5. *Zur Theorie der electrischen Schwingungen in Drähten; von A. Elsas.*

Die Ergebnisse der Hertz'schen Untersuchungen über sehr schnelle electrische Schwingungen haben sich im Rahmen der Maxwell'schen Theorie der Electricität in so vollkommener Weise darstellen lassen, dass es fast scheint, als ob kein anderes theoretisches System noch Aussicht auf Erfolg habe, nachdem die fundamentalen Anschauungen Maxwell's in demselben Maasse eine experimentelle Bestätigung gefunden haben, wie sie uns befähigen, die neuen Entdeckungen theoretisch zu begreifen.

Nichtsdestoweniger dürfte es sich empfehlen, die älteren Theorien nicht ganz beiseite zu schieben, ehe der Versuch gemacht ist, mit ihrer Hülfe das erweiterte Gebiet der experimentell erforschten electrischen Erscheinungen zu durchmessen, sei es auch nur, um bei consequenter Anwendung der älteren Vorstellungen einen Punkt zu finden, über den man nicht hinauskommt, ohne neue Hypothesen zu ersinnen oder durch die Annahme der Maxwell'schen Fundamentalhypothesen das System zum Abschluss zu bringen.

Ich habe deshalb versucht, die electrischen Wellen in geradlinig ausgespannten Drähten theoretisch darzustellen im Anschluss an die klassische Abhandlung von Kirchhoff „Ueber die Bewegung der Electricität in Drähten“¹⁾, von deren Voraussetzungen ich nur soweit abgewichen bin, als es die grundlegende Arbeit der Helmholtz'schen Theorie der Electrodynamik „Ueber die Bewegungsgleichungen der Electricität für ruhende leitende Körper“²⁾ nothwendig gemacht hat. Die umfangreichen und sorgfältigen Untersuchungen von E. Cohn und F. Heerwagen³⁾ boten eine sehr willkommene Unterlage

1) G. Kirchhoff, Ges. Abhandlungen, p. 131.

2) H. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandl. 1. p. 537.

3) E. Cohn u. F. Heerwagen, Ueber die Periode sehr schneller electrischer Schwingungen. Wied. Ann. 43. p. 343. 1891.

für die Prüfung einiger Ergebnisse dieser Betrachtung, welche der Maxwell'schen Theorie in keinem Punkte widerspricht.

I. Theorie der Hertz'schen „primären“ Schwingung.

Wir setzen voraus, dass die „primäre“ Schwingung in einem geraden cylindrischen Drahte erregt werde, dessen Durchmesser gegen seine Länge als unendlich klein betrachtet werden darf, dass die Enden dieses Drahtes mit gleich grossen und gleichgestalteten ebenen Platten oder gleichen Kugeln von erheblicher Capacität verbunden sind, deren Mittelebenen mit der Drahtaxe in derselben Ebene des Raumes liegen, und dass der Draht in der Mitte seiner Länge durchschnitten wurde, um zwei kleine Kugeln aufzunehmen, die mit einem Inductorium verbunden sind, dessen Entladungen zwischen ihnen übergehen. Auch soll vorausgesetzt werden, dass in der Nähe dieses Drahtes keine anderen electricisch leitenden Körper vorhanden sind.

Unter diesen Voraussetzungen haben wir eine vollkommen symmetrische Anordnung. Die Endplatten haben in jedem Augenblick Ladungen von derselben Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen, und die Stromstärke ist an beiden Enden des Drahtes die gleiche.

Die auf die Einheit der Electricitätsmenge bezogene electromotorische Kraft, die in einem Element ds des unendlich dünnen Drahtes nach derjenigen Richtung wirkt, in welcher die Entfernung s dieses Elementes von einem willkürlich gewählten Punkt des Drahtes wächst, ist

$$(1) \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial W}{\partial t}$$

wenn wir mit φ das Potential der auf dem Draht befindlichen freien Electricität, mit W das Potential der Strömung im Draht in Bezug auf das betrachtete Element bezeichnen und c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes bedeutet.¹⁾

Das Potential φ der freien Electricität bestimmt sich nach dem Coulomb'schen electrostatischen Gesetz. Wir bezeichnen mit e die Menge der freien Electricität im Element ds , dividirt durch die Länge ds , und lassen e' die entsprechende Grösse

1) Wir bedienen uns des Gaussischen Maasssystems.

für ein anderes Element ds' bedeuten. Dann liefern diejenigen Theile des Drahtes, deren Entfernung r von dem Element ds unendlich gross ist im Vergleich zu ds und zum Durchmesser des Drahtes, den Beitrag

$$(2) \quad \varphi = \int \frac{e' ds'}{r}.$$

Um den Beitrag derjenigen Elemente, für welche die genannte Bedingung nicht erfüllt ist, zu finden, müssen wir die Vertheilung der Electricität innerhalb eines Querschnittes des Drahtes kennen. Wir denken uns einen Punkt eines Querschnittes auf ein Polarcoordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt des Querschnittes ist. Die Coordinaten s, ϱ, ψ sollen denjenigen Punkt des Drahtes bezeichnen, in Beziehung auf den wir das Potential der freien Electricität suchen.

Wir machen die Annahme, dass sich, wie beim constanten Strom und beim electrischen Gleichgewicht, freie Electricität nur an der Oberfläche der Leiter befindet. Wenn wir noch α den Radius des Querschnittes nennen, so ist $e'/2\pi\alpha$ die Dichte der freien Electricität an der Oberfläche des Elementes ds' , und wenn wir unter x' die Entfernung $s' - s$, unter ψ' den Winkel zwischen dem nach einem Punkt der Drahtoberfläche gezogenen Radius und dem Radius, von welchem aus wir den Winkel ψ rechnen, verstehen und ε eine im Vergleich zum Radius α unendlich grosse Strecke bedeuten lassen, so liefert demnach der von der Integration in (2) ausgeschlossene Theil des Drahtes zum Potential φ den Beitrag:

$$(3) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \frac{e' dx'}{\sqrt{x'^2 + \alpha^2 + \varrho^2 - 2\alpha\varrho \cos(\psi' - \psi)}}.$$

Um die Integration nach x' ausführen zu können, nehmen wir an, dass die Function, welche e in seiner Abhängigkeit von der Zeit t und der Coordinate s darstellt, nach Art der Fourier'schen Reihen in eine unendliche Summe von Ausdrücken der Form $A \cos ns + B \sin ns$ entwickelt werden könne, wobei A und B als von s unabhängig gedacht werden. Es kann der Einfachheit halber die Betrachtung auf ein Glied der Reihe beschränkt werden.

