsbedingungen) gebunden bleiben, sicher nicht. Die energetischen Betrachtungen fragen nämlich nur nach dem anfänglichen Anwachsen oder Abnehmen der Turbulenzenergie. Das in Frage stehende System ist aber kein »abgeschlossenes«; bei einem solchen ließe sich die Gesamtenergie als Summe der Teilenergieen berechnen, die, einzeln angeregt, den Partialschwingungen entsprächen, und wenn diese gedämpft sind, also ständig abnehmende Energie haben, muß auch die Gesamtenergie aperiodisch abnehmen. Es ist vielmehr nur dem einen Freiheitsgrad eines gekoppelten Systems vergleichbar, dessen anderer Freiheitsgrad die laminare Haupt-

¹⁾ Vergl. auch H. Lamb: Hydrodynamics, § 346 (deutsche Ausgabe von Friedel, S. 743).

²⁾ Turbulente Flüssigkeitsbewegungen . . .; Abb. über theor. Physik (1907), S. 54 (Neubearbeitung einer Arbeit aus dem Zittingsverslag Akad. v. Wet. Amsterdam 6 (1897), S. 28).

³⁾ Sharpe: On the stability of the motion of a viscous liquid: Trans. Amer. Math. Soc. VI, 4 (1905)

⁴⁾ l. c. S. 129³⁾, S. 124 f.

⁵⁾ Zum Turbulenzproblem: Nachr. d. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1911.

bewegung wäre. Daher kann seine Energie zeitweise zunehmen, ohne daß damit Labilität verbunden wäre, die Energie kann selbst gedämpfte Schwingungen ausführen. Die energetischen Methoden ergeben deshalb höchstens eine untere Grenze für die kritische Reynoldssche Zahl.

Andererseits kann das zeitweise Anwachsen der Energie für die Stabilitätsfrage doch wesentlich in Betracht kommen. Entsprechend dem Anwachsen der Energie muß hier, wenigstens zeitweise, trotz der gesicherten Stabilität der Partialschwingungen, mit einem starken Anwachsen der Turbulenzamplitude gerechnet werden. (Solche Fälle treten z. B. bei einem Freiheitsgrad eines gekoppelten Systems immer auf, wenn »Schwebungserscheinungen« vorliegen.) Dadurch können aber leicht die Voraussetzungen des linearen Ansatzes, der in der Methode der Partialschwingungen und auch in der Kelvin-Oseenschen Methode enthalten ist, über den Haufen geworfen werden. Denn wir haben es, wenn auch mit kleinen, doch stets mit endlichen Störungen zu tun. Hierin liegt die Bedeutung der energetischen Ansätze: Sie können, trotz der gesicherten Stabilität der Partialschwingungen, auf Fälle hinweisen, wo die Voraussetzungen des linearen Ansatzes hinfällig werden. So drängen diese Betrachtungen dazu, die Stabilitätsfrage nicht auf unendlich kleine Störungen zu beschränken, sondern endliche Störungen ins Auge zu fassen¹⁾.

3. Endliche Störungen. Bereits Lord Kelvin hat aus seinen (allerdings als unstreng nachgewiesenen, s. oben) Untersuchungen den Schluß gezogen, daß nicht unendlich kleine, sondern nur endliche Störungen die Laminarbewegung in die turbulente umwandeln können. Die Größe der erforderlichen Störung könne vielleicht um so kleiner werden, je größer die Reynoldssche Zahl R ist. Eine ähnliche Auffassung kommt auch bei Reynolds und Rayleigh²⁾ vor, ebenso in der oft zitierten Arbeit von Orr und bei Oseen (l. c. S. 130³⁾). Man unterscheidet bekanntlich Fälle theoretischer Stabilität bzw. Labilität im Gegensatz zu praktischer Stabilität bzw. Labilität³⁾ und versteht unter ersterer Klasse das Verhalten des mechanischen Systems gegenüber beliebig zu verkleinernden Störungen, unter letzterer Klasse das Verhalten gegenüber den praktisch vorkommenden,

¹⁾ Ähnliche Ausführungen finden sich mehrfach in der zitierten Arbeit von Orr, II, p. 16. p. 30, p. 32 f., p. 74. Vergl. auch die kritischen Bemerkungen in der voranstehenden Note von G. Hamel sowie Derselbe: Stabilität und Partikularlösungen linearer Differentialgleichungen, Monatshefte f. Mathematik und Physik, XXIII, 1912, S. 312.

