20.

Zur Theorie des Potentials.

(Von Herrn *Jul. Weingarten*, Stud. Math. zu Berlin.)

Die Theorie der Anziehung, die ein Körper, dessen Theile nach dem *Newtonschen* Gesetz wirken, auf einen materiellen Punct ausübt, läßt sich bekanntlich auf die Betrachtung einer einzigen Function der Coordinaten des angezogenen Punctes zurückführen, aus der sich durch Derivation die Componenten der Gesamt-Anziehung ergeben. Diese Function wird nach *Gaußs* mit dem Namen *Potential* bezeichnet, und ist ihrer Wichtigkeit wegen Gegenstand vieler Untersuchungen geworden.

Im Folgenden wird eine merkwürdige Eigenschaft des Potentials auf einem von den bisherigen verschiedenen Wege hergeleitet werden.

Man suche zuvörderst den Werth des dreifachen bestimmten Integrals

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos[u(x-a) + v(y-b) + w(z-c)]}{u^2 + v^2 + w^2} du dv dw,$$

der offenbar bestimmt und endlich sein wird. Für $u=0$, $v=0$, $w=0$ ist allerdings das Element des Integrals ∞ , allein dieser Umstand verschwindet durch die Einführung von Polarcoordinaten für u , v , w . Betrachtet man nämlich u , v , w als rechtwinklige Coordinaten, und zieht durch den Anfang derselben eine Linie, so daß die Cosinus der Winkel, welche sie mit den Axen bildet resp. $\frac{x-a}{r}$, $\frac{y-b}{r}$, $\frac{z-c}{r}$ sind, wo $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ ist, so bildet dieselbe mit dem Radiusvector $\varrho = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ einen Winkel ϑ , der durch die Gleichung

$$\cos \vartheta = \frac{u}{\varrho} \frac{(x-a)}{r} + \frac{v}{\varrho} \frac{(y-b)}{r} + \frac{w}{\varrho} \frac{(z-c)}{r}$$

bestimmt wird; also ist

$$\varrho r \cos \vartheta = u(x-a) + v(y-b) + w(z-c).$$

Nimmt man ferner diese Linie zur Axe von Polarcoordinaten an, so ist das Raum-Element gleich $\varrho^2 \sin \vartheta d\vartheta d\psi d\varrho$, wo ψ den Winkel bedeutet, welchen die durch die angenommene Axe und durch den Radiusvector ϱ gehende

Ebene, mit einer beliebigen festen Ebene bildet. Obiges Integral verwandelt sich also in

$$\iiint \cos \{r \varrho \cos \vartheta\} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\psi \, d\varrho.$$

Die Grenzen dieses Integrals sind, damit es wiederum den unendlichen Raum umfasse, 0 und π in Bezug auf ϑ , 0 und 2π in Bezug auf ψ und 0 und ∞ in Bezug auf ϱ .

Die Integration nach ψ giebt:

$$2\pi \int_0^\infty \int_0^\pi \cos \{r \varrho \cos \vartheta\} \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varrho;$$

welches sich durch Ausführung der Integration nach ϑ in

$$4\pi \int_0^\infty \frac{\sin r \varrho}{\varrho r} \, d\varrho = \frac{4\pi}{r} \int_0^\infty \frac{\sin r \varrho}{\varrho} \, d\varrho$$

verwandelt. Nun ist $\int_0^\infty \frac{\sin r \varrho}{\varrho} \, d\varrho = \frac{1}{2}\pi$, folglich ergibt sich

$$\frac{2\pi^2}{r}$$

für den Werth des gesuchten Integrals. Man hat folglich:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{2\pi^2} \iiint_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos [u(x-a) + v(y-b) + w(z-c)]}{u^2 + v^2 + w^2} \, du \, dv \, dw.$$

Bezeichnen x, y, z die Coordinaten eines Elements eines nach dem *Newtonschen* Gesetz anziehenden Körpers und a, b, c die Coordinaten des angezogenen Punctes, so ist bekanntlich das Potential des anziehenden Körpers in Bezug auf den angezogenen Punct:

$$V = \int \frac{dm}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \int \frac{dm}{r},$$

wo dm das zu den Coordinaten x, y, z gehörende Massen-Element bedeutet. Die Integration erstreckt sich über die Masse des anziehenden Körpers.

Ist $f(x, y, z)$ die Dichtigkeit des anziehenden Körpers im Puncte x, y, z , so ist $dm = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$, also

$$V = \iiint \frac{f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{r};$$

wobei sich die Integration auf das ganze Volumen des anziehenden Körpers bezieht.

Setzt man für $\frac{1}{r}$ den oben gefundenen Werth, und schreibt noch $\frac{4\pi}{(2\pi)^3}$ statt $\frac{1}{2\pi^2}$, so erhält man

$$V = \frac{4\pi}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x, y, z) \cos[u(x-a) + v(y-b) + w(z-c)]}{u^2 + v^2 + w^2} dx dy dz du dv dw.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{d^2 V}{da^2} + \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2} = -4\pi \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \cos[u(x-a) + v(y-b) + w(z-c)] dx dy dz du dv dw.$$

Nun ist aber das Integral

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \iiint\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \cos[u(x-a) + v(y-b) + w(z-c)] dx dy dz du dv dw$$

die *Fouriersche* Formel, und reducirt sich daher auf $f(a, b, c)$; und zwar, da sich die Integration auf xyz über ein gewisses Volumen, nämlich über das des anziehenden Körpers erstreckt, nur für solche Werthe von a, b und c , die einen Punkt *innerhalb* dieses Volumens bestimmen. Dagegen für Werthe von a, b und c , die einem Punkt *aufserhalb* desselben angehören, wird das 6fache bestimmte Integral Null; wie aus der Theorie der *Fourierschen* Formeln bekannt ist.

