Il concetto di lunghezza e la retta.

(Di RODOLFO BETTAZZI, a Torino.)

Il concetto di lunghezza si suole ordinariamente far dipendere da quelli di retta e di segmento: è scopo del presente articolo il dimostrare come possa stabilirsi anche indipendentemente da essi. Si verrà così a rendere legittima la nota definizione di segmento come « linea di minor lunghezza fra due « punti » la quale altrimenti, col ricorrere all'idea di lunghezza fondata su quella di retta, si aggira in un circolo vizioso.

È necessario avvertire che, per quello che segue, immagino già stabiliti con la dovuta esattezza i concetti di solido, di superficie, di linea, di punto con tutte le relative proprietà fondamentali, che io qui non credo dovere svolgere per non dilungarmi troppo e non eccedere in quello che non è strettamente argomento del presente lavoro. Per i concetti e le definizioni di solido, superficie ecc., rimando a quanto ho enunciato nel mio articolo: *I postulati e gli enti geometrici* (*) ed alla Nota 1.^a in fine del presente lavoro; per le proprietà che di essi occorrerà applicare risparmierò ogni dimostrazione, indicando col segno (G) il momento in cui se ne farà uso. Se tali proprietà non enuncerò esplicitamente nel testo, citerò in apposite note in fine del lavoro quali esse siano, senza preoccuparmi se sono da ammettersi come postulati o da dimostrarsi come teoremi poichè ciò è indifferente per lo scopo che mi propongo, ma ritenendole come fatti geometrici indispensabili in ogni trattato di geometria.

Il numero notevole di postulati che introduco non rechi nessuna meraviglia, poichè è stata mia cura il cercare di enunciare i fatti (analoghi o corrispondenti a quelli della realtà) di cui si fa uso nelle dimostrazioni e dei quali spesso ci si serve inavvertentemente; essendo necessità che la geo-

(*) *Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario*. Anno 1.^o

metria adopri ragionamenti nei quali neppure un'idea sia nascosta, come scienza logica in cui si devono solo dedurre conseguenze da premesse dopo avere enunciate queste tutte e chiaramente. Mi sono studiato di dimostrare il più che per me si poteva, persuaso della necessità di ridurre minimo il numero delle verità arbitrarie (postulati); ma quello che non ho saputo provare ho dato chiaramente come postulato, senza escludere con ciò che altri possa dimostrarlo. Del resto, vari dei miei postulati si trovano dati come tali anche in pregevolissime opere, per es.: in quelle di geometria del PASCH (*) e del PEANO (**).

Osservazione. — Alcune note che si vedranno a piè di pagina non sono necessario completamento del testo, ma ne costituiscono semplici e non indispensabili dilucidazioni: e non vi sono inserite, perchè si parla spesso in esse di enti non ancora definiti o non definiti mai nel presente scritto, ma ai quali si ricorre perchè il loro concetto, certamente noto al lettore supposto non digiuno di studi geometrici, faccia meglio afferrare e giudicare il metodo seguito in questo lavoro.

§ 1. Le sfere e l'apertura delle linee.

1. **Definizione 1.^a** — « Una linea si dirà *tratto* se ha due estremi; *ramo* « se ha un estremo solo; *linea chiusa* se, essendo illimitata, si può spezzare in « due tratti; *linea aperta* se, essendo illimitata, si può spezzare in due rami. »

Parlando in quello che segue di linee senz'altro aggiungere, intenderemo linee non intrecciate, che siano o tratti o linee chiuse.

Def. 2.^a — « Una superficie σ che divide lo spazio in due parti si dirà « *chiusa*, quando l'una o l'altra di queste parti sia tale che in ciascun suo « punto posto l'estremo di un ramo qualunque r e prese le infinite posizioni « di r , ciascuna di queste abbia punti anche nell'altra parte dello spazio. La « parte in quelle condizioni si dirà *interna* a σ , e si diranno interni a σ i « suoi punti. »

2. Una coppia di punti dati è una figura: la mancanza di un ente che colleghi i due punti non toglie niente alla invariabilità di tale figura, e possiamo pensare che questa si muova comunque. Se di una coppia di punti

(*) PASCH, *Vorlesungen über neuere Geometrie*. Leipzig, 1882.

(**) PEANO, *I principii di Geometria logicamente esposti*. Torino, 1889.

se ne tenga fermo uno, l'altro può assumere infinite posizioni: il seguente postulato fissa la natura dell'ente da esso generato.

Postulato I. — *Il luogo geometrico delle posizioni di un punto di una coppia il quale si muove mentre l'altro sta fermo, è una superficie chiusa a cui il punto immobile è interno.*

Def. — « La superficie precedente si dice *superficie sferica*; il punto « fisso, *centro*; una qualunque delle posizioni delle coppie di punti dati, *coppia* « *radiale*; ogni tratto cogli estremi nei due punti di una coppia radiale, *linea* « *radiale*; quella delle due parti in cui è diviso lo spazio la quale contiene « il centro, *sfera*. »

Cor. 1.° — Poichè una coppia di punti è rovesciabile (G) si ha che le due sfere originate da una coppia di punti prendendo per centro l'uno o l'altro di essi sono uguali.

Cor. 2.° — Il luogo geometrico delle posizioni di un estremo di un tratto, quando l'altro estremo è immobile ed il tratto assume tutte le posizioni possibili, è una superficie sferica di cui quella linea è radiale.

Cor. 3.° — Due superficie sferiche concentriche distinte non hanno punti comuni; quindi, date due superficie sferiche concentriche, ciascuna giace tutta da una parte dell'altra, (G) (*).

Cor. 4.° — I postulati ordinari sui solidi (G) (**) ed il Corollario precedente ci permettono di concludere che se due sfere rese concentriche non coincidono, una è parte dell'altra. In tal caso, se S_1 è la sfera parte di S_2 , deve la superficie σ_2 di S_2 giacere rispetto a quella σ_1 di S_1 da parte opposta del centro comune: altrimenti sarebbe σ_2 interna ad S_1 e S_2 parte di S_1 , mentre invece è S_1 parte di S_2 (G) (***).

Cor. 5.° — Date due sfere S_1 ed S_2 accade necessariamente uno ed uno solo dei tre casi: S_1 uguale ad S_2 , S_1 parte di S_2 , S_2 parte di S_1 .

Se dunque usiamo le parole « uguale » « maggiore » e « minore » nel senso consueto facendovi corrispondere i consueti segni $=$, $>$, $<$, può dirsi che date due sfere S_1 ed S_2 , avviene necessariamente uno ed uno solo dei tre casi $S_1 \overline{=} S_2$.

Cor. 6.° — Data una sfera, esistono sempre sfere maggiori e sfere minori di essa.