Wir setzen also:

$$e_m = A \cos n s + B \sin n s$$

und entsprechend

$$(4) \quad e'_m = A \cos n s' + B \sin n s' = A' \cos n x' + B' \sin n x'.$$

Ferner machen wir:

$$\xi^2 = \alpha^2 + \varrho^2 - 2 \alpha \varrho \cos (\psi' - \psi)$$

und bemerken, dass wir in dem Integral nach x' die Grenzen $-\varepsilon$ und $+\varepsilon$ mit den Enden des Drahtes zusammenfallen lassen können. Bei der Substitution $z = x' / \xi$ werden dann die Integrationsgrenzen $-\infty$ und $+\infty$ und man erhält:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(A' \cos \xi n z + B' \sin \xi n z) dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = 2 A' \int_0^{\infty} \frac{\cos \xi n z dz}{\sqrt{z^2 + 1}}.$$

Aus der Gleichung (4) folgt aber

$$A' = A \cos n s + B \sin n s = e_m,$$

und was das Integral

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \xi n z dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\xi n z} dz}{\sqrt{z^2 - 1}} \quad 1)$$

anbetrifft, so dürfen wir auf Grund der Beobachtungen, die wir theoretisch erklären wollen, die Annahme machen, dass $n \xi$ immer sehr klein ist, d. h. dass die Wellenlängen π / n der

1) Diese Gleichung lässt sich einfacher Weise aus der bekannten Laplace'schen Formel

$$\int_0^{\infty} d\eta \frac{z \cos a\eta}{z^2 + \eta^2} = \frac{\pi}{2} e^{-az} \quad (a > 0)$$

ableiten, indem man auf beiden Seiten mit $dz / \sqrt{z^2 - 1}$ multiplicirt und zwischen den Grenzen 1 und ∞ integriert. In der Gleichung

$$\int_0^{\infty} d\eta \cos a\eta \int_1^{\infty} \frac{z dz}{(z^2 + \eta^2) \sqrt{z^2 - 1}} = \frac{\pi}{2} \int_1^{\infty} dz \frac{e^{-az}}{\sqrt{z^2 - 1}}$$

lässt sich das Integral nach z auf der linken Seite ausführen und ergibt

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\eta^2 + 1}}.$$

Schwingungen, in welche wir uns die electrische Bewegung im Draht zerlegt denken, immer sehr gross sind im Vergleich zur Dicke des Drahtes. Alsdann ist der Werth des Integrals

$$- \log \frac{n\xi}{2} + \Psi_0^1),$$

wo das Functionszeichen $\log$ den natürlichen Logarithmus bedeutet und Ψ_0 die gewöhnlich so bezeichnete Gaussische Constante ($= -0,5772157$) ist.

Also wird

$$\varphi_m = -2e_m \left(\log \frac{n}{2} - \Psi_0 \right) - \frac{e_m}{\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \log \sqrt{\alpha^2 + \varrho^2 - 2\alpha\varrho \cos(\psi' - \psi)}.$$

Von dem noch auszuführenden Integral nach ψ' hat Kirchhoff²⁾ bewiesen, dass es von ψ unabhängig und gleich $2\pi \log \alpha$ wird, so dass wir schliesslich erhalten:

$$\varphi_m = -2e_m \left(\log \frac{n\alpha}{2} - \Psi_0 \right)$$

oder, wenn wir setzen:

$$(5) \quad \gamma = -2 \left(\log \frac{n\alpha}{2} - \Psi_0 \right)$$

$$(6) \quad \varphi_m = \gamma e_m.$$

Um die Function W und die electromotorische Kraft der Induction zu berechnen, wollen wir das Gesetz der Induction in der Form annehmen, die ihm von F. E. Neumann gegeben wurde. Wir machen also die Annahme, dass die von einem Element ds' , in dem die Stromintensität i' sich ändert, in einem zweiten Element ds' des Leiters inducirte electromotorische Kraft, bezogen auf die Einheit der Electricitätsmenge

$$= - \frac{1}{c^2} \frac{\partial i'}{\partial t} \frac{\cos(ds, ds') ds}{r}$$

ist, wo r die Länge der Verbindungslinie zwischen beiden Elementen bedeutet. Ueberdies sehen wir als experimentell bewiesen an, dass bei den Erscheinungen, die wir erklären wollen, die Strömung wesentlich an der Oberfläche des Drahtes stattfindet und in allen Punkten der Peripherie eines Querschnittes dieselbe ist. Unter diesen Voraussetzungen ist $i'/2\pi\alpha$

1) G. Kirchhoff, Borchhardt's Journ. f. Math. 48. Heft 4.

2) G. Kirchhoff, Ges. Abhandlungen, p. 131.

die Stromdichtigkeit in ds' , und wir erhalten für den Beitrag des endlichen Drahtstückes 2ϵ in dessen Mitte ds liegt, zu der Function W einen Ausdruck, der ganz dem in (3) gegebenen für den Beitrag desselben Stückes zum electrostatischen Potential φ entspricht, also unter Beibehaltung der dort eingeführten Bezeichnungen:

$$(7) \quad W = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{i' dx'}{\sqrt{x'^2 + \alpha^2 + q^2 - 2\alpha q \cos(\psi' - \psi)}}.$$

Wir machen weiter die Voraussetzung, dass die Stromintensität i als Function von s in eine Reihe von Ausdrücken der Form

$$i_m = C_m \cos ns + D_m \sin ns$$

entwickelt werden kann, wo C und D von s unabhängig sind. Entsprechend ist

$$i'_m = C_m \cos ns' + D_m \sin ns'$$

und

$$i'_m = C'_m \cos nx' + D'_m \sin nx'.$$

Setzen wir letzteren Ausdruck für i' in (7) ein, so finden wir durch dieselben Schlussfolgerungen, welche uns von der Gleichung (3) zu (6) geführt haben, für W_n den Ausdruck:

$$(8) \quad W_n = \gamma i_m$$

in welchem γ dieselbe Grösse ist, wie in (5). Nur hat γ hier eine andere physikalische Bedeutung, als in (5). Es erscheint hier als der Selbstinductionscoefficient der Längeneinheit des Drahtes, während in (5) der reciproke Werth von γ als die Capacität der Längeneinheit betrachtet werden kann.

Zufolge der Gleichungen (6) und (8) wird der Ausdruck (1) für die electromotorische Kraft:

$$- \gamma \left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right),$$

wobei e und i die Summen aller e_m , respective i_m bedeuten können, vorausgesetzt, dass wir die Veränderlichkeit von γ mit n ausser Betracht lassen und es als eine constante Grösse behandeln dürfen, was sich indessen nicht stets als zulässig erweisen wird.

