**15. Zur Kinetik der Serienschwingungen
eines Linienspectrums; von Eduard Riecke.**

(Nach einer vorläufigen Mitteilung in der Physikalischen Zeitschrift Nr. 1
und Nr. 2, 1899. p. 10.)

1. Bei theoretischen Untersuchungen über die Spectren gasförmiger Körper ist man meist von der Vorstellung ausgegangen, dass die leuchtenden Molecüle in mehr oder weniger complicirter Weise aus Atomen zusammengesetzt seien. Die Bewegungen der Atome im Inneren des Molecüles mussten sich dann in eine Reihe harmonischer Schwingungen auflösen lassen. Die dabei auftretenden Schwingungszahlen mussten mit den Schwingungszahlen identisch sein, welche den einzelnen Linien des Spectrums zugehören. Die elektromagnetische Theorie des Lichtes bedingt in dieser Vorstellung eine Aenderung insofern, als man nicht mehr annehmen wird, dass die ponderablen Atome selbst durch ihre Schwingungen den Aether in Wellenbewegung versetzen, man wird vielmehr als die eigentlichen Erreger der Wellen die mit den Molecülen verbundenen Ionen oder die an ihrem Aufbaue teilnehmenden Atome des Elektrons betrachten. Immer wird man aber voraussetzen, dass die Anzahl der schwingenden Teilchen eine endliche, dass der Zustand des Molecüles durch eine endliche Anzahl von allgemeinen Coordinaten bestimmt sei. Die Mittelwerte der Coordinaten seien gegeben; man kann dann die wirkenden Kräfte als abhängig betrachten von den Differenzen zwischen den jeweils vorhandenen wirklichen Werten und jenen mittleren. An Stelle der unbekannten Functionen dieser Differenzen, durch welche die Kräfte dargestellt werden, kann man Reihen setzen, welche nach Potenzen jener Differenzen fortschreiten. Man wird dabei von vornherein die Möglichkeit zugeben, dass diese Reihen bis zu höheren Potenzen der Verschiebungen zu verfolgen sind. Dann wird das System nicht bloss die seinen Freiheitsgraden entsprechenden Grundschwingungen ausführen, sondern zu diesen werden noch die harmonischen Oberschwingungen, sowie die Combinationsschwingungen der verschiedenen

Ordnungen mit allmählich abnehmender Intensität treten. Die Betrachtung scheint in der That von gewissen Eigentümlichkeiten der Spectren Rechenschaft zu geben. Man sieht, dass Molecüle von verhältnismässig kleinem Freiheitsgrade schon recht complicirte Spectren erzeugen können, welche aus einer Uebereinanderlagerung von Linien von verschiedener Ordnung und dementsprechend von verschiedener Intensität bestehen. Julius¹⁾ hat gezeigt, dass die Helmholtz'sche Theorie der Combinationstöne erster Ordnung in ihrer Anwendung auf complicirtere Systeme Schwingungszahlen liefert, welche paarweise dieselbe Differenz besitzen. In der That haben Kayser und Runge constante Differenzen von Schwingungszahlen in den Spectren der Elemente in grosser Zahl aufgefunden. Dagegen ist noch nicht gezeigt, dass ein complicirtes Spectrum wirklich nach dem von der Combinationstheorie gelieferten Schema sich auflösen lasse; es fehlt also der thatsächliche Beweis für die Grundannahme der Theorie, für die Möglichkeit von Reihen, die nach Potenzen der Coordinatenänderungen fortschreiten. Das Bild, welches die Combinationstheorie von der Erscheinung der Spectren entwirft, zeigt nur eine ganz allgemeine Aehnlichkeit mit den wirklichen Erscheinungen, quantitative Uebereinstimmung im einzelnen ist bisher nicht nachgewiesen.

Nun tritt aber in der überwiegenden Mehrzahl der Spectren eine Erscheinung auf, welche es zweifelhaft macht, ob die andere Annahme der Combinationstheorie ausreichend ist, nach welcher der Zustand der Molecüle durch eine endliche Zahl von Coordinaten bestimmt sein soll. Es sind dies die in Serien sich ordnenden Schwingungszahlen der Spectren. Nach Kayser und Runge kann man die Schwingungszahlen p der Serien mit überraschender Genauigkeit darstellen durch dreiconstantige Ausdrücke von der Form:

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4}.$$

Die kleinsten beobachteten Schwingungszahlen der Serien ergeben sich im allgemeinen für $n = 3$; mit wachsender Ordnungszahl nähern sich die Schwingungszahlen der oberen

1) V. A. Julius, Beibl. 13. p. 496. 1889.