Der mathematische Gedanke unserer textlichen Ausführungen ist wesentlich folgender: Die Eigenfunktionen des Turbulenzproblems, $\varphi_1(y), \varphi_2(y), \dots$ bilden kein Orthogonalsystem, da die Aufgabe (8), (9) keine selbstadjungierte ist. Daher ist auch das quadratische Integral $\int f^2(y) dy$ einer Funktion $f(y)$, die nach diesen Eigenfunktionen entwickelt ist

$$f(y) = A_1 \varphi_1(y) + A_2 \varphi_2(y) + \dots \quad (\alpha)$$

nicht durch die Quadratsumme der Koeffizienten, $A_1^2 + A_2^2, \dots$ darstellbar.

$$\int f^2(y) dy \neq A_1^2 + A_2^2 + \dots \quad (\beta).$$

Wenn eine willkürliche Anfangsstörung gewisse Stetigkeitsbedingungen erfüllt (vergl. Haupt, l. c. S. 131⁵⁾), so läßt sie sich in eine absolut konvergente Reihe der Form (α) entwickeln. Sind aber diese hydrodynamisch nicht begründeten Stetigkeitsbedingungen nicht erfüllt, so muß man nach Analogie der über Fouriersche Reihen vorliegenden Resultate annehmen, daß die Reihe auch existiert, aber nur bedingt konvergent ist. Es sei für $t=0$ die Reihe (α) eine solche bedingt konvergente Reihe. Nehmen wir einen Augenblick an, alle Partialschwingungen seien zeitlich rein periodisch. Dann haben wir zur Zeit t :

$$f(y, t) = A_1 \cos \beta_1 t \varphi_1(y) + A_2 \cos \beta_2 t \varphi_2(y) + \dots \quad (\gamma).$$

Da nach Ungleichung (β) kein Anhalt über das quadratische Integral der Funktion $f(y, t)$, noch weniger über die Funktion $f(y, t)$ selbst besteht und (α) nur bedingt konvergent angenommen ist, ist es möglich, daß die Reihe (γ) für gewisse t divergent, $f(y, t)$ also unendlich wird. Im Turbulenzfall sind die Teilschwingungen allerdings sämtlich gedämpft, also

$$f(y, t) = A_1 e^{-\beta_1' t} \cos \beta_1 t \varphi_1(y) + A_2 e^{-\beta_2' t} \cos \beta_2 t \varphi_2(y) + \dots \quad (\delta)$$

und die $\beta_1', \beta_2', \dots$ bilden eine mit dem Index anwachsende Reihe, so daß (δ) eine absolut konvergente Reihe ergibt, aber der relative Unterschied dieser Dämpfungskonstanten ist nicht erheblich (vergl. L. Hopf, l. c. S. 131³⁾, S. 42). Man muß daher mit der Möglichkeit rechnen, daß $f(y, t)$, wenn nicht unendlich, so doch zum mindesten zeitweise sehr große Werte annimmt, trotz der Dämpfung der Partialschwingungen.

²⁾ Ueber Stabilität der Laminarbewegung einer reibungsfreien Flüssigkeit, Phil. Mag. 16, 26 (1913) (p. 100).

³⁾ Vergl. Klein-Sommerfeld: Ueber die Theorie des Kreisels (Heft II), Leipzig 1898, S. 350 ff.