Wir wollen ferner annehmen, dass, wie bei stationären

Strömen, die Stromstärke der electromotorischen Kraft proportional ist. Dann erhalten wir die Differentialgleichung:

$$(9) \quad iw = -\gamma \left(\frac{\partial e}{\partial s} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial i}{\partial t} \right),$$

in welcher die Grösse w als der Widerstand der Längeneinheit des Drahtes aufgefasst werden kann, obwohl es nicht nothwendig ist, dass dieser Widerstand mit demjenigen für constante Ströme identisch ist.

Zu dieser Differentialgleichung (9) lässt sich eine zweite hinzufügen. Es bedeutet $i dt$ die Electricitätsmenge, welche in der Zeit dt durch den Querschnitt des Drahtes fliesst, dessen Entfernung vom Anfangspunkt der Messung s ist. Durch den Querschnitt bei $s + ds$ fliesst in derselben Zeit die Menge $(i + (\partial i / \partial s) ds) dt$. Wenn die Strömung in derjenigen Richtung erfolgt, in welcher s wächst, verliert das Element ds demnach die Electricitätsmenge $\partial i / \partial s \cdot ds \cdot dt$. Da aber die freie Electricität des Elementes $e ds$ ist, so haben wir:

$$(10) \quad \frac{\partial i}{\partial s} = -\frac{\partial e}{\partial t}.$$

Durch Differentiation von (9) nach s , von (10) nach t und Elimination der Differentialquotienten von i ergibt sich für e die partielle Differentialgleichung:

$$(11) \quad \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + \frac{w c^2}{\gamma} \frac{\partial e}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 e}{\partial s^2}.$$

Ebenso ergibt sich durch Differentiation von (9) nach t und von (10) nach s und Elimination der Differentialquotienten von e die partielle Differentialgleichung für i :

$$(12) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{w c^2}{\gamma} \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}.$$

Setzen wir noch:

$$(13) \quad \frac{w c^2}{\gamma} = 2h,$$

so stellen die Gleichungen:

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} e_m = E_m e^{-ht} \frac{\sin n s}{\sin n \frac{l}{2}} \cos t \sqrt{n^2 c^2 - h^2} \\ i_m = J_m e^{-ht} \frac{\cos n s}{\cos n \frac{l}{2}} \sin (t \sqrt{n^2 c^2 - h^2} + \delta) \end{array} \right.$$

eine particuläre Lösung der Differentialgleichungen (11) und (12) dar, welche den Symmetriebedingungen genügt, dass für die Enden des Drahtes $s = \pm l/2$ jederzeit die Potentialfunction $\varphi_m = \gamma e_m$ entgegengesetzt gleiche Werthe besitzt und die Stromstärke i_m die gleiche ist. Die Längen s werden von der Mitte der Funkenstrecke aus gemessen, und es ist im Punkte $s = 0$ jederzeit $e_m = 0$ und i_m ein Maximum.

E_m und J_m sind die Amplituden von e_m und i_m an den Enden des Drahtes. Zur Bestimmung des Verhältnisses dieser beiden Grössen und des Bogens δ dient die Gleichung (10), derzufolge sein muss:

$$E_m \frac{\sqrt{n^2 c^2 - h^2}}{\sin n \frac{l}{2}} = -J_m \frac{n}{\cos n \frac{l}{2}} \cos \delta$$

$$E_m \frac{h}{\sin n \frac{l}{2}} = -J_m \frac{n}{\cos n \frac{l}{2}} \sin \delta,$$

woraus folgt:

$$(15) \quad \begin{cases} E_m c = -J_m \operatorname{tg} n \frac{l}{2} \\ \operatorname{tg} \delta = \frac{h}{\sqrt{n^2 c^2 - h^2}}. \end{cases}$$

Um die zulässigen Werthe von n und damit die Wellenlängen der möglichen Schwingungen zu bestimmen, bedürfen wir noch einer Bedingungsgleichung für die Enden des Drahtes.

Die Stromstärke im Endpunkte $s = l/2$ ist diejenige Electricitätsmenge, welche in der Zeiteinheit aus dem Draht auf die Endplatte überfliesst. Ebenso ist die Stromstärke im Endpunkte $s = -l/2$ diejenige Electricitätsmenge, welche der dort befindlichen Endplatte in der Zeiteinheit entzogen wird. Daher haben wir, wenn mit β die Capacität einer Endplatte bezeichnet wird und demnach $\beta \varphi_m$ die Ladung derselben ist:

$$\text{für } s = \frac{l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad i = \beta \frac{\partial \varphi_m}{\partial t},$$

$$\text{für } s = -\frac{l}{2} \quad . \quad . \quad . \quad i = -\beta \frac{\partial \varphi_m}{\partial t}.$$

Nun ist φ_m hier zufolge (6) durch den Werth bestimmt, welchen die Grösse γe_m nach Gl. (14) an den Enden des Drahtes annimmt. Berücksichtigen wir dies und machen von

der für jeden Punkt des Drahtes geltenden Gleichung (10) Anwendung, so erhalten wir die beiden Bedingungsgleichungen:

$$(16) \quad \begin{cases} \text{für } s = \frac{l}{2} & . & . & . & i_m = -\beta \gamma \frac{\partial i_m}{\partial s}, \\ \text{für } s = -\frac{l}{2} & . & . & . & i_m = \beta \gamma \frac{\partial i_m}{\partial s}. \end{cases}$$

Der Ausdruck für i_m in (14) genügt beiden Bedingungen gleichzeitig, wenn:

$$1 = \beta \gamma n \operatorname{tg} n \frac{l}{2}$$

oder

$$(17) \quad \frac{l}{2\beta\gamma} = \frac{n l}{2} \operatorname{tg} \frac{n l}{2}$$

ist. Setzen wir $n l / 2 = x_m$, so wird die Bestimmung der zulässigen Werthe von n auf die Auflösung der Gleichung:

$$(18) \quad x_m \operatorname{tg} x_m = \frac{l}{2\beta\gamma} = a$$

zurückgeführt. Ist x_m die m te Wurzel dieser Gleichung, so ist der zugehörige Werth von n :

$$(19) \quad n = \frac{2x_m}{l}.$$

Wir setzen $n = \pi / \lambda_m$; dann ist λ_m die (halbe) Wellenlänge der Schwingung. Es ist also:

$$(20) \quad \lambda_m = \frac{\pi}{2x_m} l.$$

Für genügend kleine Werthe von a , also bei Drähten von geringer Länge, deren Enden mit erheblich grossen Capacitäten belastet sind, ist die kleinste Wurzel x_0 der Gleichung (18) näherungsweise $= \sqrt{a}$, da $\operatorname{tg} x_0 = x_0$ gesetzt werden darf. Dann aber ist nach (20):

$$(21) \quad \lambda_0 = \pi \sqrt{\frac{\beta \gamma l}{2}}.$$

Indessen ist der wahre Werth von $x_0 < \sqrt{a}$, also λ_0 grösser, als es sich nach der Näherungsformel berechnet. Ist beispielsweise $a = \frac{1}{4}$, so wird nach der Näherungsformel $x_0 = \frac{1}{2}$, während der wahre Werth nur sehr wenig von 0,48 abweicht. Die nach der Formel (21) berechnete Wellenlänge $\lambda_0 = \pi l$ ist demnach um 4 Proc. zu klein. Mit der Grösse von a wächst der