Grenze a . Handelt es sich bei den Serien um eine unendliche Zahl sich überlagernder Partialschwingungen, so reicht zu ihrer Erzeugung ein Molecül mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden nicht aus; wir müssen dann annehmen, dass die Schwingungen von einem Gebilde herrühren, das nach einer Dimension stetig sich ausdehnt. Von diesem Gesichtspunkte aus ist im Folgenden der Versuch gemacht, zu einem anschaulichen Bilde für den Mechanismus der Serienschwingungen zu gelangen.

2. Wir gehen aus von der Betrachtung zweier Functionen u_1 und u_2 , welche in periodischer Weise von der Zeit und ausserdem in ebenfalls periodischer Weise von einem Parameter φ abhängen. Sie seien gegeben durch die Ansätze:

$$(1) \quad u_1 = \sum_n A_n \sin n \varphi \sin 2 \pi p t,$$

$$(2) \quad u_2 = \sum_n A_n \sin n \varphi \cos 2 \pi p t.$$

Durch Differentiation ergibt sich:

$$(3) \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial \varphi^2} = - \sum_n A_n n^2 \sin n \varphi \cos 2 \pi p t,$$

$$(4) \quad \frac{\partial^4 u_2}{\partial \varphi^4} = \sum_n A_n n^4 \sin n \varphi \cos 2 \pi p t,$$

$$(5) \quad \frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} = \sum_n A_n 2 \pi p n^4 \sin n \varphi \cos 2 \pi p t.$$

Multipliziert man die Gleichungen (2), (3), (4) bez. mit $2 \pi c$, $-2 \pi b$, $-2 \pi a$, so ergibt sich durch Addition derselben zu Gleichung (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2 \pi a \frac{\partial^4 u_2}{\partial \varphi^4} - 2 \pi b \frac{\partial^3 u_2}{\partial \varphi^2} + 2 \pi c u_2 \\ = \sum_n A_n 2 \pi (p n^4 - a n^4 + b n^2 + c) \sin n \varphi \cos 2 \pi p t. \end{aligned}$$

Besteht also zwischen der Schwingungszahl p und der Zahl n die Kayser-Runge'sche Gleichung:

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4},$$

so ist:

$$(6) \quad \frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2 \pi a \frac{\partial^4 u_2}{\partial \varphi^4} - 2 \pi b \frac{\partial^3 u_2}{\partial \varphi^2} + 2 \pi c u_2 = 0.$$

Unter derselben Bedingung besteht zwischen u_1 und u_2 noch die andere Gleichung:

$$(7) \quad \frac{\partial^5 u_2}{\partial \varphi^4 \partial t} + 2 \pi a \frac{\partial^4 u_1}{\partial \varphi^4} + 2 \pi b \frac{\partial^3 u_1}{\partial \varphi^3} - 2 \pi c u_1 = 0.$$

Umgekehrt werden die Gleichungen (6) und (7) durch die Ansätze (1) und (2) befriedigt, wenn die Schwingungszahl p mit der Zahl n durch die Gleichung von Kayser und Runge verbunden ist.

Aus den Gleichungen (6) und (7) kann man entweder u_1 oder u_2 eliminiren; man kommt dann in beiden Fällen zu derselben Gleichung:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^{10} u}{\partial \varphi^8 \partial t^2} + 4 \pi^2 a^2 \frac{\partial^8 u}{\partial \varphi^8} + 4 \pi^2 b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + 4 \pi^2 c^2 u \\ & + 8 \pi^2 a b \frac{\partial^6 u}{\partial \varphi^6} - 8 \pi^2 a c \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0. \end{aligned} \right.$$

Es sind also u_1 und u_2 partielle Lösungen einer und derselben Differentialgleichung zehnter Ordnung.

3. Wir werden nun versuchen, die Functionen u_1 und u_2 auf Grund der Ansätze (1) und (2) in anschaulicher Weise zu deuten. In der vorläufigen Mitteilung habe ich sie auf die correspondirenden Punkte zweier verschiedener concentrischer Ringe bezogen; es scheint in mancher Hinsicht einfacher, sie mit den Punkten eines und desselben Ringes in Verbindung zu bringen. Wir nehmen also einen einzigen Kreisring, dessen Ebene wir uns, um die Vorstellung zu fixiren, horizontal gestellt denken. Im Mittelpunkt 0 des Ringes errichten wir auf seiner Ebene die Normale, deren nach oben gehender Zweig mit x bezeichnet werden möge. Durch den Mittelpunkt 0 ziehen wir eine mit dem Ringe fest verbundene, in seiner Ebene liegende Axe b ; wir verstehen dann unter φ den Winkel, welchen der nach einem beliebigen Punkte des Kreises gezogene Radiusvector mit der Axe b einschliesst; eine Drehung des Radiusvectors im Sinne der wachsenden φ sei, von oben betrachtet, der Drehung des Uhrzeigers entgegengesetzt. Die Functionen u_1 und u_2 betrachten wir als zwei zu einander senkrechte Vektoren, welche den einzelnen Punkten des Ringes zugeordnet sind. Die Abhängigkeit der Vektoren von der