immer endlichen, wenn auch kleinen Störungen. Nur die erstere Klasse kann die Methode der kleinen Schwingungen erfassen, sofern das »praktische« Verhalten abweicht von dem »theoretischen«. Ein einfachstes Beispiel bildet eine Kugel, die auf der Spitze eines Berges in einer kleinen Versenkung liegt. Um das praktische Verhalten der Kugel zu ermitteln, dürfte man offenbar sich nicht auf die lineare Annäherung beschränken, die die Gleichgewichtslage der Kugel immer als einen tiefsten Punkt ergäbe, sondern man muß die wahre Bergform einschließlich der Einsenkung berücksichtigen, also mindestens noch quadratische Glieder mitnehmen, und wird dann die Lage als eine nahezu höchste, also labile finden. Analoge Verhältnisse müssen überall in der Physik vorliegen, wo labile Zustände sich überhaupt erhalten lassen, z. B. bei überhitzten Flüssigkeiten oder unterkühlten Dämpfen. Daß ein solcher Fall bei der Turbulenzerscheinung vorliegt, ist durch die Ekmanschen Versuche (s. oben) und die späteren oben erwähnten sehr wahrscheinlich gemacht. Stellen wir uns die Aufgabe, die Turbulenzerscheinung aus den hydrodynamischen Gleichungen allein abzuleiten, so müssen wir also die bisher unterdrückten quadratischen Glieder dieser Gleichungen heranziehen. Die erwähnten Versuche scheinen zu zeigen: Bei unendlich kleinen Störungen ist die Laminarströmung immer stabil, in Uebereinstimmung mit den Resultaten der Methode der kleinen Schwingungen. Wenn aber durch größere Rauigkeit der Wände größere Störungen vorkommen, oder durch ungeeignete Formen der Zuführung größere Wirbel erzeugt werden, so wird die Laminarströmung labil. Die Stabilität ist um so kleiner, je größer die Reynoldssche Zahl der Strömung ist. Es gibt aber keine bestimmte »kritische« Reynoldssche Zahl, sondern diese hängt ab von der Größe der vorkommenden Störung.

Diesen Standpunkt hat F. Noether¹⁾ eingenommen. Er geht aus von einer gleichfalls laminaren anfänglichen Geschwindigkeitsverteilung $U_0(y)$, die aber von der Verteilung der stationären Laminarbewegung endlich verschieden ist. Der nun folgende Strömungszustand kann eine nicht stationäre Laminarbewegung sein, vermittels derer die Geschwindigkeitsverteilung sich asymptotisch der stationären nähert. Wird diese nicht stationäre Laminarbewegung stabil sein? Die Frage läßt sich, mit Rücksicht auf die hohen Reynoldsschen Zahlen, die in Betracht kommen, dahin vereinfachen, daß man sich die ursprüngliche Laminarverteilung durch kleine Zusatzkräfte aufrechterhalten denkt und nun, genau analog dem obigen Ansatz der kleinen Schwingungen, nach der Stabilität dieser Strömung fragt. Es handelt sich also wieder um unsere obige Aufgabe (6), (7), worin nur für U_0 die gewählte Anfangsverteilung einzuführen ist. Man muß fragen, ob es nun eine Reynoldssche Zahl N (diese wieder durch die mittlere Geschwindigkeit bezw. die relative Wandgeschwindigkeit definiert) gibt, bei der Stabilität in Labilität übergeht, also in der Bezeichnung von S. 129 β rein reell wäre. Das erste Beispiel, das F. Noether angibt ($U_0 = c y^3$ für die Couettesche Anordnung), für das dieser Fall möglich sein soll, wurde von O. Blumenthal²⁾ als irrtümlich nachgewiesen. Doch fand F. Noether später für ein anderes Beispiel³⁾, das als Nachbarfall einer unstetigen Verteilung gewonnen wird (konstante Geschwindigkeitsverteilung im Innern des Rohrs, konstante Geschwindigkeit gleich der Wandgeschwindigkeit in der Nähe der Wände), daß in der Tat der Uebergang zum labilen Zustand möglich ist. Ein bestimmter Wert der Reynoldsschen Zahl für diesen Uebergang ergibt sich hiernach noch nicht, da, der Einfachheit der Rechnung halber, noch unendliche Wellenlänge der Störung ($\alpha = 0$) angenommen ist und nur αN sich berechnen läßt.

Hiernach ist es möglich, solche laminare Strömungsverteilungen anzugeben (die im allgemeinen den Charakter der wirklich beobachteten, in der Mitte gleichförmigen, am Rande rasch abfallenden Verteilungen haben), die, wenn sie durch geeignete, kleine zusätzliche Reibungskräfte zwischen den einzelnen Schichten aufrechterhalten werden, die Ueberlagerung turbulenter Bewegungen ohne dauernde Anregung gestatten. Andererseits hat schon H. A. Lorentz⁴⁾ gezeigt, daß solche zusätzlichen »Reibungskräfte« durch die mit der turbulenten Bewegung verbundene Konvektion von Impulsgröße von selbst entstehen (dem entspricht in unsrer obigen Darstellung des Reynoldsschen Ansatzes das energetische Glied W'). Es liegt daher nahe, nach solchen Geschwindigkeitsverteilungen

¹⁾ Ueber die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung: Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913, S. 309.

²⁾ Ueber die Entstehung einer turbulenten Flüssigkeitsbewegung: Sitzungsber. d. bayr. Akad. d. Wiss. 1913 S. 563.