Fehler der angenäherten Berechnung schnell. Für $a = \pi / 4$ ist der wahre Werth von $x_0 = \pi / 4 = 0,7854$ (woraus $\lambda_0 = 2 l$ folgt), während die Näherungsformel $x_0 = \sqrt{\pi / 4} = 0,886$ er giebt, also gar nicht mehr zulässig ist.

Wir wollen von unseren Formeln eine Anwendung machen und die Wellenlänge für einen Schwingungserreger berechnen, den Hr. Hertz in seiner ersten Arbeit über „Sehr schnelle electrische Schwingungen“¹⁾ benutzt hat. Dessen Länge war $l = 150$ cm, seine halbe Dicke $0,25$ cm, und er endigte in Kugeln von 15 cm Radius. Wir haben also $\beta = 15$ cm.²⁾ Die Grösse γ ist von der unbekannten Wellenlänge $\lambda_0 = \pi / n$ abhängig nach Gleichung (5), die wir in der Form:

$$\gamma = 2 \left(\log \frac{2 \lambda}{\pi \alpha} - 0,5772 \right) = 2 \left(\log \frac{2 l}{\alpha} - 1,722 \right)$$

schreiben können. Da aber $\lambda_0 > l$ sein muss, weil x_0 nach (20) immer $< \pi / 2$ ist, so zeigt diese Gleichung, dass $\gamma > 10,6$ sein wird. Die Annahme $\gamma = 10$ liefert aber schon für λ_0 den Werth $(\pi / 2) \cdot l \sqrt{2} = 313$ cm nach der Näherungsformel. Demnach ist die wirkliche Wellenlänge noch grösser und es wird $\gamma > 12$. Wir können mit Hülfe dieses zweiten Werthes für γ eine neue Berechnung der Wellenlänge vornehmen, und so ein Annäherungsverfahren anwenden, welches schliesslich $\gamma = 12,7$ liefert.

Hiernach wird $\sqrt{l / 2 \beta \gamma} = 0,6274$ und der Bogen, dessen Tangente diese Grösse hat $= 0,5603$. Nehmen wir das arithmetische Mittel dieser beiden Zahlen für die Grösse x_0 der Gleichung (20), so erhalten wir:

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2 \cdot 0,5938} \cdot 150 = 397 \text{ cm.}$$

Es ist für die Berechnung der Wellenlängen gleichgültig, ob wir die electromotorische Kraft der Induction nach dem Neumann'schen, Maxwell'schen oder dem allgemeineren Helmholtz'schen Gesetz³⁾ bestimmen. Denn der Coefficient

1) H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft, p. 32.

2) Die Anmerkung, die Hr. Hertz am Schlusse des Buches (l. c. p. 287) hierüber macht, ist mir nicht entgangen.

3) H. Helmholtz, Wissensch. Abhandl. 1. p. 537.

γ in den Bedingungsgleichungen (16), der in diese Berechnung eingeht, bedeutet nicht das Verhältniss der Function W zu i , sondern er ist hier gleich φ/e . Der Einfachheit der Darstellung wegen wurde das Neumann'sche Gesetz zu Grunde gelegt, für welches $W/i = \varphi/e$ wird. Das Inductionsgesetz von Helmholtz ergibt statt der Gleichung (8) eine andere:

$$(22) \quad W_m = \left(\gamma' + \frac{1-k}{2} \right) i_m = \gamma' i_m$$

und dementsprechend erhalten wir statt der Differentialgleichung (12) eine andere:

$$(23) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + \frac{w c^2}{\gamma'} \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\gamma}{\gamma'} \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}.$$

Machen wir in dieser:

$$c^2 \frac{\gamma}{\gamma'} = c'^2,$$

so zeigt sich, dass sie von der Gleichung (12) nur darin verschieden ist, dass statt der Lichtgeschwindigkeit c die Geschwindigkeit c' gesetzt wird. Diese geht in die Berechnung der Wellenlängen nicht ein und ist im Allgemeinen nur um ein Geringes kleiner als c , wenn der Werth der unbekannten Constanten k des Helmholtz'schen Gesetzes zwischen 0 und 1 liegt und γ nicht sehr klein ist.

Die höheren Wurzeln x_m der Gleichung (18) nähern sich mit wachsendem Index m dem Werth $m\pi$, und die Wellenlängen sind nach Gleichung (20) also nahezu:

$$\lambda_m = \frac{l}{2m},$$

so lange $a = l/2\beta\gamma$ eine kleine Grösse bleibt. Indessen wird γ um so kleiner, je kleiner die Wellenlänge ist; a wächst demnach mit m gleichzeitig, und deshalb ist die Näherungsformel in den meisten Fällen unbrauchbar.

II. Erzwungene Schwingungen in einer offenen Strombahn.

Vor der einen ebenen Endplatte des Schwingungserregers sei eine andere Platte parallel aufgestellt und mit einem sehr langen Draht verbunden, der geradlinig und rechtwinkelig zum primären Draht ausgespannt ist und frei in der Luft endigt.

In dieser offenen Strombahn werden durch den Schwingungserreger electricische Oscillationen erzeugt, deren Periode

mit derjenigen des Erregers übereinstimmt.¹⁾ Die Schwingungen sind demnach „erzwungene“ in demselben Sinne, wie die Vibrationen eines elastischen Fadens, der an einer schweren Stimmgabel befestigt und geradlinig ausgespannt wird. Die Analogie ist überdies auch für die theoretische Betrachtung vollkommen, wenn man sich vorstellt, dass die Stimmgabel einer starken Dämpfung unterworfen ist, während der weiche Faden nur geringen Reibungswiderstand findet. Da aber in der Akustik das Problem der Melde'schen Fadenschwingungen unter der gegentheiligen Annahme einer ungedämpften primären Schwingung betrachtet wird, können wir nicht ohne Weiteres die Endgleichung abschreiben.²⁾

Den Ausdruck für die Stromstärke i am Anfangspunkt $s = 0$ der offenen Strombahn können wir auf die Form bringen:

$$(1) \quad i = C e^{-ht} \cos pt \dots \text{für } s = 0.$$

Die Periode der primären Schwingung bestimmt hier die Grösse p , und ebenso ist die Dämpfung h diejenige der primären Schwingung. Im Endpunkte des Drahtes ist:

$$(2) \quad i = 0 \dots \text{für } s = l,$$

während in jedem Punkte des Drahtes die Differentialgleichung:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial i}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i}{\partial s^2}$$

erfüllt werden muss.