(*) Vedi Nota 2.^a in fine di questo scritto.

(**) Vedi Nota 3.^a in fine.

(***) Vedi Nota 4.^a in fine.

3. Se dato un tratto t si fa rotare attorno ad uno dei suoi estremi, esso genera coll'altro estremo una superficie sferica di cui è linea radiale (2, Cor. 2.^o).

Def. 1.^a — « La sfera descritta da un tratto come linea radiale si dirà *sfera di apertura* del tratto. »

Cor. 1.^o — La sfera di apertura di un tratto si ottiene indifferentemente tenendo fermo l'uno o l'altro estremo.

Def. 2.^a — « Data una linea chiusa diremo che essa ha una *sfera di apertura nulla*: e questa sfera diremo *uguale* a quella delle altre linee chiuse e *minore* di quelle di qualunque tratto.

Def. 3.^a — « Date due linee l_1 ed l_2 diremo che l'*apertura* di l_1 è *uguale*, *maggiore* o *minore* di quella di l_2 , secondochè la sfera di apertura di l_1 è uguale, maggiore o minore di quella di l_2 . »

Cor. 2.^o — Le linee chiuse sono quelle di apertura minima.

Def. 4.^a — « Date infinite linee λ ed un'altra l , diremo che le aperture *delle λ possono differire da quelle di l tanto poco quanto si vuole*, quando considerate le sfere di apertura delle λ e di l , qualunque siano le sfere S_1 ed S_2 prese una maggiore ed una minore di quella di apertura di l , esiste sempre la sfera di apertura di qualche λ che è minore di S_1 e maggiore di S_2 . S'intende che se l è di apertura nulla, la sfera da considerarsi è una sola, la S_1 . »

§ 2. Sistemi chiusi di linee.

4. **Def. 1.^a** — « Diremo *gruppo di linee* una figura formata da un numero finito di tratti $l_1, l_2, \dots, l_n$, tali che ciascuno abbia comune un estremo col precedente ed uno col seguente, ed il primo non necessariamente con l'ultimo, e che del resto non abbiano nessun altro punto comune fra loro. »

Un gruppo di linee è una linea, che è un tratto se l_1 ed l_2 non hanno un estremo comune, ed una linea chiusa nel caso opposto (G) (*).

Def. 2.^a — « Data una linea, se per mezzo di punti la si scompone in un numero finito di tratti e con questi si forma un gruppo qualunque (Def. 1.^a), questo gruppo è una linea che diremo *linea di spezzamento* della linea data. »

Una linea ha infinite linee di spezzamento, sia per gli infiniti modi in

(*) Vedi Nota 5.^a in fine.

cui si può dividere in parti, sia per le infinite posizioni che nei gruppi si possono dare a queste parti.

COR. — Se l_1 è linea di spezzamento di l , sarà l linea di spezzamento di l_1 .

5. Def. — « Diremo *gruppo lineare di solidi* il solido formato da un « numero finito di solidi $S_1, S_2, \dots, S_n$, quando ciascuno di questi ha comune « una parte di superficie col precedente ed un'altra col seguente, ed il primo « e l'ultimo hanno o no parti di superficie comune, senza che i solidi abbiano, « oltre questi, nessun altro punto comune fra loro. »

6. Def. 1.^a — « Dato un sistema Σ composto di una linea l e di tutte « le sue linee di spezzamento, un'altra linea l' si dirà *generata* di l , quando « per ogni solido arbitrariamente scelto S sia possibile costruire un gruppo « lineare formato con solidi $S_1, S_2, \dots, S_n$ uguali ad S od a sue parti, tale « che interne al solido così risultante possano disporsi l' ed una conveniente « linea λ di Σ , in modo che: 1.^o su ogni solido S , non giaccia che un solo « tratto tanto di l' quanto di λ ; 2.^o le aperture di tutte queste λ possano « differire da quella di l' tanto poco quanto si vuole (3, Def. 4.^a). »

Def. 2.^a — « Data una linea l , se si costruiscono tutte le sue linee di « spezzamento e tutte le sue linee generate, si ottiene un altro sistema di linee « che si dirà *sistema derivato* di l . »

COR. 1.^o — Se l_1 è linea di spezzamento di l , il sistema derivato di l_1 è lo stesso sistema derivato di l (4, Cor.).

È opportuno completare questo corollario col

Postulato II. — Dato il sistema derivato di una linea l , ed una qualunque delle altre sue linee, λ (sia questa di spezzamento di l o generata), il sistema derivato di λ è quello stesso di l .

Def. 3.^a — « Ogni sistema derivato di qualche linea si dirà *sistema chiuso* « di linee. »

COR. 2.^o — Se due sistemi chiusi di linee hanno una linea comune, essi sono identici (Post. II): e quindi due sistemi non identici non possono avere nessuna linea comune.

COR. 3.^o — Se in due sistemi chiusi di linee si ha che una linea dell'uno non è nell'altro, i due sistemi non possono avere linee comuni.

7. Def. 1.^a — « Se le linee di un sistema chiuso si trasportano in modo « da avere tutte un estremo (se sono tratti) o un punto qualunque (se sono « chiuse) in uno stesso punto dato ad arbitrio O , si dirà che si ha il *fascio* « delle linee del sistema col *centro* O : e l'insieme di tutte le sfere di aper-

« tura in questa posizione (allora concentriche) si dirà il *fascio* delle sfere « stesse. »

COR. 1.^o — Descritto il fascio delle sfere di apertura del sistema derivato di una linea l , se l_1 è una generata del sistema di l e delle sue linee di spezzamento e si considera la sua sfera di apertura, fra due sfere qualunque concentriche ad essa, una maggiore ed una minore di essa, si trovano infinite sfere di apertura di linee di spezzamento di l , giacchè l_1 essendo loro generata le aperture di esse possono differire da quella di l_1 poco quanto si vuole (6, Def. 1.^a).

— Dato il fascio delle sfere di apertura di un sistema, deve necessariamente accadere uno di questi due casi: o esiste una sfera concentrica ad esse (con tutte le infinite maggiori di essa) a cui nessuna delle sfere di apertura abbia punti esterni, o tale sfera non esiste.

Osservazione. — Vedremo in seguito (§ 5) che effettivamente può darsi l'un caso e l'altro.

Def. 2.^a — « Diremo sistemi *finiti* quei sistemi di linee chiusi tali che, « costruito il fascio delle loro sfere di apertura, esistono sfere concentriche ad « esse cui tutte le sfere di apertura sono interne: ed *infiniti* gli altri. »

Postulato III. — Se l è una linea di un sistema finito ed l_1 è una sua parte, l ed l_1 non fanno parte di uno stesso sistema (*): e ciascuna linea del sistema derivato di l_1 è parte di convenienti linee del sistema derivato di l .