³⁾ Zur Theorie der Turbulenz: Nachr. d. Ges. d. Wiss., Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1917.

⁴⁾ l. c. S. 132²⁾, § 11 f.

zu fragen, die durch die ihnen überlagerbaren turbulenten Strömungen von selbst aufrecht erhalten werden. Von einer Lösung dieser Frage sind wir noch weit entfernt. F. Noether¹⁾ formuliert die Aufgabe in der folgenden Gestalt: Es ist eine komplexe Funktion

$$\chi_1(y) = \varphi_1(y) + i\psi_1(y)$$

zu finden, die der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{d^4\chi_1}{dy^4} - 2\alpha^2 \frac{d^2\chi_1}{dy^2} + \alpha^4 \chi_1 = \frac{i\alpha\Re}{2} \left[\left(\frac{2\beta}{\alpha} - U_0 \right) \left(\frac{d^2\chi_1}{dy^2} - \alpha^2 \chi_1 \right) + \frac{d^2U_0}{dy^2} \chi_1 \right] \quad (10)$$

mit der Randbedingung

$$\chi_1 = \frac{d\chi_1}{dy} = 0 \quad (10')$$

für $y = \pm 1/2$. Die Aufrechterhaltung der Grundströmung fordert dabei die Bedingung: Es soll sein

$$\frac{dU_0}{dy} = \frac{\Re\alpha}{2} \left(\varphi_1 \frac{d\psi_1}{dy} + \psi_1 \frac{d\varphi_1}{dy} \right) + Ay + B \quad (11)$$

(mit gewissen Konstanten A, B , die die entsprechende stationäre Laminarbewegung bestimmen; α, β haben die frühere Bedeutung). Es wird gezeigt, daß ihre Lösung als erster Schritt einer sukzessiven Lösung der nicht linearen Differentialgleichung (5), mit den Randbedingungen (7), aufgefaßt werden kann, die nach negativen Potenzen von $\sqrt{\Re}$ fortschreitet. Daß solche Lösungen wirklich existieren, die nirgends mit der Laminarlösung zusammenfallen, wird durch die Verzweigungstheorie der nichtlinearen Differentialgleichungen nahegelegt (vergl. hierüber die zitierte Note) und kann mit den Sorkauschen Messungen (vergl. oben S. 127) in Verbindung gebracht werden, wonach es eine Reihe von verschiedenen turbulenten Zuständen gibt.

Bei dieser Auffassung der Vorgänge kommt der Rauigkeit der Wände, Unregelmäßigkeiten der Einstömungsverhältnisse, mit der Strömung eingeführten Wirbeln eine auslösende Rolle zu, sowie eine auswählende: Die verfügbaren Konstanten der Lösungen dürften erst durch diese Umstände bedingt sein. Ob eine »kritische Zahl« vielleicht in dem Sinne existiert, daß unterhalb derselben eine von der Laminarlösung abweichende Lösung überhaupt nicht existiert, bleibt noch offen, sie müßte nach den Schillerschen Versuchen (l. c. S. 127) kleiner als 1400, nach denen von Ruckes (l. c. S. 128) sogar kleiner als 400 sein.

R. v. Mises²⁾ vertritt eine etwas abweichende Auffassung. Nach seiner Ansicht hat die Turbulenz nicht den Charakter freier Schwingungen, sondern werde durch die Wandrauigkeit dauernd erregt, auch wenn diese als unendlich klein betrachtet werden kann. Insofern auch bei unserer Auffassung die freien Schwingungen von der Strömung mitgenommen werden und an der Einstömung neu erregt werden müssen, weichen beide Auffassungen für ein Rohr von endlicher Länge nicht prinzipiell voneinander ab. Erst bei dem theoretischen, unendlich langen Rohr ergibt sich eine scharfe Fassung der Fragestellung: Gibt es dann im ideal glatten Rohr eine von der laminaren abweichende »turbulente« Strömungsform, die sich, einmal erregt, dauernd zu erhalten vermag, oder wird die »Turbulenz« mit der Zeit abklingen, wenn sie nicht durch andauernde Störungen immer neu erregt wird? Haben also die Störungen nur auslösenden, oder für die Möglichkeit der turbulenten Strömung wesentlichen, erregenden Charakter?³⁾ Von sekundärer Bedeutung ist die Frage, ob die Wandrauigkeit oder die Form der Einstömung die Störungen hervorbringt. L. Schiller (l. c.) entscheidet sich hier für die letztere Annahme, auf Grund seiner oben erwähnten Resultate, daß das Einschneiden eines Gewindes in die Rohrwand den Eintritt der Turbulenz nicht beeinflusste. Doch kann dieser Versuch kaum als beweisend betrachtet werden, da hier

¹⁾ Zur Theorie der Turbulenz: Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 23 (1914), S. 138.