$f(a, b, c)$ bedeutet die Dichtigkeit im angezogenen Punkte. Bezeichnet man dieselbe durch D , so hat man:

1) Falls der angezogene Punkt *im* anziehenden Körper liegt:

$$\frac{d^2 V}{da^2} + \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2} = -4\pi D.$$

2) Falls derselbe *aufserhalb* des anziehenden Körpers liegt

$$\frac{d^2 V}{da^2} + \frac{d^2 V}{db^2} + \frac{d^2 V}{dc^2} = 0.$$

Für Stetigkeits-Unterbrechungen der Function $f(x, y, z)$ würde die erstere Formel dieselben Modificationen erleiden, wie die *Fouriersche* Formel selbst.

(Man vergl. die berühmte Abhandlung von *Gaußs*: Allgemeine Lehrsätze etc. in den Resultaten des magnetischen Vereins v. J. 1839.)

E r r a t a. Vol. XLVII, p. 225 etc.

page	line	fault	correction
225	4	cyclie	cyclic
	10	z^3	z^2
	18		(insert) etc.
	23}	A, B, C	A', B', C'
	25}		
226	28		
227	1	cone	surface
228	2	set	get
	3}	C, C_2	c, c_2
	4}		
	9		
	11	be two roots	be the two roots
	19	closet	closest
	23	tracted	traced
	28	in	is
	28	wz	nz
229	18	troughout	throughout
230	16	termes	terms
	—	quadrius	squarius
231	21	ϖ, ϖ' and ϖ	ϖ and ϖ'
	32	series	sines

Druckfehler in diesem Bande.

- S. 6 Z. 7 v. u. statt „die Summe des Products“ lies „die Summe und das Product“
 — 17 — 8 v. o. st. „ $A_1 A_2 \dots A \equiv A_n \dots A_2 A_1$ “ l. „ $A_1 A_2 \dots A_n = A_n \dots A_2 A_1$ “
 — — — 17 u. 19. v. o. fallen die Worte „dies“ und „und“ weg.
 — 28 — 7 v. u. statt „Das Product ... $a_1, \alpha_1, \dots a_n, \alpha_n$ betrachtet, deren keine zwei aufeinander folgende vereinigt liegen), ist Null, wenn ..., deren Angriffspunct x ist,“ lies „Das Product ... $a_1, \alpha_1, \dots a_n, \alpha_n$, deren keine zwei aufeinander folgende vereinigt liegen, ist Null, wenn ..., deren Anfangspunct x ist,“
 — 29 — 5 v. o. statt „in der Geraden“ lies „in den Geraden“
 — 33 — 15 v. o. lies „so“ statt „also“
 — 48 — 9 v. u. l. „und bedeutet $x\mathfrak{R}$ “ st. „und bedeutet $\mathfrak{R}$ “
 — 50 — 5 v. o. l. „In dem Producte $Y(rA_2)\alpha$ kann man“ st. „In dem Producte $Y(rA_2\alpha)$ kann man“
 — 50 — 13 v. o. l. „ $rA_2\alpha \equiv ra_2\alpha$ “ st. „ $rA_2\alpha \equiv r_2\alpha$ “
 — 51 — 13 v. o. l. „ $A \equiv cb$ “ st. „ $A \equiv c$ “
 — 54 — 8 v. u. l. „ $\equiv yc$ “ st. „ $\equiv cyc$ “
 — 55 — 12 v. u. l. „einen beliebigen Punct k_2 “ st. „einen beliebigen Punct a_2 “
 — — — 11 v. u. l. „eine beliebige Ebene a_2 “ st. „eine beliebige Ebene a_2 “
 — — — 10 v. u. l. „fortschreitend mit k_2 “ st. „fortschreitend mit a_2 “
 — — — 4 v. u. l. „Ihr Durchschnittspunct sei k_3 “ st. „Ihr Durchschnittspunct sei a_3 “
 — — — 2 v. u. l. „fortschreitend mit k_3 “ st. „fortschreitend mit a_3 “
 — 56 — 9 v. o. l. „ $\equiv (a_1, b_1, c_1, \partial_1)k_2\alpha_2k_3\alpha_3a_4\alpha$ “ st. „ $\equiv (a_1, b_1, c_1, \partial_1)a_2\alpha_2a_3\alpha_4\alpha$ “
 — — — 12 v. o. l. „zuerst durch den Punct k_2 “ st. „zuerst durch den Punct a_2 “
 — — — 13 v. o. l. „durch den Punct k_3 “ st. „durch den Punct a_3 “
 — 59 — 13 v. o. l. „gemeinsame Punct der Gleichung (1.)“ st. „gemeinsame Punct (1.)“
 — 60 — 6 v. o. l. „ $\varphi_1 \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1$ “ st. „ $\varphi \equiv \varphi\gamma c\beta b\alpha a_1$ “
 — 63 — 12 v. o. l. „wurde“ st. „werde“