COR. 2.^o — Esistono infiniti sistemi chiusi non identici, per es.: quelli derivati di una linea l di un sistema finito, di una sua parte qualunque l_1 , di una parte l_2 di l_1 ecc.

COR. 3.^o — Una parte l_1 di una linea l di un sistema finito non può essere uguale ad l , non potendo appartenere al suo sistema derivato.

Postulato IV. — Se l_1 ed l_2 sono tratti di sistemi finiti, sarà finito il sistema derivato di una linea che sia un gruppo qualunque di l_1 ed l_2 .

COR. 4.^o — La proprietà vale anche per un numero qualunque (finito) di tratti.

Postulato V. — Dati due sistemi finiti non identici, in uno di essi esiste una linea l_1 parte di una l_2 dell'altro.

(*) Questa parte del postulato è destinata ad introdurre per il concetto di lunghezza che si sta svolgendo la proprietà che si suole sempre ammettere per gli enti finiti, quella che la parte non è equivalente al tutto. (Cfr. n.^o 9, Cor. 2.^o)

COR. 5.^o — Per il Postulato precedente ed il Post. III si conclude che dati due sistemi finiti non identici tutte le linee di uno di essi sono parti di convenienti linee dell'altro.

8. **Def. 1.^a** — « Data una classe Γ di enti nella quale siano definiti i « concetti di uguale, maggiore e minore, uno degli enti di essa, γ , si dirà « *limite superiore* di uno speciale sistema Γ' formato con alcuni di essi, o con « tutti, quando, appartenendo γ o no a Γ' , nessun ente di Γ' è maggiore di γ , « e per qualunque ente di Γ minore di γ ne esistono uno o più maggiori in Γ' . »

Postulato VI. — *Per ogni sistema finito di linee esiste una sfera limite superiore di tutte le sfere di apertura delle linee del sistema, che è differente per sistemi differenti.*

Def. 2.^a — « La sfera limite superiore delle sfere di apertura delle linee « di un sistema finito si dirà *sfera limitatrice* del sistema. »

COR. 1.^o — Se si considera il fascio delle sfere di apertura delle linee di un sistema finito e si dispone concentrica ad esso la sfera limitatrice, nessuna sfera di apertura ha punti esterni a questa, ma vi è qualche sfera di apertura che ha la superficie esterna ad una sfera concentrica alla sfera limitatrice e parte di essa, ma del resto qualunque.

COR. 2.^o — Se la sfera limitatrice è una delle sfere di apertura del sistema, ogni linea del sistema che sia sua radiale ha l'apertura massima fra quelle del sistema.

COR. 3.^o — Sistemi di linee identici hanno la stessa sfera limitatrice e reciprocamente.

Teorema 1.^o — « Costruito un fascio delle linee di un sistema finito, « ciascuna in tutte le posizioni possibili, e posta col centro nel centro del « fascio la sfera limitatrice del sistema, tutte le linee del fascio hanno punti « non esterni a questa sfera. »

Il teorema è chiaro per i punti estremi di queste linee, giacchè essi giacciono sulla superficie delle rispettive sfere di apertura, delle quali nessuna ha punti esterni alla sfera limitatrice $\mathcal{S}$. Se poi si considera un punto P non estremo di una linea l , esso pure dev'essere interno ad $\mathcal{S}$. Infatti P , o da solo o col centro, divide l in due parti l_1 ed l_2 che sono due tratti, uno l_1 cogli estremi P ed O , un altro l_2 cogli stessi estremi se l è chiusa o cogli estremi P ed O' se l è un tratto OO' . Col centro in P e colla linea radiale l_2 descrivo una superficie sferica (2, Cor. 2.^o), la quale dovrà non aver punti

esterni ad $\mathbf{S}$: altrimenti, se O' fosse un punto di essa esterno ad $\mathbf{S}$, e PO' la corrispondente posizione della radiale l_2 , il gruppo di OP e PO' sarebbe una linea di spezzamento di l , e quindi farebbe parte del sistema, talchè una sfera di apertura dovrebbe passare per O' ed essere quindi in parte esterna alla sfera limitatrice $\mathbf{S}$, contro il Corollario 1.°. Avendosi che la superficie della sfera di centro P e di radiale l_2 è non esterna a $\mathbf{S}$, saranno interni i suoi punti ($\mathbf{G}$) e quindi il suo centro: e perciò P , punto scelto comunque su l , è interno, c. d. d.

Teorema 2.° — « Se l è una linea di un sistema finito ed l_1 è una « sua parte, anche il sistema derivato di l_1 è finito: e la sfera limitatrice del « secondo sistema è minore di quella del primo. »

Infatti, se resi concentrici i fasci dei sistemi di l ed l_1 un punto di una linea l'_1 del secondo fosse esterno alla sfera limitatrice $\mathbf{S}$ del primo, poichè (Post. III) l'_1 è parte di una linea conveniente l' del sistema di l , anche qualche linea di tal sistema avrebbe un punto esterno ad $\mathbf{S}$ contro il Teor. 1.°. Tutte le sfere di apertura del sistema di l_1 sono dunque senza punti esterni ad $\mathbf{S}$, ed il sistema di l_1 è perciò finito (7, Def. 2.^a) e la sua sfera limitatrice è $\mathbf{S}$ o una sfera minore (8, Def. 2.^a). E siccome tale sfera non può essere $\mathbf{S}$ a causa del Post. V, non essendo l_1 appartenente al sistema derivato di l , come sua parte (Post. III) sarà minore di $\mathbf{S}$, c. d. d.,

COR. 4.° — Se una linea l di sistema finito è formata dal gruppo di due tratti l_1 ed l_2 , sarà la sfera limitatrice di l maggiore di quelle di l_1 ed l_2 .

§ 3. Le linee equivalenti e la lunghezza.

9. Def. — « Due linee l_1 ed l_2 di sistemi finiti si dirà che sono *equivalenti* o *non equivalenti* od anche che hanno *uguale* o *disuguale lunghezza*, secondochè appartengono o no ad uno stesso sistema chiuso. »

Osservazione. — Per indicare i casi precedenti scriveremo rispettivamente $\overline{l_1} = \overline{l_2}$, $\overline{l_1} \neq \overline{l_2}$.

COR. 1.° — Date due linee l_1 ed l_2 di sistemi finiti avviene necessariamente uno ed uno solo di questi due casi: o hanno uguale lunghezza, o l'hanno disuguale.

COR. 2.° — Se l è una linea di un sistema finito ed l_1 è una sua parte, si ha $\overline{l} = \overline{l_1}$ (Post. III).