Der Ausdruck:

$$i = C e^{(ip-h)t} \frac{e^{\mu \frac{l-s}{c}} - e^{-\mu \frac{l-s}{c}}}{e^{\mu \frac{l}{c}} - e^{-\mu \frac{l}{c}}}$$

genügt im Punkte $s = 0$ der Bedingung $i = C e^{(ip-h)t}$, für $s = l$ der Bedingung (2) und der Differentialgleichung (3), wenn man:

$$\mu^2 = (ip - h)^2 + 2h'(ip - h)$$

macht, oder für sehr kleine Werthe von h' :

$$\mu = ip - (h - h') = ip - \alpha$$

1) H. Hertz, Wied. Ann. **34**. p. 551. 1888; Untersuchungen über die Ausbreitung der electricischen Kraft, p. 120.

2) Vgl. Lord Rayleigh, die Theorie des Schalles; deutsch von Neesen, p. 209; A. Elsas, Wied. Ann. **23**. p. 173. 1884.

setzt. Der reelle Theil des Ausdrucks:

$$i = C e^{(ip-h)t} \frac{e^{-\frac{(ip-\kappa)(l-s)}{c}} - e^{\frac{(ip-\kappa)(l-s)}{c}}}{e^{-\frac{(ip-\kappa)l}{c}} - e^{\frac{(ip-\kappa)l}{c}}}$$

ist demnach die gesuchte Lösung, welche den Bedingungen (1) und (2) Genüge leistet.

Um den reellen Theil auszuschneiden, beachten wir, dass Zähler und Nenner auf die Form $R e^{-i\delta}$ gebracht werden kann. Wir setzen allgemein:

$$e^{-(ip-\kappa)x} - e^{(ip-\kappa)x} = R_x e^{-i\delta_x}.$$

Alsdann wird:

$$R_x^2 = \sin^2 p x \cdot (e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}) + \cos^2 p x \cdot (e^{\kappa x} - e^{-\kappa x})$$

$$\text{oder} \quad R_x^2 = 4 \sin^2 p x + (e^{\kappa x} - e^{-\kappa x})^2,$$

$$\operatorname{tg} \delta_x = \frac{e^{\kappa x} + e^{-\kappa x}}{e^{\kappa x} - e^{-\kappa x}} \operatorname{tg} p x.$$

Ist demnach:

$$\kappa = h - h'$$

$$(4) \quad \operatorname{tg} \delta_{l-s} = \frac{e^{\kappa \frac{l-s}{c}} + e^{-\kappa \frac{l-s}{c}}}{e^{\kappa \frac{l-s}{c}} - e^{-\kappa \frac{l-s}{c}}} \operatorname{tg} p \frac{l-s}{c}$$

$$\operatorname{tg} \delta_l = \frac{e^{\kappa \frac{l}{c}} + e^{-\kappa \frac{l}{c}}}{e^{\kappa \frac{l}{c}} - e^{-\kappa \frac{l}{c}}} \operatorname{tg} p \frac{l}{c},$$

so erhalten wir die Lösung unseres Problems in der Gleichung:

$$(5) \quad i = C e^{-ht} \cos \left(pt + \delta_l - \delta_{l-s} \right) \sqrt{\frac{4 \sin^2 p \frac{l-s}{c} + \left(e^{\kappa \frac{l-s}{c}} - e^{-\kappa \frac{l-s}{c}} \right)^2}{4 \sin^2 p \frac{l}{c} + \left(e^{\kappa \frac{l}{c}} - e^{-\kappa \frac{l}{c}} \right)^2}}.$$

Diese zeigt, dass die Stromstärke in keinem Punkte des Drahtes Null wird, ausser im Endpunkte. Gleichwohl kann man diejenigen Punkte, in denen $\sin p(l-s)/c = 0$ und die Amplitude der Schwingung ein Minimum wird, als Knotenpunkte auffassen, und entsprechend ergibt sich die halbe Wellenlänge $\lambda = cT$, wenn man p durch die (halbe) Schwin-

gungsdauer T nach der Formel $p = \pi / T$ ausdrückt. Die Amplitude der Schwingung in den uneigentlichen Knotenpunkten wird um so grösser, je weiter diese vom freien Ende entfernt sind. Daher lassen sich die Knotenpunkte am leichtesten experimentell bestimmen, wenn man den Draht vom freien Ende aus absucht.

Indessen ist es für die experimentelle Untersuchung auch nothwendig, die Abhängigkeit der Amplitude von dem Verhältniss der Wellenlänge und der Gesamtlänge des Drahtes zu beachten.¹⁾ Denkt man sich die Länge l als unveränderlich, die Periode T der primären Schwingung als variabel, so wird der Nenner des Bruches unter dem Wurzelzeichen der Gleichung (5) am kleinsten, demnach die Amplitude am grössten, wenn l einem Vielfachen von cT gleich ist und $\sin pl/c$ verschwindet. Hingegen hat die Amplitude ihren kleinsten Werth, wenn l ein ungerades Vielfaches von $cT/2$ ist und $\sin pl/c$ demnach gleich 1 wird. Im ersten Falle ist der Anfangspunkt des Drahtes ein uneigentlicher Knotenpunkt, und die Amplitude in den Schwingungsbäuchen kann die Seinige vielmal übertreffen, wenn die Dämpfung α klein ist. Im letzteren Falle hat der Anfangspunkt eine grössere Amplitude, als jeder andere Punkt des Drahtes. Die Melde'schen Fadenschwingungen sind vortrefflich geeignet, alle diese Verhältnisse zur Anschauung zu bringen.

Stehende Wellen kommen merklich nicht zu Stande, wenn man den Draht, welcher in erzwungene Schwingungen versetzt werden soll, so lang macht, dass eine über denselben fortschreitende Welle durch die Dämpfung vernichtet wird, ehe sie das Ende erreicht.