Lage der Ringpunkte einerseits, von der Zeit andererseits ist gegeben durch die Gleichungen (1) und (2).

Die erste Partialschwingung, der eine Linie der Spectralserie entspricht, erhalten wir mit $n = 3$. Die zugehörigen Vectorcomponenten sind Null für

$$\varphi = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}, \quad \varphi = \frac{5\pi}{3}.$$

Die erste Partialschwingung besitzt also sechs Knotenpunkte, welche gleichmässig auf der Peripherie des Ringes verteilt sind; die folgende Partialschwingung mit $n = 4$ besitzt acht äquidistante Knotenpunkte, die n^{te} Schwingung $2n$ solche Knotenpunkte.

4. Wir setzen voraus, dass u_1 und u_2 zwei zu einander senkrechte Vektoren sind. Was ihre speciellere Richtung anbelangt, so liegen zwei Annahmen besonders nahe. Nach der einen würden u_1 und u_2 in einer durch die Ringaxe x gehenden Ebene liegen, nach der anderen in der Ebene des Ringes selbst. Im ersteren Falle wollen wir die Richtungen der einem bestimmten Punkte P des Ringes zugehörigen Vektoren in folgender Weise festlegen; wir nehmen auf der Ringaxe x einen Punkt A ; dann sei PA die Richtung des Vectors u_1 ; die Richtung des Vectors u_2 sei gegeben durch die in der Ebene OAP zu PA senkrecht nach oben gezogene Linie.

Nehmen wir an Stelle von A einen anderen, etwa einen höher auf der x -Axe liegenden Punkt, A' , so erhalten wir längs der Linie PA' eine Vectorcomponente u_1' ; längs der in der Ebene xOP senkrecht zu PA' nach oben gezogenen Linie eine Vectorcomponente u_2' . Bezeichnen wir den Winkel APA' mit α , so ist:

$$u_1 = u_1' \cos \alpha - u_2' \sin \alpha,$$

$$u_2 = u_1' \sin \alpha + u_2' \cos \alpha.$$

Substituieren wir diese Werte in den Gleichungen (6) und (7), so ergibt sich in symbolischer Schreibweise:

$$\frac{\partial^5 (u_1' \cos \alpha - u_2' \sin \alpha)}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2\pi \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c \right) (u_1' \sin \alpha + u_2' \cos \alpha) = 0,$$

und

$$\frac{\partial^5 (u_1' \sin \alpha + u_2' \cos \alpha)}{\partial \varphi^4 \partial t} + 2\pi \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c \right) (u_1' \cos \alpha - u_2' \sin \alpha) = 0.$$

Daraus folgt aber weiter:

$$\frac{\partial^5 u_1'}{\partial \varphi^4 \partial t} - 2\pi \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^3}{\partial \varphi^2} - c \right) u_2' = 0,$$

$$\frac{\partial^5 u_2'}{\partial \varphi^4 \partial t} + 2\pi \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^3}{\partial \varphi^2} - c \right) u_1' = 0.$$

Die Differentialgleichungen sind unabhängig von der besonderen Wahl der zu einander senkrechten Richtungen u_1 und u_2 , solange diese nur in der Ebene bleiben, welche durch die x -Axe und durch den betrachteten Punkt P des Ringes hindurchgeht. Es wird daher am einfachsten sein, die Richtung von u_1 parallel mit der Ringaxe x , die Richtung von u_2 in den nach aussen gehenden Radiusvector y des Punktes P zu legen; diese besondere Wahl der Richtungen u_1 und u_2 soll im Folgenden angenommen werden. Betrachten wir nun irgend eine der durch die Gleichungen (1) und (2) gegebenen Partialschwingungen:

$$u_{1n} = A_n \sin n\varphi \sin 2\pi p t,$$

$$u_{2n} = A_n \sin n\varphi \cos 2\pi p t.$$

Wir nehmen zunächst einen bestimmten Punkt P des Ringes, wie er durch einen bestimmten Wert des Winkels φ gegeben wird. Durch P ziehen wir, senkrecht zu der Ebene des Ringes, eine Parallele zu der x -Axe; auf dieser tragen wir die Vectorcomponente u_{1n} ab, nach oben hin, solange ihr Wert positiv ist; die Componente u_{2n} tragen wir von P aus auf dem Radiusvector y ab, nach aussen, wenn sie positiv ist. Den Endpunkt des aus u_{1n} und u_{2n} construirten resultirenden Vectors bezeichnen wir mit II . Der zu dem Punkte P des Ringes gehörende Vectorpunkt II bewegt sich dann in einem Kreise, dessen Ebene mit der Ebene xy zusammenfällt; der Halbmesser ist gleich $A_n \sin n\pi$. Zur Zeit $t = 0$ ist $u_{1n} = 0$, $u_{2n} = A_n \sin n\varphi$; mit wachsender Zeit nimmt u_{1n} zu, u_{2n} ab; der Punkt II dreht sich also im Kreise im Sinne von der positiven y -Axe zu der positiven x -Axe. Die Zahl der Umläufe in 1 Sec. ist gleich p .

Das Verhältniss der Vectorcomponenten u_{1n} und u_{2n} ,

$$\frac{u_{1n}}{u_{2n}} = \operatorname{tg} 2\pi p t,$$

ist unabhängig von φ und allein abhängig von t . Zu einer bestimmten Zeit befinden sich also die Punkte II alle auf dem Mantel eines Kegels, dessen Spitze in der x -Axe liegt, dessen Leitlinie durch den Kreisring gebildet wird. In ihrer Gesamtheit bilden die Punkte II eine Wellenlinie, welche längs dem Ringe sich hinzieht; sie durchschneidet den Ring in den $2n$ äquidistanten Knotenpunkten; die Bogen der Wellenlinie wenden sich abwechselnd der Spitze des Kegels zu und von ihr ab. Die zeitliche Aenderung der von den Punkten II gebildeten Linie erinnert darnach an die höheren Schwingungen eines Kautschukschlauches, der an seinem einen Ende befestigt ist, während das andere mit der Hand in einem kleinen Kreise herumgeführt wird. Zwischen je zwei Knotenpunkten liegen Spindeln, wie sie durch die Rotation einer Sinuslinie um ihre Axe erzeugt werden.

5. Es möge noch kurz die zweite Annahme besprochen werden, nach der die Vektoren u_1 und u_2 in der Ebene des Ringes liegen sollten. Wir legen von vornherein den Vector u_1 in die Richtung des nach dem betrachteten Punkt P des Ringes gehenden Radius; den Vector u_2 lassen wir zusammenfallen mit der Tangente des Kreises in dem Punkte P ; die positive Richtung möge dabei übereinstimmen mit der Richtung, in welcher der Winkel φ wächst. Wir betrachten die n -Partialschwingung, bei der die Vectorcomponenten gegeben sind, durch

$$u_{1n} = A_n \sin n\varphi \sin 2\pi p t \quad \text{und} \quad u_{2n} = A_n \sin n\varphi \cos 2\pi p t.$$

Den Endpunkt des aus u_{1n} und u_{2n} resultirenden Vectors bezeichnen wir durch II . Zur Zeit $t = (1/4p)$ sind die Vectorcomponenten u_{2n} gleich Null; die Punkte II liegen auf den Kreisradien OP und bilden eine der Kreisperipherie sich auflagernde Sinuslinie. Mit wachsender Zeit nehmen die Vektoren u_{1n} ab, die Vektoren u_{2n} erhalten allmählich wachsende negative Werte; die Punkte II bewegen sich in Kreisen um die entsprechenden Punkte P und zwar von oben gesehen im Sinne des Uhrzeigers. Die Geschwindigkeit der Drehung ist bei allen Punkten dieselbe, die Zahl der Umläufe in 1 Sec. gleich p . Infolge der Rotation verschieben sich die nach aussen liegenden Maxima der Sinuslinie im Sinne des Uhr-

zeigers, die nach innen gewandten Minima in der entgegengesetzten Richtung, gleichzeitig nimmt die Höhe der Wellen ab. Nach einem Viertel der Umlaufszeit werden die Vectorcomponenten u_{1n} gleich Null, die Punkte II fallen in die Peripherie des Kreises, die Vectorverschiebung hat einen longitudinalen Charakter. Weiterhin treten an den Stellen, wo bis dahin Wellenberge waren, Thäler auf und umgekehrt; die Wanderung der Maxima und Minima erfolgt dabei in demselben Sinne wie zuvor.