²⁾ Kleine Schwingungen und Turbulenz: Jahresber. d. deutschen Math. Ver. 21, 1912, S. 241. Vergl. auch den Einführungsaufsatz dieser Zeitschrift, Bd. 1, 1921, S. 13.

³⁾ Die Misesche Auffassung scheint mir, wenigstens unter Beschränkung auf den linearen Ansatz, kaum durchführbar. Die Auffassung der Turbulenz als freie Schwingungen im rauen Rohr muß zu einem ähnlichen Ansatz führen wie der erzwungener Schwingungen im glatten Rohr, im Gegensatz zu den Ansätzen von Orr, Sommerfeld usw., die freie Schwingungen im glatten Rohr suchen. Es ist aber eine bekannte Tatsache, daß erzwungene Schwingungen nur dann großen Einfluß haben, wenn die entsprechenden freien vorhanden sind, mit denen sie in Resonanz treten können. Vielleicht können statistische Betrachtungen über die Schwierigkeit hinweghelfen, wenn man an eine ähnliche Wirkung der Superposition vieler Schwingungen denkt, wie wir sie in § 2 (S. 132) schon bei den energetischen Ansätzen als möglich hinstellten.

das wesentliche Charakteristikum der Rauigkeit, die »molekulare Unordnung«, fehlt. Für die Auffassung der Turbulenz als freier Schwingungen spricht aber noch eine einfache Ueberlegung. Bei dieser Auffassung kann die Turbulenzenergie nur auf Kosten der Energie der laminaren Grundströmung entstehen. Ist nun die mittlere Strömungsgeschwindigkeit (Durchströmungsmenge) gegeben, so kann man fragen, bei welcher Verteilung der Grundströmung deren Energie möglichst klein ist. Man hat die Aufgabe zu lösen, das Integral

$$E = \int U^2(y) dy$$

möglichst klein zu machen, wenn

$$Q = \int U(y) dy$$

vorgegeben ist. Man findet ohne Schwierigkeit nicht die stationäre laminare Verteilung, sondern die gleichförmige Verteilung über den Querschnitt: $U = \frac{Q}{b}$. Es ist daher verständlich, daß die Entstehung dieser gleichförmigen Verteilung, die annähernd wirklich beobachtet wird, mit der Entstehung von Turbulenzenergie verbunden sein kann, die in freien Schwingungen zu Tage tritt. Die erhöhte Widerstandsarbeit ist auf die verstärkte Poiseuillesche Reibung am Rand zurückzuführen.

R. v. Mises¹⁾ hat ferner eine Abschätzung der erforderlichen Größe der Turbulenzbewegung mitgeteilt, die, im obigen Sinn, die beobachtete mittlere Strömungsverteilung aufrechterhalten kann. Sein Weg stimmt im Wesen mit unserer Gleichung (11) überein, in der das erste Glied auf der rechten Seite die Turbulenzreibung bezeichnet. Wegen der großen Werte von $\Re$, die in Betracht kommen, ist ersichtlich, daß sehr kleine φ, ψ ausreichen können, um an Stelle der stationär laminaren Verteilung die gänzlich veränderte mittlere Verteilung der hydraulischen Bewegung treten zu lassen. Mises berechnet in einem Beispiel für die Turbulenzgeschwindigkeit wenige Hundertstel der mittleren Geschwindigkeit.

Zusatz.