Für die Theorie ist eine fortschreitende Schwingung charakterisirt durch die Differentialgleichung (3), die Bedingungs-gleichung (1) und die Bedingung:

$$(6) \quad i = 0 \quad . \quad . \quad . \quad \text{für } s = \infty .$$

Als Lösung ergibt sich leicht (unter der Voraussetzung, dass k' bedeutend kleiner als h ist):

1) Vgl. H. Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der electrischen Kraft. Anmerkung 14. p. 289.

$$(7) \quad i = C e^{-h \left(t - \frac{s}{c} \right) + \frac{h'}{c} \frac{s}{c}} \cos p \left(t - \frac{s}{c} \right)$$

oder, wenn man die Schwingungsdauer und die Wellenlänge einführt:

$$(8) \quad i = C \cdot e^{-h \left(t - \frac{s}{c} \right) + \frac{h'}{c} \frac{s}{c}} \cos \pi \left(\frac{t}{T} - \frac{s}{\lambda} \right).$$

III. Die Lecher'sche Versuchsanordnung und die Beobachtungen von Cohn und Heerwagen.¹⁾

Vor den beiden ebenen Endplatten des bisher als Schwingungserreger bezeichneten Leiters seien gleich grosse und gleich gestaltete ebene Platten parallel aufgestellt und mit zwei einander parallel ausgespannten Drähten in der Weise verbunden, die die Figur veranschaulicht. Die Enden dieser Drähte seien mit rechtwinkliger Biegung zu einem Kohlrausch'schen Plattencondensator geführt. Die mit ihren Anfangspunkten verbundenen Platten sollen ferner in gleiche Entfernung von den gegenüberstehenden Platten gebracht werden, damit die ganze Anordnung eine symmetrische wird.

In diesem Falle werden, wie sich aus den Versuchsergebnissen von Cohn und Heerwagen mit Bestimmtheit schliessen lässt, nicht die Schwingungen des Erregers den parallelen Drähten aufgezwungen, sondern die durch das Inductorium veranlassten Schwingungen sind die Eigenschwingungen des ganzen, aus den drei Condensatoren und den verbindenden Drähten bestehenden geschlossenen Systems von Leitern.

Zur Vereinfachung der theoretischen Erörterungen können wir uns denken, dass die beiden Condensatoren vu und $v'u'$ im Stromkreise gegeneinander verschoben werden, bis die Platten v und v' zusammenfallen. Alsdann dürfen die Platten v und v'

1) J. Lecher, Wien. Sitzungsber. **99**. p. 340. 1890; Wied. Ann. **41**. p. 850. 1890. — E. Cohn und F. Heerwagen, Wied. Ann. **43**. p. 343. 1891. — Vgl. auch Salvioni, Rendiconti della R. Acad. dei Lincei, vol. I. 1^o Sem., fasc. 7. p. 206. 1892.

entfernt werden, und die Platten u und u' bilden dann einen Condensator, dessen Plattenentfernung doppelt so gross ist als vu resp. $v'u'$. Das vereinfachte System besteht dann aus zwei parallelen Drähten und zwei Plattencondensatoren an den Enden derselben.

Zufolge der symmetrischen Anordnung ist jederzeit in jedem Punkte des Drahtes die freie Electricität von derselben Dichte, aber von entgegengesetztem Vorzeichen, die Strömung von derselben Intensität, aber entgegengesetzter Richtung, wie in dem gegenüberliegenden Punkte auf der anderen Draht-hälfte.

Für die electromotorische Kraft, welche in einem beliebigen Punkte des Doppeldrahtes wirkt, erhalten wir einen Ausdruck von derselben Form, wie für den geraden einfachen Draht im Kapitel I (p. 492). Es erhält aber der Coefficient γ hier eine andere Bedeutung, da das Potential φ der freien Electricität [I, Gleichung (2)] und die Function W geändert wird durch die gegenseitige Beeinflussung der beiden parallelen Draht-hälften.

Bezeichnen wir durch s und s' die Entfernung zweier Punkte, welche nicht auf derselben Draht-hälfte liegen, von den Anfangspunkten $s = 0$ und $s' = 0$, durch l die Länge einer Draht-hälfte und durch b den Abstand der parallelen Hälften von einander, so wird der Beitrag zu dem Potential φ , welcher von derjenigen Draht-hälfte herrührt, auf der das Element ds nicht liegt:

$$\int_0^l \frac{e' ds'}{\sqrt{(s' - s)^2 + b^2}}.$$

Wir setzen wieder, wie im ersten Capitel:

$$s' - s = x',$$

nehmen an, dass e durch eine Fourier'sche Reihe nach s entwickelt werden kann und beschränken die Betrachtung auf ein Glied dieser Reihe, für welches wir haben:

$$e_m = A \cos ns + B \sin ns.$$

Demgemäss ist im Element ds' auf der anderen Draht-hälfte:

$$e_m' = -(A \cos ns' + B \sin ns') = -(A' \cos nx' + B' \sin nx').$$

Das Integral wird durch diese Substitution:

$$-\int_{-s}^{l-s} \frac{(A' \cos n x' + B' \sin n x')}{\sqrt{x'^2 + b^2}} dx';$$

es ist nur dann in geschlossener Form darstellbar, wenn der Draht so lang ist, dass wir ihn durch zwei unendlich lange parallele Hälften ersetzt denken dürfen. Alsdann geht es über in:

$$-A' \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos n x' dx'}{\sqrt{x'^2 + b^2}} = -2A' \int_1^{\infty} \frac{e^{-bnx}}{\sqrt{x^2 - 1}} dx$$

oder, für hinreichend kleine Werthe von bn in:

$$2A' \left(\log \frac{nb}{2} - \psi_0 \right).$$

Es ist aber $A' = A \cos ns + B \sin ns = e_m$; also erhalten wir, wenn wir nach den Gleichungen (5) und (6) des ersten Capitels den Beitrag, der von der anderen Drahthälfte herrührt, hinzufügen, für das Potential die Gleichung:

$$(1) \quad \varphi_m = 2e_m \log \frac{b}{\alpha}.$$

In derselben Weise ergibt sich:

$$(2) \quad W_m = 2i_m \log \frac{b}{\alpha}$$

und, wenn wir hier

$$(3) \quad \gamma = 2 \log \frac{b}{\alpha}$$

setzen, erhalten die Differentialgleichungen dieselbe Form, wie im ersten Capitel.

In jedem Punkte des Drahtes ist demnach eine Differentialgleichung:

$$(4) \quad \frac{\partial^2 i_m}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial i_m}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 i_m}{\partial s^2}$$

zu erfüllen, worin

$$2h = \frac{wc^2}{\gamma}.$$

Dieser Differentialgleichung entspricht eine electrische Schwingung:

$$(5) \quad \begin{cases} i_m = e^{-ht} \cdot \cos \sqrt{n^2 c^2 - h^2} \cdot t (A_1 \cos ns + B_1 \sin ns) \\ \quad + e^{-ht} \sin \sqrt{n^2 c^2 - h^2} \cdot t (A_2 \cos ns + B_2 \sin ns). \end{cases}$$

Das Verhältniss zwischen den Constanten A_1 und B_1 , A_2 und B_2 , und die Constante n , von welcher Schwingungszahl und Wellenlänge abhängen, werden durch die Bedingungen bestimmt, denen an den Enden einer Drahhälfte entsprochen werden muss.