6. Die drei Vektoren

$$(9) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_n A_n \sin n \varphi \sin 2 \pi p t \\ u_2 = \sum_n A_n \sin n \varphi \sin \left(2 \pi p t + \frac{2 \pi}{3} \right) \\ u_3 = \sum_n A_n \sin n \varphi \sin \left(2 \pi p t + \frac{4 \pi}{3} \right) \end{cases}$$

genügen den Differentialgleichungen

$$3 \frac{\partial^5 u_1}{\partial \varphi^4 \partial t} = 2 \pi \sqrt{3} \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c \right) (u_2 - u_3),$$

$$3 \frac{\partial^5 u_2}{\partial \varphi^4 \partial t} = 2 \pi \sqrt{3} \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c \right) (u_3 - u_1),$$

$$3 \frac{\partial^5 u_3}{\partial \varphi^4 \partial t} = 2 \pi \sqrt{3} \left(a \frac{\partial^4}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - c \right) (u_1 - u_2),$$

wenn zwischen p und n die Beziehung besteht:

$$p = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4}.$$

Zu einer Erweiterung der Anschauung führt das neue System aber nur dann, wenn man die Vektoren u_1, u_2, u_3 drei voneinander verschiedenen Gebilden, etwa drei coaxialen Ringen zuordnet. Sobald man annimmt, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 den Punkten P eines und desselben Ringes entsprechen, führt das neue System auf das frühere zurück. Zwischen den Vektoren u_1, u_2, u_3 besteht nämlich die Beziehung

$$u_1 + u_2 + u_3 = 0.$$

Daraus folgt, dass der Endpunkt II des aus u_1, u_2, u_3 resultirenden Vectors $P II$ eine ebene Curve beschreibt. Wir ziehen durch P eine Axe w , welche gegen die Axen u_1, u_2, u_3 gleich geneigt ist; der Punkt II bewegt sich dann in

der Ebene, welche durch P senkrecht zu w hindurchgeht. Wir legen nun durch w und u_1 eine Ebene und ziehen in dieser v_1 senkrecht zu w . Endlich ziehen wir v_2 senkrecht zu v_1 und zu w , sodass der Winkel $v_2 u_2$ ein spitzer wird. Für die Vectorcomponenten nach w , v_1 , v_2 ergeben sich dann die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} w &= u_1 \sqrt{\frac{1}{3}} + u_2 \sqrt{\frac{1}{3}} + u_3 \sqrt{\frac{1}{3}}, \\ v_1 &= u_1 \sqrt{\frac{2}{3}} - u_2 \sqrt{\frac{1}{6}} - u_3 \sqrt{\frac{1}{6}}, \\ v_2 &= u_2 \sqrt{\frac{1}{2}} - u_3 \sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir hier für u_1 , u_2 , u_3 ihre Werte aus den Gleichungen (8), so ergibt sich:

$$\begin{aligned} w &= 0, \\ v_1 &= \sum_n A_n \sqrt{\frac{3}{2}} \sin n \varphi \sin 2 \pi p t, \\ v_2 &= \sum_n A_n \sqrt{\frac{3}{2}} \sin n \varphi \cos 2 \pi p t. \end{aligned}$$

Die beiden letzten Ausdrücke sind im wesentlichen identisch mit den Ausdrücken (1) und (2) und geben also zu denselben Betrachtungen Veranlassung wie diese.

7. Lebendige Kraft des schwingenden Ringes. Wenn man den Elementen unseres Ringes ponderable Masse zuschreibt, so besitzt er bei seiner Schwingung eine gewisse lebendige Kraft. Ehe wir zu ihrer Berechnung übergehen, wollen wir die in den Gleichungen (1) und (2) gemachten Ansätze noch etwas erweitern, indem wir schreiben:

$$(10) \quad \begin{cases} u_1 = \sum_n A_n \sin(n \varphi + \delta_n) \sin 2 \pi p_n (t - d_n), \\ u_2 = \sum_n A_n \sin(n \varphi + \delta_n) \cos 2 \pi p_n (t - d_n), \end{cases}$$

Die Differentialgleichungen (6), (7) und (8) werden dadurch nicht geändert. Aus den neuen Ansätzen ergeben sich für die Geschwindigkeiten die folgenden Werte:

$$\begin{aligned} u'_1 &= \sum_n A_n 2 \pi p_n \sin(n \varphi + \delta_n) \cos 2 \pi p_n (t - d_n), \\ u'_2 &= - \sum_n A_n 2 \pi p_n \sin(n \varphi + \delta_n) \sin 2 \pi p_n (t - d_n). \end{aligned}$$