10. **Def.** — « Si dirà che la lunghezza di una linea l è equivalente « alla somma delle lunghezze di altre due linee date l_1 ed l_2 , quando, sup-
« posti finiti i sistemi derivati di l , di l_1 e di l_2 , vi sia nel primo una linea
« composta di due parti equivalenti ad l_1 ed l_2 . »

Osservazione. — Per indicare il caso precedente si scriverà $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2$.

Cor. — Date due linee l_1 ed l_2 di sistemi finiti, esistono infinite linee (tutte quelle di un sistema chiuso) la cui lunghezza è equivalente alla somma delle lunghezze di l_1 ed l_2 : giacchè basta fare il sistema derivato della linea formata da un gruppo composto di l_1 ed l_2 , o dei tratti loro parti (per il caso che l_1 ed l_2 siano linee chiuse) il quale è finito (Post. IV — 7, Cor. 4.^o).

11. Dati due sistemi finiti non identici, se $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ sono le loro sfere limitatrici, avviene sempre uno ed uno solo di questi due casi: $\mathbf{S}_1$ [necessariamente (Post. VI) differente da $\mathbf{S}_2$] è parte di $\mathbf{S}_2$, o $\mathbf{S}_2$ è parte di $\mathbf{S}_1$ (2, Cor. 5.^o).

Def. — « Dati due sistemi chiusi di linee finiti e non identici, secon-
« dochè la sfera limitatrice del secondo è parte di quella del primo, o questa
« dell'altra, diremo che le linee del primo sono *prevalenti* o *survalenti* a
« quelle del secondo, oppure anche che le prime hanno *lunghezza maggiore*
« o *minore* delle seconde.

« Ogni linea di sistema finito si dirà che ha minor lunghezza di ogni
« linea di un sistema infinito. »

Osservazione. — Per indicare i casi precedenti rispetto alle linee l_1 , l_2 scriveremo $\bar{l}_1 > \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 < \bar{l}_2$.

Cor. 1.^o — Date due linee l_1 , l_2 di sistemi finiti avviene necessariamente uno ed uno solo dei tre casi $\bar{l}_1 = \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 > \bar{l}_2$, $\bar{l}_1 < \bar{l}_2$.

Cor. 2.^o — Se l_1 è parte di l , sarà $\bar{l}_1 < \bar{l}$ (8, Teor. 2.^o).

Cor. 3.^o — Data una linea di sistema finito ne esistono infinite altre di lunghezza minore della sua; per es.: le sue parti.

Cor. 4.^o — Se $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}_2$, sarà $\bar{l} > l_1$, $\bar{l} > l_2$, giacchè essendo (10, Def.) una delle linee equivalenti ad l composta di due parti equivalenti ad l_1 ed l_2 , sarà la sfera limitatrice di l maggiore di quelle di l_1 e di l_2 (8, Cor. 4.^o).

Cor. 5.^o — Se una linea l è prevalente ad un'altra l_1 , sarà l_1 uguale ad una parte l' di una linea equivalente ad l . Ed infatti, i sistemi derivati di l ed l_1 non essendo identici, saranno (7, Cor. 5.^o) tutte le linee dell'uno parti di convenienti linee dell'altro. E non potendo essere quelle del sistema di l parti di quelle dell'altro, altrimenti sarebbe (Cor. 2.^o) $\bar{l} < \bar{l}_1$, contro l'ipo-

tesi, dovranno essere quelle del sistema di l_1 parti di quelle del sistema di l . In particolare sarà l_1 uguale ad una parte di una linea equivalente ad l .

12. Se $\bar{l}_1 < \bar{l}$, ed è l' la linea equivalente ad l della quale l_1 è parte (11, Cor. 5.^o), indicando con l'_1 uno qualunque dei gruppi ottenuti dalle parti che restano in l' toltovi l_1 , sarà (10, Def.) $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}'_1$ e quindi (ivi) $\bar{l} = \bar{l}_1 + \bar{l}'_1$.

Def. — « Date due linee l , l_1 di cui l_1 sia suvvalente ad l , diremo che « la lunghezza di una linea l'_1 è equivalente alla *differenza* fra quelle di l « ed l_1 , quando la lunghezza di l sia la somma di quelle di l_1 ed l'_1 . »

Osservazione. — Per indicare il caso precedente scriveremo $\bar{l}'_1 = \bar{l} - \bar{l}_1$.

Cor. — Date due linee l ed l_1 , tali che $\bar{l}_1 < \bar{l}$, esistono sempre linee l'_1 la cui lunghezza $\bar{l}'_1$ è la differenza $\bar{l} - \bar{l}_1$ fra quelle di l o di l_1 .

13. Se ad ogni linea che appartenga a sistemi finiti si fa corrispondere un ente che si dica la sua *lunghezza* ed a questo ente si attribuiscono le proprietà ora sviluppate per le linee corrispondenti riguardo ai concetti di equivalenza, prevalenza, suvvalenza, somma e differenza, si ha che le lunghezze delle linee appartenenti a sistemi finiti sono grandezze le quali costituiscono una classe rispetto all'operazione somma, classe che è ad una dimensione, ad un senso, illimitata e propria (*).

Il concetto di lunghezza è così pienamente stabilito.

§ 4. Il segmento come linea di lunghezza minima.

14. Passiamo a vedere come, introdotta la lunghezza, debba essa usarsi per dare del segmento una definizione rigorosa, nel senso già citato nell'introduzione.

Postulato VII. — *Fra tutti i tratti cogli stessi due estremi, ne esiste uno di un sistema finito ed uno solo che ha la lunghezza minima di fronte agli altri.*

Def. 1.^a — « La linea di lunghezza minima fra tutte quelle cogli estremi « in due punti si dice *segmento*. »

Def. 2.^a — « Nella sfera di apertura di un segmento, il segmento stesso, « che ne è linea radiale, si dice suo *raggio*. »

(*) Vedi la mia *Teoria delle Grandezze*. Pisa, 1890, §§ 3, 16, 21, 28, 30, 31.

COR. 1.° — Un sistema di cui fa parte un segmento, cioè (Post. II) il sistema derivato di un segmento, è finito. L'esistenza di sistemi finiti è ora dunque una verità (*).

COR. 2.° — Una parte di un segmento non è uguale nè equivalente al segmento stesso (7, Cor. 3.° — 9, Cor. 2.°).

Teorema 1.° — « Per due punti come estremi passa un segmento ed « uno solo. »

È conseguenza immediata del Post. VII.

Osservazione. — Indicheremo il segmento di estremi A e B con AB .

Teorema 2.° — « Se due segmenti sono raggi di una stessa sfera di « apertura sono uguali. »

Infatti, se essi sono OA , OB , poichè la superficie della sfera di apertura è il luogo geometrico delle posizioni di un estremo quando l'altro estremo è fisso, sarà B estremo di una posizione di A , e quindi per O e B passerà un segmento uguale ad OA ; per il Teor. 1.° questo segmento è OB , e quindi OA ed OB sono uguali.