Es sei Q die Electricitätsmenge auf derjenigen Condensatorplatte, mit welcher das Drahtende $s = 0$ verbunden ist, φ das Potential der Platte, β die Capacität des Condensators. Dann ist die Stromstärke am Ende $s = 0$ gleich der Electricitätsmenge, welche der Platte in der Zeiteinheit entzogen wird, also

$$\text{für } s = 0 \dots i = - \frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Ferner ist, da die gegenüberstehende Platte das Potential $-\varphi$ hat, Q durch die Potentialdifferenz 2φ und die Capacität β des Condensators bestimmt,

$$Q = 2\beta\varphi,$$

während

$$\varphi = \gamma e$$

ist, wenn e die Electricitätsmenge auf der Längeneinheit des Drahtes am Ende $s = 0$ bedeutet. Daher ist die Stromstärke in diesem Punkte:

$$i = -2\beta\gamma \frac{\partial e}{\partial t},$$

oder, da $-\partial e / \partial t = \partial i / \partial s$ ist,

$$(6) \quad \text{für } s = 0 \dots i = 2\beta\gamma \frac{\partial i}{\partial s}.$$

Im Punkte $s = l$ ist der Draht mit dem zweiten Condensator verbunden, dessen Capacität durch β_1 bezeichnet werden soll. Hier hat die Strömung die Richtung, in welcher s wächst, wenn die Ladung der Condensatorplatte vergrössert wird. Demnach ist hier $i = \partial Q_1 / \partial t$, und wir erhalten als Bedingungs-

$$(7) \quad \text{für } s = l \dots i = -2\beta_1\gamma \frac{\partial i}{\partial s}.$$

Der Gleichung (6) geschieht Genüge, wenn für beide Indices 1 und 2

$$A = 2\beta\gamma n B$$

gemacht wird. Wegen der Gleichung (7) muss ausserdem

$$A \cos nl + B \sin nl = 2\beta' \gamma n (A \sin nl - B \cos nl)$$

sein. Eliminirt man hieraus A und B , so ergibt sich eine Gleichung, welche die zulässigen Werthe von n bestimmt, nämlich

$$(8) \quad 2\beta \gamma n \cos nl + \sin nl = 2\beta' \gamma n (2\beta \gamma n \sin nl - \cos nl).$$

oder

$$(9) \quad \cotg nl = \frac{4\beta\beta'\gamma^2 n^2 - 1}{(\beta + \beta')2\gamma n}.$$

Jeder Wurzel derselben entspricht eine gedämpfte einfach harmonische electrische Schwingung. Die Gleichung (5) für die Stromstärke lässt sich jetzt auf die Form bringen:

$$(10) \quad \begin{cases} i_m = e^{-ht} (A_1 \cos \sqrt{n^2 c^2 - h^2} t + A_2 \sin \sqrt{n^2 c^2 - h^2} t) (\cos ns \\ + \frac{1}{2\beta \gamma n} \sin ns). \end{cases}$$

Wegen der Beziehungen $\partial i / \partial s = -\partial e / \partial t$ und $\varphi = \gamma e$ lässt sich dann das Potential φ_m im Punkte s darstellen durch eine Gleichung

$$(11) \quad \begin{cases} \varphi_m = e^{-ht} (C_1 \cos \sqrt{n^2 c^2 - h^2} t + C_2 \sin \sqrt{n^2 c^2 - h^2} t) (\sin ns \\ - \frac{1}{2\beta \gamma n} \cos ns). \end{cases}$$

Demnach ist die Potentialdifferenz zwischen dem Punkte s und dem gegenüberliegenden Punkte auf der anderen Draht-hälfte proportional mit $2\beta \gamma n \sin ns - \cos ns$; sie wird Null nur zwischen gewissen Punkten, die als Knotenpunkte der Schwingung bezeichnet werden können, und deren Lage sich aus der Gleichung

$$(12) \quad \begin{cases} 2\beta \gamma n \sin nz - \cos nz = 0 & \text{oder} \\ \cotg nz = 2\beta \gamma n \end{cases}$$

ergiebt, wenn wir in den Knotenpunkten $s = z$ setzen. Es ist zufolge der Anordnung des Leiterkreises nothwendig, dass auch die Gleichung

$$(13) \quad \cotg nz' = 2\beta' \gamma n$$

gilt, in welcher z' die Entfernung der Knotenpunkte vom anderen Condensator, dessen Capacität β' ist, bedeutet. Diese Gleichung ist theoretisch abzuleiten aus (8) und (12). Denn

wenn in die erste Gleichung (12) $z = l - z'$ gesetzt wird, erhält man zunächst

$$(2\beta\gamma n \sin nl - \cos nl) \cos nz' - (2\beta\gamma n \cos nl + \sin nl) \sin nz' = 0$$

und bei Berücksichtigung von (8):

$$\cos nz' - 2\beta'\gamma n \sin nz' = 0.$$

Wenn z und z' die Entfernungen *desselben* Knotenpunktes von den Drahtenden bedeuten, ist die Drahtlänge $l = z + z'$; versteht man dagegen unter z und z' die Entfernung des ersten Knotenpunktes vom Anfang des Drahtes und die Entfernung des letzten Knoten vom Ende, so ist $l = z + m\lambda_m + z'$. Setzt man diesen Werth für l in die Gleichung (9) ein, so werden die beiden Seiten derselben identisch gleich wegen der Gleichungen (12) und (13). Durch zwei der Gleichungen (9), (12) und (13) ist demnach die dritte bestimmt.

Wir wollen, wie es die Hrn. Cohn und Heerwagen gethan haben, die Lage der äussersten Knotenpunkte durch z und z' bezeichnen.

Alsdann ist zufolge der Gleichung (13), die wir auf den veränderlicheu (Kohlrausch'schen) Condensator beziehen wollen, $z' = 0$, wenn die Capacität des Condensators durch Zusammenschieben der Platte unendlich gross gemacht wird. Am Drahtende entsteht dann also ein Knotenpunkt, und die Gleichung (9), welche die Abhängigkeit der Wellenlängen λ_m von der Drahtlänge l und den Constanten β und γ des Systems darstellt, ergibt:

$$\cotg nl = 2\beta\gamma n$$

oder

$$(14) \quad \cotg \pi \frac{l}{\lambda_m} = \frac{2\beta\gamma\pi}{\lambda_m}.$$

Solange $2\beta\gamma\pi/\lambda_m$ eine kleine Zahl ist, folgt hieraus, dass $\pi l/\lambda_m$ wenig kleiner ist, als $\pi(2m+1)/2$, also λ_m wenig grösser, als $2l/(2m+1)$, womit zusammenhängt, dass zwei Wellenlängen verschiedener Schwingungen λ_m und λ_p sich näherungsweise zu einander verhalten wie die ungeraden Zahlen $2p+1$ und $2m+1$.