Ist μ die dem Centriwinkel 1 entsprechende Masse des Ringes, so kommt auf das Bogenelement $d\varphi$ die Masse $\mu d\varphi$; die dem Elemente $d\varphi$ entsprechende lebendige Kraft ist somit zur Zeit t gleich:

$$\begin{aligned} l d\varphi &= \frac{\mu}{2} (u_1'^2 + u_2'^2) d\varphi \\ &= \sum \frac{\mu}{2} A_i A_k 4 \pi^2 p_i p_k \sin(i\varphi + \delta_i) \sin(k\varphi + \delta_k) d\varphi \\ &\quad \times \cos 2\pi p_i(t - d_i) \cos 2\pi p_k(t - d_k) \\ &\quad + \sum \frac{\mu}{2} A_i A_k 4 \pi^2 p_i p_k \sin(i\varphi + \delta_i) \sin(k\varphi + \delta_k) d\varphi \\ &\quad \times \sin 2\pi p_i(t - d_i) \sin 2\pi p_k(t - d_k), \end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned} l d\varphi &= \sum \frac{\mu}{2} A_i A_k 4 \pi^2 p_i p_k \sin(i\varphi + \delta_i) \sin(k\varphi + \delta_k) d\varphi \\ &\quad \times \cos 2\pi \{(p_i - p_k)t - p_i d_i + p_k d_k\}. \end{aligned}$$

Wir wollen diesen Ausdruck nun nach doppelter Richtung verwerten; einmal wollen wir für ein einzelnes Element des Ringes den Mittelwert berechnen, welchen die lebendige Kraft für einen grösseren Zeitraum T annimmt. Sodann soll der Wert bestimmt werden, welchen die lebendige Kraft des ganzen Ringes zu irgend einer Zeit t besitzt.

Der Mittelwert $\overline{l d\varphi}$ hängt ab von dem Integrale:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \cos 2\pi \{(p_i - p_k)t - p_i d_i + p_k d_k\} dt.$$

Solange p und k verschieden sind, hat dasselbe den Wert:

$$\frac{\sin 2\pi \{(p_i - p_k)T - p_i d_i + p_k d_k\} + \sin 2\pi (p_i d_i - p_k d_k)}{2\pi (p_i - p_k)T}.$$

Durch Vergrößerung von T kann dieser Wert unter jede beliebige Grösse herabgedrückt werden. Es bleiben dann in dem Ausdruck für den Mittelwert der lebendigen Kraft nur die Glieder mit gleichem i und k übrig. Bei diesen aber ist $\cos 2\pi \{(p_i - p_k)t - p_i d_i + p_k d_k\} = 1$; der Mittelwert der lebendigen Kraft für ein beliebiges Element $d\varphi$ wird somit

$$\overline{l d\varphi} = \sum \frac{\mu}{2} A_n^2 4 \pi^2 p_n^2 \sin^2(n\varphi + \delta_n) d\varphi.$$

Die mittlere lebendige Kraft setzt sich linear zusammen aus den mittleren lebendigen Kräften, welche den einzelnen Partialschwingungen entsprechen.

Die lebendige Kraft, welche der ganze Ring zu irgend einer Zeit t besitzt, hängt ab von dem Integrale:

$$\int_0^{2\pi} \sin(i\varphi + \delta_i) \sin(k\varphi + \delta_k) d\varphi.$$

Das Integral ist Null, solange i und k verschieden ist. Für $i = k$ ergibt sich:

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(i\varphi + \delta_i) d\varphi = \pi.$$

Die lebendige Kraft des ganzen Ringes ist somit:

$$L = \sum \frac{\mu}{2} A_n^2 4\pi^3 p_n^2,$$

Sie ist unabhängig von t und setzt sich gleichfalls linear aus den lebendigen Kräften der Partialschwingungen zusammen.

Die niedrigste beobachtete Partialschwingung erhalten wir mit $n=3$. Bezeichnen wir die Intensitäten der aufeinanderfolgenden Partialschwingungen durch $J_3, J_4 \dots, J_n \dots$, so ergibt sich:

$$J_3 = \frac{\mu}{2} A_3^2 4\pi^3 p_3^2, \quad J_n = \frac{\mu}{2} A_n^2 4\pi^3 p_n^2;$$

somit

$$\frac{A_n}{A_3} = \sqrt{\frac{J_n}{J_3} \frac{p_3}{p_n}}.$$

8. Die von einem Ringelemente durchlaufene Bahn. Von den zweifach unendlichen Möglichkeiten, nach denen sich die Partialschwingungen des Ringes übereinander lagern können, soll im Folgenden nur eine einzige berücksichtigt werden. Wir setzen:

$$u_1 = \sum_n A_n \cos n\varphi \cos 2\pi p_n t \quad \text{und} \quad u_2 = \sum_n A_n \cos n\varphi \sin 2\pi p_n t.$$