COR. 3.° — Due segmenti disuguali hanno disuguale sfera di apertura.

15. **Teorema 1.°** — « Le due parti in cui un segmento AB è di- « viso (**) da un punto C che non ne sia un estremo, sono segmenti. »

Infatti, se per es.: la parte CA non fosse un segmento, sostituendola col segmento CA , che è di minor lunghezza, insieme all'altra parte CB darebbe un gruppo cogli estremi in A e B e di lunghezza minore di AB , il che non può essere.

(*) Possiamo facilmente dare un esempio di un sistema infinito. Sopra una direzione AB si stacchino a partire dall'estremo A segmenti AA_1 , AA_2 , AA_3 , ... AA_n , ... di lunghezze rispettive a , $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{3}$, ... $\frac{a}{n}$, ...; nei punti A_r si inalzino segmenti $A_rA'_r$ perpendicolari ad AB , di lunghezza $\frac{a}{r}$, e si congiungano le coppie di punti A'_r , A_{r+1} . Risulta una linea $A_1A'_1A_2A'_2A_3A'_3$, ... composta di infiniti tratti, con un punto limite A , che fa da estremo, la quale quindi è da considerarsi come un tratto coi due estremi A_1 , A . La linea ha lunghezza maggiore della somma dei segmenti $A_rA'_r$, cioè maggiore di $\frac{a}{1} + \frac{a}{2} + \frac{a}{3} + \dots + \frac{a_r}{n} + \dots$, e quindi non finita, giacchè la serie $\sum \frac{1}{n}$ è divergente. Il sistema derivato della linea in questione è chiaro che non è finito. Si può discutere se figure come quelle qui usate siano da dirsi linee; ma mi pare che, comunque, almeno con un postulato speciale, si possa dar sempre loro questo nome.

(**) Vedi Nota 6.^a in fine.

COR. 1.^o — Se B è un punto di un segmento AC , C non è su AB : giacchè altrimenti AC sarebbe parte di AB , e quindi di AC , cioè AC uguale ad una sua parte, contro il Cor. 2.^o del n.^o 14.

Teorema 2.^o — « Di due segmenti disuguali, uno (quello la cui sfera « di apertura è minore) è uguale ad una parte dell'altro. »

Infatti si pongano i segmenti dati s_1 ed s_2 con un estremo comune O , e se ne descrivano le sfere di apertura $\mathbf{S}_1$ ed $\mathbf{S}_2$ col centro in O . Se si ha $\mathbf{S}_1 > \mathbf{S}_2$, la superficie di $\mathbf{S}_1$ è esterna ad $\mathbf{S}_2$, e quindi i suoi punti sono da parte opposta del centro rispetto alla superficie di $\mathbf{S}_2$. Se P è uno di essi, il segmento OP , raggio di $\mathbf{S}_1$ e quindi uguale ad s_1 , incontra la superficie di $\mathbf{S}_2$ almeno in un punto ($\mathbf{G}$) (*) per es.: C , il quale divide OP in due segmenti parti di OP (Teor. 1.^o). Una di esse, OC , sarà raggio di $\mathbf{S}_2$ e quindi uguale ad s_2 : si conclude che s_2 è uguale ad una parte di s_1 .

Postulato VIII. — *Se due segmenti uguali hanno a comune un estremo ed un altro punto essi coincidono (**).*

Teorema 3.^o — « Se due segmenti AC , AB con un estremo comune A hanno comune un altro punto B , uno di essi ha il suo estremo « sull'altro (e quindi coincide o con esso o con una sua parte: 14, Teor. 1.^o — « 15, Teor. 1.^o). »

Infatti, condotte le due sfere di apertura col centro in A , o esse coincidono ed i segmenti sono uguali (14, Teor. 2.^o) ed il Post. VIII dimostra il teorema — o non coincidono, e quella minore, sia per es.: quella di AC , incontrerà colla sua superficie il segmento AD raggio dell'altra (che va ad un punto esterno ad essa) in un punto D' , ed allora AD' ed AC sono segmenti raggi di una stessa sfera di apertura e perciò uguali, che avendo B comune, per quanto si è già detto, coincidono, talchè C è un punto D' di AD . Così il teorema è dimostrato.

16. **Teorema 1.^o** — « Se un segmento AB ha immobili gli estremi, « ha tutti i punti immobili. »

Infatti, poichè intanto fra due punti passa un solo segmento, i punti di

(*) Vedi Nota 7.^a in fine.

(**) Questa appare verità indipendente dal Post. VII e sue conseguenze: giacchè se due segmenti AC , AD hanno un punto B comune, il Post. VII conduce a concludere che il segmento AB , parte di AC e di AD è comune ad entrambi, ma nulla dice circa le parti restanti BC e BD . Anche il PASCH (loco cit.) ammette qualcosa di simile nel suo Assioma VII, che corrisponde al mio Teor. 3.^o.

AB possono al più scorrere sul segmento stesso: se dunque un punto C di AB si muova, dovrà andare su un altro punto C' di AB . Ora C divide AB nei segmenti AC , CB (15, Teor. 1.^o) in uno dei quali, per es. in AC , dovrà essere C' , talchè AC' è parte di AC . Ma nel moto le figure non si alterano, per cui AC , che si cambia in AC' , dovrebbe essere uguale ad AC' , contro il Cor. 2.^o del n.^o 14.

Teorema 2.^o — « Se un segmento AB ha immobili due punti, anche « non estremi, C e D , ha tutti i punti immobili. »

Premettiamo che C divide AB in due parti, in una delle quali è D : sia D in AC . Se A e B movendosi vanno in A' e B' , andrà AC in $A'C$, e D , che è di AC ed è immobile, sarà anche di $A'C$: talchè AC ed $A'C$, avendo a comune un estremo C ed un punto D , o saranno una parte dell'altro, o coincideranno (15, Teor. 3.^o). Non accadendo il primo caso, perchè AC ed $A'C$ sono uguali essendo A' la nuova posizione di A , dovrà A' cadere in A . Allora sono uguali AB' ed AB , e, avendo, un punto comune C (e D) oltre l'estremo A , per lo stesso motivo coincidono. Restando dunque A' in A e B' in B , il segmento avrà immobili gli estremi, e quindi (Teor. 1.^o) tutti i punti.

17. Cor. 1.^o — Due segmenti disuguali appartengono a sistemi chiusi disuguali (15, Teor. 2.^o — Post. III) ed hanno quindi disuguale lunghezza.