Einige Untersuchungen über verwandte Fragen. Von verwandten Untersuchungen wären vor allem Experimentalbestimmungen von Viskositätskoeffizienten zu nennen, auch der »scheinbaren« Koeffizienten im Gebiete turbulenter Strömung. Statt diese zahlreichen Untersuchungen im einzelnen zu besprechen, sei auf die Referate in den physikalischen Literaturberichten (Beiblätter zu den Annalen der Physik, Fortschritte der Physik) sowie für die älteren auf das eingangs zitierte Buch von Brillouin verwiesen. Eine weitere Gruppe befaßt sich mit dem Uebergang von »laminarer« zu turbulenter Strömung bei verwandten Versuchsanordnungen. Die besprochenen Fragen bezogen sich auf die Strömung im geraden Kreisrohr und die geradlinige zwischen parallelen Wänden, endlich die Kreisströmung zwischen koaxialen Zylindern (Couette). Andere Anordnungen, die untersucht wurden, sind die Strömung zwischen parallelen Platten, von denen die eine gleichförmig rotiert²⁾, die Strömung zwischen konzentrischen Kugeln, deren eine gleichförmig rotiert³⁾ und die Strömung im spiralförmig gewundenen Kreisrohr⁴⁾. Die Verfasser finden in jedem Fall gleichfalls Uebergang von »laminarer« zu turbulenter Strömung, aber nicht, wie bei Reynolds, einen sprunghaften Uebergang, sondern stetige Entwicklung der turbulenten Strömungsform. Diese Erscheinung hat aber nichts mit den vorher besprochenen Abweichungen von den Reynoldsschen Beobachtungen zu tun, wie die Verfasser anzunehmen scheinen und z. B. Zemplén wirklich ausspricht. Bei der Reynoldsschen und Couetteschen Anordnung handelt es sich darum, daß die genau laminare Strömung immer möglich ist, aber bei größeren Geschwindigkeiten praktisch nicht eintritt. Anders liegen hier die Verhältnisse. Die »Laminarström-

¹⁾ Elemente der Technischen Hydrodynamik (Leipzig 1914), Nr. 31.

²⁾ H. Sanders: Untersuchungen über die Bewegungen einer zähen Flüssigkeit unter einer rotierenden Platte (Diss. Erlangen), Verh. d. deutschen Phys. Ges. 1912, S. 799.

³⁾ Gg. Zemplén: Untersuchungen über die innere Reibung der Gase, Ann. d. Phys. 29 (1909), p. 869; Ann. d. Phys. 38 (1912), p. 71. — Gg. Zemplén und B. Pogany: Über die innere Reibung von Flüssigkeiten, Ann. d. Phys. 41 (1916), p. 39.

⁴⁾ G. Lechner: Untersuchungen der Turbulenz bei Wasser und Quecksilber beim Fließen durch spiralförmig gewundene Kapillaren (Diss. Würzburg), Ann. d. Phys. 42 (1913), p. 614.

mung« ist hier eine nur für sehr kleine Geschwindigkeiten gültige Annäherung¹⁾, ähnlich wie die bekannte Stokes'sche Strömung um Kugeln²⁾ bei kleinen Geschwindigkeiten. Führt man in jedem Falle eine durch die Dimensionen des Apparates und die physikalischen Konstanten definierte Reynoldssche Zahl R ein, so läßt sich der Strömungszustand bei Rücksicht auf die quadratischen Glieder darstellen durch eine Reihe³⁾:

$$U = U_0 + U_1 |R| + U_2 R^2 + U_3 |R|^3 + \dots,$$

die den stetigen Uebergang aus der Laminarströmung zur turbulenten vermittelt. Zemplén's Annahme, daß die Turbulenzerscheinung bei Couette auf den Einfluß der Zylinderenden zurückzuführen sei, und bei der Kugelanordnung wegen des Fehlens der Enden verschwinde, ist nach dem Vorstehenden nicht begründet. Es bleibt aber auch in diesen Fällen bei höheren Geschwindigkeiten der unstetige Uebergang zu anderen Strömungsformen denkbar, wie er in der Aerodynamik mehrfach bekannt ist⁴⁾.

Weiter sind Untersuchungen über die Strömung in konvergenten oder divergenten Röhren zu erwähnen. Damit beschäftigt sich Gibson in einer größeren Reihe von Arbeiten. Er bestimmt theoretisch durch entsprechende Näherung die »Laminarströmung« in solchen Kreisrohren, d. h. die Strömung, bei der die von der Spitze des Trichters ausstrahlenden Radien Strömungskurven sind⁵⁾, bei kleinen Öffnungswinkeln des Trichters. Bei seiner Näherung ergibt sich kein Unterschied zwischen Aus- und Einstromung durch den Trichter. Die nämlichen Strömungen untersucht er experimentell⁶⁾ durch Messung des Strömungswiderstandes und findet das (auch aus technischen Untersuchungen bekannte) Resultat, daß der turbulente Zustand beim Ausströmen (nach der Trichteröffnung hin) früher eintritt, als bei Einstromung. Das Resultat entspricht unserer obigen Auffassung, da die Ausströmung leichter zur Wirbelbildung Veranlassung gibt, als die Einstromung. Bei Einstromung geht die kritische Geschwindigkeit rasch in die Höhe mit wachsendem Konvergenzwinkel des Trichters, sie ergibt sich in seinem Maßsystem bei den benutzten Röhren mit Wasser zu:

Konvergenzwinkel	0°	5°	7 1/2°	10°	15°
kritische mittlere Geschwindigkeit	0,133	2,7	3,4	4,3	5,7.

Ferner liegt noch eine wichtige theoretische Untersuchung über diesen Gegenstand vor⁷⁾. G. Hamel fragt nach Strömungsformen, die sich bei Berücksichtigung der quadratischen und der Reibungsglieder streng behandeln lassen. Unter der Forderung, daß die Stromlinien die einer Potentialströmung sein sollen, während die Geschwindigkeitsverteilung eine andere ist, ergeben sich bestimmte Spiralströmungen, und zwar auf logarithmischen Spiralen. Ein spezieller Fall ist der, daß der Windungswinkel der Spirale zu 0 wird, die Strömung also in eine von einem Punkt divergierende oder zu ihm konvergierende ausartet. Das wichtigste Resultat der Untersuchung ist, daß beim Ausströmen (auch in Spiralen) der Öffnungswinkel eines Spiralkanals (bezw. Trichters) bei gegebener mittlerer Durchströmungsmenge nicht beliebig, sondern nach oben hin begrenzt, und umgekehrt bei gegebener Öffnung die Durchströmungsmenge begrenzt ist, damit eine »laminare« Strömung überhaupt möglich ist. Beim Einstromen dagegen ergeben sich keine solche Einschränkungen. Man wird darin eine weitgehende Analogie zu den experimentellen Erfahrungen sehen. Weiter hat Hamel auch Nachbarlösungen dieser Strömungsformen untersucht, ohne aber auf die Stabilitätsfrage einzugehen.

¹⁾ Vergl. auch G. Kirchhoff: Vorl. über mathematische Physik, I. p. 375.

²⁾ H. Lamb: Hydrodynamics, § 325 f.

³⁾ C. W. Oseen: Ueber den Gültigkeitsbereich der Stokes'schen Widerstandsformel; Archiv f. Mat. Astr. och Fysik (19.2). — E. Noether (ebenso, Zeitschr. f. Mathematik u. Physik 19.2 und Gg. Zemplén, l. c. (S. 136³⁾) nahmen irrtümlich an, daß in der Reihe nur die geraden Potenzen von R vorkommen könnten.

⁴⁾ Vergl. die bekannten Versuche von Eitel sowie L. Prandtl: Ueber den Widerstand von Kugeln, Göttinger Nachrichten, 1915.

⁵⁾ A. H. Gibson: On the steady flow of an incompressible viscous fluid through a circular tube with uniformly converging boundaries. Phil. Mag. (6) 18 (1909), p. 35.

⁶⁾ A. H. Gibson und H. Grindley: On the frictional resistance of the flow of air through a pipe. Proc. R. Soc. London 80 (1908), p. 114. — —: On the flow of water through pipes and passages, Proc. R. Soc. (83) 1910, p. 366. — —: On the resistance to flow of water through diverging boundaries. Trans. R. Soc. Edinburgh 48 (1913), p. 87.

⁷⁾ G. Hamel: Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten, Zeitschr. d. deutschen Math. Ver. XXV (1916), p. 34.