Betrachten wir insbesondere den Punkt des Ringes, für welchen $\varphi = 0$, so ist:

$$u_1^0 = \sum_n A_n \cos 2\pi p_n t, \quad u_2^0 = \sum_n A_n \sin 2\pi p_n t.$$

Nach der Vorstellung, die wir uns über die Schwingungen des Ringes gebildet haben, sind u_1^0 und u_2^0 Verschiebungscomponenten nach zwei zu einander senkrechten Richtungen, nach den Axen x und y . Wir setzen:

$$A_n \cos 2\pi p_n t = \xi_n, \quad A_n \sin 2\pi p_n t = \eta_n,$$

dann wird:

$$u_1^0 = \xi_3 + \xi_4 + \dots, \quad u_2^0 = \eta_3 + \eta_4 + \dots$$

Für die Verschiebungscomponenten ξ_n und η_n gilt die Gleichung:

$$\xi_n^2 + \eta_n^2 = A_n^2,$$

d. h. der Endpunkt des aus ξ_n und η_n construirten Vectors durchläuft einen Kreis, dessen Halbmesser gleich A_n ist. Zur Zeit $t=0$ ist $\xi_n = A_n$, $\eta_n = 0$. Der Endpunkt des Vectors befindet sich auf der x -Axe; zur Zeit $t=(1/4 p_n)$ ist $\xi_n = 0$, $\eta_n = A_n$, der Endpunkt des Vectors liegt auf der y -Axe und hat somit in der Richtung von der x -Axe zu der y -Axe ein Viertel des Kreisumfanges zurückgelegt. Bezeichnen wir den Winkel, welchen der aus ξ_n und η_n construirte Vector zu irgend einer Zeit mit der x -Axe einschliesst durch ϑ_n , so ist:

$$\vartheta_n = 2\pi p_n t.$$

Hiernach ist es leicht, für irgend eine Zeit t den aus ξ_n und η_n resultirenden Vector zu construiren. Nun ist aber der Ort, welchen der betrachtete Punkt des Ringes einnimmt, gegeben durch die Projectionen u_1^0 und u_2^0 seines Radiusvectors. Aus den für u_1^0 und u_2^0 geltenden Formeln aber folgt, dass man den Radiusvector des betrachteten Ringpunktes erhält, wenn man die aus A_n und ϑ_n construirten, den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Vektoren geometrisch addirt.

Der Vector (ξ_3, η_3) durchläuft den zugehörigen Kreis in der Zeit $1/p_3$, er beschreibt also in dieser Zeit den Winkel 2π . Der Vector (ξ_n, η_n) durchläuft den entsprechenden Kreis in der Zeit $1/p_n$; während also der Vector (ξ_3, η_3) den Winkel 2π beschreibt, beschreibt der Vector (ξ_n, η_n) gleichzeitig den Winkel $2\pi(p_n/p_3)$.

Wir wollen diese allgemeinen Betrachtungen endlich noch erläutern an dem Beispiele des Na. Für die aus 7 Linien bestehende erste Serie des Natriumspectrums ergeben sich aus den Messungen von Kayser und Runge die Zahlen:

n	p_n/v	$\sqrt{J_n/J_3}$	a_n/a_3	p_n/p_3
3	16960,19	1	1	1
4	30274,87	0,71	0,398	1,785055
5	35051,93	0,57	0,276	2,066719
6	37307,03	0,50	0,227	2,199680
7	38550,80	0,45	0,198	2,273007
8	39310,49	0,41	0,177	2,317809
9	39805,27	0,41	0,175	2,346983

Aus dem Ansatz:

$$u_1^0 = \sum A_n \cos 2\pi p_n t, \quad u_2^0 = \sum A_n \sin 2\pi p_n t$$

folgt, dass zur Zeit $t=0$ alle den einzelnen Partialschwingungen entsprechenden Vektoren mit der Richtung der x -Axe zusammenfallen. Es liegt somit zu der Zeit $t=0$ auch der Endpunkt des aus den Componenten u_1^0 und u_2^0 resultirenden Vectors, d. h. der betrachtete Punkt des Ringes auf der x -Axe. Ein allerdings nur sehr kleiner Teil der weiteren Bewegung wird durch die Figur veranschaulicht. Die Anfangslage des betrachteten Punktes ist mit 0 bezeichnet. Der im Innern der Figur gezeichnete Kreis wird von dem Vector (ξ_3, η_3) in der Zeit $1/p_3$ durchlaufen. Während nun der Vector (ξ_3, η_3) ein Zehntel seiner Bahn durchläuft, kommt der betrachtete Ringpunkt nach 1; während der Vector (ξ_3, η_3) zwei Zehntel des entsprechenden Kreises beschreibt, kommt der Ringpunkt nach 2 etc. Die Zeit, welche der betrachtete Ringpunkt braucht, um von einem der numerirten Punkte der Bahn zu dem nächstfolgenden zu gelangen, ist also immer gleich dem zehnten Teil der Umlaufszeit des Vectors (ξ_3, η_3) . Die nach den Punkten 1, 2, 3 . . . hingehenden Linienzüge geben die jeweiligen Lagen der Vektoren (ξ_3, η_3) , (ξ_4, η_4) . . . (ξ_9, η_9) . Die dem ersten Umlauf des Vectors (ξ_3, η_3) entsprechenden Linien sind ausgezogen, die dem zweiten Umlauf entsprechenden sind gestrichelt.

9. Jede Theorie der Spectrallinien, welche ein richtiges Bild der Wirklichkeit geben soll, muss von den Veränderungen Rechenschaft geben, welche die Spectrallinien durch äussere Einwirkungen erfahren. In erster Linie wird man dabei an die von Zeeman entdeckten magnetischen Wirkungen denken.

Die allgemeine Möglichkeit einer solchen Wirkung ergibt sich auch bei der im vorhergehenden benutzten Vorstellung. Man hat nur nötig anzunehmen, dass der schwingende Ring eine elektrische Ladung besitze; stehen die Kraftlinien des magnetischen Feldes senkrecht zu der Ebene, in welcher sich ein

bestimmter Punkt des Ringes bewegt, so werden transversale magnetische Kräfte auf ihn wirken, welche seine Bewegung und die Perioden seiner Schwingung verändern.

Man kann auch ausgehen von der Gleichung (8) und versuchen, sie durch Zusatzglieder zu ergänzen, welche einer magnetischen Einwirkung Rechnung tragen. Man kann beispielsweise zwei zu einander senkrechte Vektoren u und v den Bedingungsgleichungen unterwerfen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{10} u}{\partial \varphi^8 \partial t^2} + 4 \pi^2 a^2 \frac{\partial^8 u}{\partial \varphi^8} + 4 \pi^2 b^2 \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + 4 \pi^2 c^2 u \\ + 8 \pi^2 a b \frac{\partial^6 u}{\partial \varphi^6} - 8 \pi^2 a c \frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \\ - \frac{e R}{m} \frac{\partial^8 v}{\partial \varphi^8 \partial t} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^{10} v}{\partial \varphi^8 \partial t^2} + 4 \pi^2 a^2 \frac{\partial^8 v}{\partial \varphi^8} + 4 \pi^2 b^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + 4 \pi^2 c^2 v \\ + 8 \pi^2 a b \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} - 8 \pi^2 b c \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} \\ + \frac{e R}{m} \frac{\partial^8 u}{\partial \varphi^8 \partial t} = 0, \end{aligned}$$

Die Gleichungen werden befriedigt durch die Ansätze:

$$u = \sum A_n \sin n \varphi \sin 2 \pi p t$$

und

$$v = \sum A_n \sin n \varphi \cos 2 \pi p t,$$

wenn

$$p' = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4} + \frac{e R}{4 \pi m}.$$

Setzt man andererseits:

$$u = \sum A_n \sin n \varphi \cos 2 \pi p t$$

und

$$v = \sum A_n \sin n \varphi \sin 2 \pi p t,$$

so werden die Gleichungen befriedigt, wenn:

$$p'' = a - \frac{b}{n^2} - \frac{c}{n^4} - \frac{e R}{2 \pi m}.$$

Für die Differenz der Schwingungszahlen ergibt sich:

$$p' - p'' = \frac{e R}{2 \pi m}.$$

Dies ist die Formel, welche sich in der elementaren Theorie des Zeemanphänomens für die Differenz der Schwingungszahlen der circularen Wellen ergibt. Die Uebereinstimmung beruht aber auf einer willkürlichen Ergänzung der Gleichung (8); wirkliche Bedeutung würde sie erst bekommen, wenn es gelänge, die Gleichungen (8) mit den allgemeinen Theorien der Elektrooptik in Beziehung zu bringen.

(Eingegangen 9. Januar 1900.)