Cor. 2.^o — Se di un sistema finito fa parte un segmento, non vi appartengono altri segmenti che i suoi uguali (Cor. 1.^o): in altre parole due segmenti equivalenti sono uguali.

Teorema 1.^o — « Se di un sistema chiuso fa parte un segmento, il « sistema, che è finito (14, Cor. 1.^o), ha per sfera limitatrice la sfera di apertura del segmento. »

Se infatti si considera il fascio delle linee del sistema col centro in O , e σ è la superficie della sfera $\mathbf{S}$ di apertura del segmento OA del sistema, nessun punto di esse linee può cadere esterno ad $\mathbf{S}$. Giacchè se P fosse un punto di una linea l esterno ad $\mathbf{S}$, la parte OP della linea (o la linea intera se P è estremo, o una delle parti se la linea è chiusa) ha due punti da parti opposte di σ , e quindi incontra σ almeno in un punto B . La parte OB di OP ha lunghezza minore di OP (11, Cor. 2.^o) e quindi di l , e perciò il segmento OB ha lunghezza minore di l . Ma OB è una posizione di OA , ed OA è del sistema di l , e quindi $\overline{OB} = \overline{l}$. Da questo assurdo discende che tutti i punti delle linee del sistema ed in particolare quelli delle sfere di apertura, sono non esterni ad $\mathbf{S}$. Poichè $\mathbf{S}$ è una delle sfere di apertura, e tutte le altre sono interne ad essa, $\mathbf{S}$ è la sfera limitatrice.

COR. 3.^o — Il segmento è fra le linee equivalenti quella di apertura massima (8, Cor. 2.^o).

Teorema 2.^o — « Di ogni sistema finito fa parte un segmento. »

Se infatti si costruisce la sua sfera limitatrice $\mathbf{S}$ di centro O , sia OP un segmento suo raggio. Poichè OP appartiene ad un sistema finito la cui sfera limitatrice è la sfera di apertura di OP stesso (Teor. 1.^o) ed è quindi $\mathbf{S}$, il sistema dato e quello di OP hanno la stessa sfera limitatrice, e quindi sono identici (Post. VI) talchè OP fa parte del sistema dato, c. d. d.

COR. 4.^o — Sono sistemi finiti tutti e soli quelli di cui fa parte un segmento.

COR. 5.^o — Ogni linea di un sistema finito è equivalente ad un segmento e ad uno solo, che è quello del suo sistema, raggio della sua sfera limitatrice.

Def. 1.^a — « Ogni linea di un sistema finito si dirà *rettificabile* (a causa « della proprietà del Cor. 5.^o). »

Def. 2.^a — « Il segmento equivalente ad una linea rettificabile può dirsi « *lunghezza della linea*. »

Osservazione. — Colla definizione precedente le proprietà dell'ente lunghezza, dato come si è visto fin qui, relative ai concetti di grandezza, sono espresse dalle corrispondenti del segmento che lo rappresenta, come è facile a vedersi.

18. Def. — « Si dirà *spezzata* un gruppo di segmenti, e spezzata *in-
« scritta* in una linea l una spezzata coi vertici (estremi dei segmenti) punti
« di l , quando essa ed l siano o entrambe senza estremi o cogli estremi co-
« muni, in modo che se A, B sono due vertici consecutivi della spezzata,
« su uno dei tratti (o sul tratto) AB di l non cadano altri vertici della
« spezzata stessa. »

COR. 1.^o — La lunghezza di una spezzata non chiusa che non sia un segmento, è maggiore di quella del segmento cogli stessi estremi.

COR. 2.^o — La lunghezza di una spezzata inscritta in una linea l di sistema finito è minore di quella della linea l : l'apertura è uguale.

19. Def. — « Diremo *apertura* di un tratto il segmento che ha i suoi
« stessi estremi. »

Osservazione. — Si conservano così evidentemente per l'apertura, come segmento, le proprietà espresse dalle definizioni già date di aperture uguali, maggiori, minori.

COR. 1.^o — Nel segmento, ed in esso solo, l'apertura è uguale alla lunghezza: ed è il segmento stesso.

COR. 2.^o — In una linea rettificabile, che non sia il segmento, la lunghezza è maggiore dell'apertura, essendo questa un segmento minore di ogni linea coi suoi estremi, o essendo nulla.

COR. 3.^o — Dati più tratti per comporne un gruppo, fra tutti i modi possibili di disporli quello che dà una linea di maggiore apertura consiste nel disporre gli estremi dei tratti su uno stesso segmento: poichè in tal caso l'apertura è uguale alla lunghezza della spezzata inscritta nel gruppo coi vertici negli estremi dei tratti, mentre in ogni altro caso ne è minore (Cor. 2.^o).

§ 5. La retta.

20. **Postulato IX.** — « Esiste una linea aperta, tale che ogni suo tratto è un segmento, e sulla quale esistono tratti uguali a qualunque segmento arbitrariamente dato. »

Def. — « La linea precedente si dice *retta*. »

Teorema 1.^o — « Per due punti qualunque passa una retta. »

Infatti per A, B come estremi passa un segmento, AB : ora se l è una retta, qualche suo tratto sarà uguale ad AB (Post. IX) quindi si potrà muovere l in modo che uno di essi coincida con AB (G) (*) e perciò passi per A, B . — Per A e B passa dunque l , c. d. d.

Teorema 2.^o — « Se due rette hanno a comune due punti coincidenti, cioè per due punti passa una retta sola. »

Infatti siano l_1 ed l_2 due rette passanti entrambi per due punti A e B . Per A e B presi come estremi non passa che un segmento AB , comune quindi ad l_1 ed l_2 , giacchè i tratti delle rette sono segmenti. Dico che anche gli altri punti di una delle linee sono della seconda e viceversa. Poichè infatti (G) (**) i punti A e B dividono l_1 e così l_2 , nel tratto (segmento) AB e in due rami cogli estremi rispettivi A e B , sia P un punto del ramo di l_1 che ha per estremo B . Se con centro A e raggio AP si descrive la sfera, la sua superficie deve tagliare quel ramo di l_2 coll'estremo in A che contiene B , giacchè la superficie della sfera è chiusa ed A è un suo punto in-

(*) Vedi Nota 8.^a in fine.

(**) Vedi Nota 9.^a in fine.

terno e quindi questo ramo ha anche punti esterni e perciò la incontra. Se R è un punto d'incontro, AR è un segmento radiale della sfera, uguale quindi ad AP (14, Teor. 2.^o). Il punto R non è su AB , altrimenti sarebbe AR parte di AB ed anche di AP , mentre è uguale ad AP (14, Cor. 2.^a). I due segmenti AP ed AR sono uguali ed hanno comune l'estremo A ed un punto B , quindi (Post. VIII) coincidono ed è P in R , ossia P è un punto di l_2 . Potendosi dimostrare che, reciprocamente, ogni punto di l_2 , anche fuori di AB , è un punto di l_1 , si conchiude che le due rette coincidono.