Endlich seien noch einige theoretische Fragestellungen genannt, die dem Reynoldsschen bzw. Couetteschen Fall verwandte Strömungsformen, aber unter anderen physikalischen Bedingungen, behandeln. L. Hopf¹⁾ behandelt, von der Vorstellung ausgehend, daß die Turbulenzschwingung den Zusammenhang der Flüssigkeit an der Wand lockere, den Grenzfall der Flüssigkeitsströmung zwischen nachgiebigen Wänden, für den also nicht die normale Geschwindigkeitskomponente an der Wand, wohl aber der Druck verschwindet. Für diesen Grenzfall ergibt die Methode der kleinen Schwingungen schon bei kleiner Reynoldsscher Zahl Labilität. Für das eigentliche Turbulenzproblem scheint mir diese Fragestellung nicht in Betracht zu kommen. Wir haben ja gesehen, daß, im Sinne der kleinen Schwingungen, auch die genaueren Experimente keine Labilität ergeben. Außerdem zeigt eine weitere Verfolgung des Hopfschen Ansatzes, daß er nur bei sehr geringem Elastizitätsmodul der Wände zu Abweichungen von den früher erwähnten Resultaten führt, während die den Versuchen zugrunde gelegten Wandungen praktisch als starr angesehen werden müssen. Auch in den vielfach erwähnten Arbeiten von Orr²⁾ finden sich ähnliche Randbedingungen behandelt. Einen neuen Gesichtspunkt in der Turbulenzfrage hat L. V. King³⁾ durch die Berücksichtigung der Kompressibilität der Flüssigkeit und der damit verbundenen Schallwellen herangezogen. Doch scheinen seine Ausführungen, die sich auf Beobachtungen im laminaren und turbulenten Gebiet stützen, noch wenig geklärt und erfordern jedenfalls zunächst genauere theoretische Durcharbeitung.

33

Die Differenzengleichungen und ihre Anwendung in der Technik.

Von G. WALLENBERG in Berlin-Wilmersdorf.

Vortrag, gehalten am 26. Januar 1920 im Ausschuß für technische Mechanik des Berliner Bezirksvereines deutscher Ingenieure.

Ein altes lateinisches Sprichwort sagt: »Natura non facit saltus« (Die Natur macht keine Sprünge). Dieses Sprichwort hat heute keine Geltung mehr: In der Physik ist in neuerer Zeit eine entschiedene Tendenz zum Diskontinuierlichen hervorgetreten — ich erinnere nur an die Elektronentheorie, die Plancksche Quantenhypothese und die Bornsche Theorie des Raumgitters —, eine Tendenz, die wegen ihrer Fruchtbarkeit und der bereits erzielten Erfolge wahrscheinlich auch nicht so bald wieder daraus verschwinden wird. Was bedeutet das für uns Mathematiker? Nicht mehr und nicht weniger, als daß die Differentialgleichungen nicht mehr ausreichen, um den Verlauf aller Erscheinungen zu beschreiben, sondern daß man zu den Differenzengleichungen seine Zuflucht nehmen muß. In der Tat mehren sich die Fälle, daß Physiker und in noch höherem Grade Techniker bei der mathematischen Behandlung der ihnen entgegentretenden Probleme auf Differenzengleichungen stoßen. Der bekannte Brückenbauer und Statiker Müller-Breslau an unserer Technischen Hochschule und seine Schüler rechnen schon seit Jahren mit Differenzengleichungen; die Clapeyronsche Gleichung für die Stützmomente des durchlaufenden Trägers ist, wie wir sehen werden, nichts anderes als eine Differenzengleichung.

Ferner nenne ich A. Russel, Phil. magaz. Bd. 11 (1906): es handelt sich da um das elektrische Feld zwischen zwei Kugeln; M. Pupin, Transactions of Amer. Inst. of El. Eng. 1900, S. 245 (Theorie der Pupinleitung; vergl. auch Breisig, E. T. Z. 1909, S. 462); F. Emde, Elektrot. u. Maschinenbau, Wien 1906, S. 945, § 20 (Berechnung von Drehmagneten für vorgeschriebenes Drehmoment); R. Rüdenberg, Elektrot. Zeitschr. 1914, S. 412 (Spannungsverteilung an Kettenisolatoren); K. W. Wagner, ehenda, Heft 23, 24, 25 (Induktionswirkungen von Wanderwellen in Nachharleitungen), Arch. für Elektrotechn. III (1915) (Theorie des Kettenleiters nebst Anwendungen) und Arch. für Elektrotechn. VI (1918), S. 301ff. (Wanderwellen-Schwingungen in Transformatorwicklungen) und endlich mehrere Abhandlungen von W. Rogowski in dem von ihm herausgegebenen Arch. für Elektrotechn. VI (1918) und VII (1919) über Spulen und Wanderwellen.

¹⁾ Zur Theorie der Turbulenz, Ann. d. Physik 56 (1919), p. 538.

²⁾ I. c. S. 129³⁾. v. B. II. Artikel 12.

³⁾ Turbulent flow in Pipes and Channels: Philos. Magazine 16, 32 (1916) p. 322.