Die Tabelle I der Hrn. Cohn und Heerwagen (l. c. p. 351) enthält die Wellenlänge λ_1 bis λ_6 für ein System, in welchem $\beta = \text{ca. } 7 \text{ cm}$, $2\gamma = 18,42$ und $l = \text{ca. } 1160 \text{ cm}$ ist. Da hier

$2\beta\gamma\pi =$ etwa 405 cm ist und die Wellenlängen zwischen 845 und 189 cm variiren, erhält die rechte Seite der Gleichung (14) Werthe, die von etwa $\frac{1}{2}$ bis zu etwas mehr als 2 wachsen, und man kann demnach nicht mehr von der Näherungsformel $\lambda_m = 2l/(2m + 1)$ Gebrauch machen. Die exacte Prüfung der Formel (14) wird erschwert durch den Umstand, dass die Capacität β nicht genau bestimmbar ist. Nach einer privaten Mittheilung hält Hr. Cohn ca. 7 cm für den wahrscheinlichsten Werth; es scheint jedoch, dass β etwas kleiner genommen werden muss, etwa gleich 6 cm, damit die Berechnung der Länge l aus der Gleichung (14) für alle Wellenlängen Werthe liefert, die sich möglichst wenig von einem Mittelwerthe entfernen. Da an den Enden die beiden Drahthälften weder parallel noch äquidistant verlaufen, darf man ferner nicht erwarten, dass der berechnete Mittelwerth für l' mit der gemessenen Drahtlänge genau übereinstimmt. Bei den Versuchen von Cohn und Heerwagen betrug die gemessene Drahtlänge von der Funkenstrecke bis zum Kohlrausch'schen Condensator ungefähr 1158 cm. Die nachfolgende Tabelle I zeigt, dass auch der berechnete Werth von l nahezu diese Grösse hat, wenn man $\beta = 6$ cm setzt, während für $\beta = 7$ cm l etwa 10 cm kleiner wird.

Tabelle 1.

$2\beta\gamma\pi = 347$ cm		$2\beta\gamma\pi = 405$ cm	
$\lambda_1 = 845$ cm	$l = 1161,9$ cm	$\lambda_1 = 845$ cm	$l = 1147,3$ cm
$\lambda_2 = 500$ „	$l = 1153,5$ „	$\lambda_2 = 500$ „	$l = 1141,6$ „
$\lambda_3 = 354$ „	$l = 1151,6$ „	$\lambda_3 = 354$ „	$l = 1142,9$ „
$\lambda_4 = 274,5$ „	$l = 1156,5$ „	$\lambda_4 = 274,5$ „	$l = 1150,0$ „
$\lambda_5 = 223,1$ „	$l = 1156,1$ „	$\lambda_5 = 223,1$ „	$l = 1151,2$ „
$\lambda_6 = 189,1$ „	$l = 1165,0$ „	$\lambda_6 = 189,1$ „	$l = 1160,6$ „
Mittel $l = 1157,4$ cm		Mittel $l = 1148,7$ cm	

Wenn die Capacität des veränderlichen Condensators einen endlichen Werth hat, wird die Gleichung (9) am bequemsten geprüft, indem man mit Hülfe der Gleichungen (12) und (13) die Entfernungen z und z' des ersten Knotens vom Anfang und des letzten Knotens vom Ende des Drahtes berechnet und $l = z + m\lambda_m + z'$ macht.

Die Tabelle 2 enthält die auf diese Weise aus dem Beobachtungsmaterial der Tabelle II von Cohn und Heerwagen berechneten Werthe von l .

Tabelle 2.

$2 \beta' \gamma \pi = 2835 \text{ cm}$			
$2 \beta \gamma \pi = 347 \text{ cm}$		$2 \beta \gamma \pi = 405 \text{ cm}$	
$\lambda_1 = 796 \text{ cm}$	$l = 1159,1 \text{ cm}$	$\lambda_1 = 796 \text{ cm}$	$l = 1143,7 \text{ cm}$
$\lambda_2 = 488,5 \text{ „}$	$l = 1151,7 \text{ „}$	$\lambda_2 = 488,5 \text{ „}$	$l = 1139,9 \text{ „}$
$\lambda_3 = 350 \text{ „}$	$l = 1151,6 \text{ „}$	$\lambda_3 = 350 \text{ „}$	$l = 1143,0 \text{ „}$
$\lambda_4 = 271 \text{ „}$	$l = 1149,4 \text{ „}$	$\lambda_4 = 271 \text{ „}$	$l = 1143,1 \text{ „}$
$\lambda_5 = 222,1 \text{ „}$	$l = 1156,3 \text{ „}$	$\lambda_5 = 222,1 \text{ „}$	$l = 1151,5 \text{ „}$
$\lambda_6 = 188,5 \text{ „}$	$l = 1164,8 \text{ „}$	$\lambda_6 = 188,5 \text{ „}$	$l = 1160,3 \text{ „}$
Mittel $l = 1156,5 \text{ cm}$		Mittel $l = 1146,9 \text{ cm}$	

Auch an den anderen Tabellen der Arbeit von Cohn und Heerwagen findet die Gleichung (9) hinreichende Bewährung, was sich schon daraus ergibt, dass an dem ganzen grossen Beobachtungsmaterial die Gleichungen (12) und (13) verificirt werden konnten.

Wir dürfen daher unsere Untersuchung mit der Bemerkung schliessen, dass die elektrischen Schwingungen in Drähten sich vollständig und auf einfache Weise theoretisch darstellen lassen, ohne dass wir irgendwo mit beobachteten Thatsachen in Widerspruch gerathen oder gezwungen werden, die ältere Theorie durch die Maxwell'sche Hypothese zu erweitern. Damit soll natürlich nicht die Nothwendigkeit der Maxwell'schen Theorie allgemein bestritten oder bezweifelt werden. Wohl aber erscheint im Interesse des theoretischen Unterrichts der Nachweis nicht unerheblich, dass ein grosser Theil des von Hertz zugänglich gemachten Gebiets der schnellen electrischen Schwingungen unmittelbar von der älteren Theorie angegliedert werden kann.

Marburg, im April 1893.