COR. Due punti qualunque individuano una retta.

Teorema 3.^o — « Tutte le rette sono uguali. »

Infatti se AB è un tratto di una, l , e su un'altra l' considero uno dei suoi uguali $A'B'$, trasporto l in modo che AB coincida con $A'B'$ (G). Allora l ed l' avendo comuni due punti A, A' e B, B' coincidono (Teor. 2.^o) talchè sono uguali.

Teorema 4.^o — « Se una retta ha due punti immobili, li ha immobili tutti. »

Se infatti A e B sono questi punti e C è un punto di AB , sarà C immobile (16, Teor. 1.^o). Se C è un punto qualunque non di AB , per es.: del ramo di A che contiene B , il segmento AC ha immobili i due punti A e B che esso contiene, e quindi li ha immobili tutti (16, Teor. 2.^o); perciò C è immobile.

§ 6. Coincidenza del concetto di lunghezza con quello ordinario.

21. È facile ora dimostrare che poichè la lunghezza di una linea rettificabile è uguale al segmento che le equivale (che è il segmento raggio della sfera limitatrice del sistema derivato della linea) il concetto di lunghezza così considerato coincide con l'ordinario concetto, quando questo si definisca dicendo lunghezza di una linea il segmento limite superiore (se esiste) della lunghezza di tutte le spezzate inscritte nella linea stessa. Si può cioè dimostrare che: 1.^o data una linea rettificabile, nel senso usato in questo scritto, esiste il limite superiore della lunghezza di tutte le spezzate inscritte nella linea, ed è uguale al segmento equivalente, nel nostro senso, alla linea; 2.^o data una linea per cui esiste il segmento limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte, essa è rettificabile ed il segmento equivalente ad essa è uguale al limite superiore accennato.

1.° Se la linea l è rettificabile ed è s il segmento che le equivale, ogni spezzata s_l inscritta in essa ha lunghezza minore di quella di l (18, Cor. 2.°): quindi si ha intanto che la lunghezza di s è maggiore di quella di qualunque spezzata s_l . Per completare la dimostrazione basta provare (8, Def. 1.^a) che preso qualunque segmento s' minore di s esistono sempre delle s_l la cui lunghezza è maggiore di s' . Infatti, costruito il sistema derivato di l e il fascio delle sue sfere di apertura, delle quali la sfera limitatrice $\mathbf{S}$ ha per raggio s , per il Cor. 1.° del n.° 8 si ha che, presa la sfera concentrica di raggio s' , fra le superficie di essa e di $\mathbf{S}$ giacciono infinite superficie di sfere di apertura di linee del sistema, e quindi anche (7, Cor. 1.°) di linee di spezzamento di l . Presa una di tali linee di spezzamento, l' , la sua apertura sarà dunque maggiore di s' , e così dicasi di una qualunque spezzata inscritta in essa, la quale ha la stessa apertura: quindi la lunghezza di tale spezzata è (19, Cor. 2.°) maggiore di s' . Ma fra tali spezzate vi è quella i cui vertici cadono nei punti in cui si sono ricongiunte le parti nelle quali è stata divisa l per comporre la linea di spezzamento l' , e questa ha la stessa lunghezza della corrispondente inscritta in l : talchè fra le spezzate inscritte in l ve ne sono la cui lunghezza è maggiore di s' . Così è provato che s è il limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte in l , ed è dimostrata la prima parte del teorema.

2.° Reciprocamente. Sia l una linea per la quale si sappia esistente il limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte. Si costruiscano tutte le sue linee di spezzamento; di esse quelle di apertura massima, fra le varie corrispondenti ad uno stesso modo di spezzare l , sono le linee in cui gli estremi delle parti ricongiunte sono in linea retta (19, Cor. 3.°), e per essa l'apertura è uguale al segmento equivalente alla spezzata inscritta in l coi vertici nei punti di spezzamento. Se si considerano le aperture di tutte quelle speciali linee di spezzamento, si vengono a considerare i segmenti equivalenti a tutte le spezzate possibili inscritte in l , e reciprocamente. Per le ipotesi fatte, esisterà dunque un limite superiore delle aperture di quelle speciali linee di spezzamento, e quindi anche di tutte le linee di spezzamento, essendo le prime quelle di apertura massima. Sia s questo segmento: dopo aver descritto un fascio delle linee di spezzamento di l ed una sfera $\mathbf{S}$ concentrica al fascio e col raggio s , saranno tutte le sfere di apertura di quelle linee di spezzamento interne ad $\mathbf{S}$. Prese anche tutte le generate del sistema e condotte a far parte del fascio, nessun punto delle loro sfere di apertura sarà esterno ad $\mathbf{S}$; altrimenti poichè fra le superficie di esse e la superficie di $\mathbf{S}$ non cadono sfere di apertura di

linee di cui esse sono generate, si farebbe contro al Cor. 1.^o del n.^o 7. Si conclude che esiste una sfera **S** a cui nessuna delle sfere di apertura del sistema derivato ha punti esterni; quindi un tale sistema è finito (7, Def. 2.^a) ed l è perciò rettificabile. Per la prima parte del teorema è allora il segmento equivalente ad l uguale al limite superiore delle spezzate inscritte in l ed è quindi il segmento s .

Il teorema è così dimostrato: ed è posto in chiaro come il concetto di lunghezza svolto in questo scritto non differisca da quello ordinario, quando almeno questo si definisca nel modo accennato in principio di questo paragrafo.

22. Il prof. PEANO (*) definisce la lunghezza di una linea spezzando questa in parti, formando (sostituisco alle parole del prof. PEANO il linguaggio che ho seguito in questo lavoro) tutti i gruppi di quelle parti e prendendo il limite superiore (quando esiste) delle aperture di questi gruppi. Poichè egli stesso dimostra che la lunghezza così definita coincide col limite superiore delle lunghezze delle spezzate inscritte, è chiaro che anche il suo concetto coincide col mio.

Del resto ciò si vede direttamente, osservando che il definire la lunghezza come fa il prof. PEANO equivale a chiamare lunghezza di una linea la linea equivalente alla data e che abbia l'apertura massima; e siccome tale linea è il segmento equivalente alla linea data, è chiaro che i due concetti si equivalgono.

Appendice.

23. Le considerazioni sin qui svolte mostrano un'altra, e forse non inopportuna, definizione del segmento.

Si supponga esposto quanto si è detto nei primi tre capitoli, cioè fino al n.^o 13 inclusivo.

Postulato VII'. — « In ogni sistema finito esiste una ed una sola « linea di apertura massima. »

Def. — « Tale linea si dice *segmento*. »

COR. 1.^o — Il segmento di un sistema ha per sfera di apertura la sfera limitatrice del sistema.

(*) PEANO, *Applicazioni geometriche del Calcolo infinitesimale*. Torino 1887, pag. 161.

COR. 2.^o — Se s ed s_1 sono i segmenti di due diversi sistemi ed è $\bar{s} > \bar{s}_1$, sarà (11, Def.) la sfera limitatrice di s maggiore di quella di s_1 , e quindi (Cor. 1.^o) l'apertura di s maggiore di quella di s_1 .

Postulato VII''. — « Per due punti come estremi passa sempre un segmento. »

Teorema. — « Il segmento cogli estremi in due punti è linea di minima lunghezza fra quelle cogli stessi estremi. »

Infatti se A e B sono due punti, s è il segmento AB ed l un'altra linea di sistema finito avente per estremi A e B , avverrà uno ed uno solo dei tre casi: $\bar{s} < \bar{l}$. Non può essere $\bar{s} = \bar{l}$ avendo s ed l la stessa apertura, e dovendo invece il segmento (Def.) avere apertura maggiore delle linee equivalenti. Neppure può essere $\bar{s} > \bar{l}$, giacchè sarebbe ancora $\bar{s} > \bar{s}_1$, dove s_1 è il segmento equivalente ad l , e quindi s avrebbe apertura maggiore di quella di s_1 (Cor. 2.^o) il quale a sua volta, perchè equivalente ad l , l'avrebbe per definizione maggiore di l : e questo non può essere poichè s , che dovrebbe avere apertura maggiore di l , ha invece gli stessi estremi A e B . Si conclude che $\bar{s} < \bar{l}$, c. d. d.

Osservazione. — Si potrebbe continuare a dimostrare le altre proprietà del segmento; ma ce ne dispensa questo teorema, che mostra l'identità dell'ente « segmento » definito colla primitiva maniera e coll'attuale.

NOTE.

Nota 1.^a Stimo opportuno il citare qui brevemente e senza nessuna spiegazione i concetti e le definizioni fondamentali a cui intendo appoggiarmi, e che non si trovano completi nella mia Memoria citata « I postulati e gli enti geometrici ».

Le proposizioni che seguono sono postulati e definizioni. Alcune definizioni sono per brevità incluse nei postulati.

Post. — Esiste un ente che si dice *spazio*.

Post. — Esistono infiniti enti che non sono lo spazio, e si dicono *parti dello spazio* o *solidi*, e infiniti solidi che si dicono *parti di un solido*.

Post. — Per ogni solido esistono uno o più enti (in numero finito) che non sono spazio nè solidi, il cui insieme costituisce il *limite del solido*, e ciascuno dei quali si dice *superficie*.

Per ogni superficie esistono infiniti enti, che si dicono *sue parti*, ed altri enti *parti di queste*, che pure sono parti della superficie data. Si dicono tutti *superficie*.

Post. — Per ogni superficie non limite di un solido esistono uno o più enti (in numero finito) non spazio, solidi o superficie il cui insieme è il *limite o contorno della superficie*, e che si dicono *linee*.

Per ogni linea esistono infiniti enti, *sue parti*, ed altri enti, *parti di queste*, che sono parti della linea data: si dicono tutte *linee*.

Post. — Per ogni linea non limite di una superficie esistono uno o due enti, che costituiscono il suo *limite* e ne sono *estremi*, ciascuno dei quali non è spazio, nè solido, nè superficie, nè linea, e si dice *punto*.

Def. — Si dice che *giacciono* su un ente tutte le sue parti, i limiti di esso e di queste, e tutti gli enti che, per questa stessa definizione, giacciono su quelle parti o su quei limiti. Così su una linea giacciono infiniti punti, su una superficie infinite linee ed infiniti punti ecc.: e nello spazio giacciono tutti gli enti.

Def. — Se un ente A giace su B , A è di B , B contiene A , passa per A .

Def. — Sono *parti associate* di un ente A due parti di esso che, avendo comuni al più solo punti dei loro limiti, col loro insieme costituiscono l'ente A , cioè sono tali che i punti di A sono tutti e soli quelli delle due parti.

Def. — Un ente A di B *divide* B , quando esso o solo o con parti associate del limite di B costituisca il limite di due parti associate di B .

Def. — Un aggregato o gruppo di enti si dice *figura*.

Def. — Quando si considera una figura si dice anche che si hanno *infinite figure coincidenti con essa*.

Def. — Il gruppo di tutti i punti di una figura si dirà che *forma* la figura.

Post. — Un gruppo di punti forma una figura sola e le sue infinite coincidenti.

Post. — Esistono infiniti gruppi di punti che formano una stessa figura.

Def. — Una figura *ha diverse posizioni* quando è formata da diversi gruppi di punti. Quando si considera una figura con diverse posizioni, si dice che si hanno altrettante *figure uguali*.

Def. — Il passaggio della mente da una figura ad una sua uguale si dice *moto* della prima figura.

Post. — Una figura può muoversi quando sono immobili uno o due dei suoi punti, ed assumere infinite posizioni.

Nota 2.^a (al Cor. 3.^o del n.^o 2). — Se date due superficie σ_1 e σ_2 , di cui σ_2 divide lo spazio, abbia σ_1 punti dalle due parti di σ_2 , esse avranno anche punti comuni.

Nota 3.^a (al Cor. 4.^o del n.^o 2). — Se date due superficie chiuse σ_1 e σ_2 ciascuna giace tutta da una parte dell'altra, il solido interno ad una di esse è parte di quello interno all'altra.

Nota 4.^a (ivi). — I solidi interni a qualche superficie chiusa (finiti) sono tali che una loro parte non è uguale ad essi stessi.

Nota 5.^a (alla Def. 1.^a del n.^o 4). — Esiste una linea di cui quelle di un gruppo sono parti, e i cui punti sono tutti e soli quelli di queste parti.

Nota 6.^a (al Teor. 1.^o del n.^o 15). — Un punto di un tratto divide questo in due parti.

Nota 7.^a (al Teor. 2.^o del n.^o 15). — Se una linea ha punti dalle due parti di una superficie che divide lo spazio, ha con essa punti comuni.

Nota 8.^a (al Teor. 1.^o del n.^o 20). — Se sopra una figura A giace un'altra figura B , si potrà muovere A in modo che B coincida con una figura qualunque uguale C .

Nota 9.^a (al Teor. 2.^o del n.^o 20). — Un punto di un ramo (che non sia il suo estremo) lo divide in un tratto ed in un ramo.

Torino, 14 novembre 1891.