Propriété nouvelle de la méthode des moindres carrés.

Par M. *E. Goedseels*,

administrateur-inspecteur de l'Observatoire royal de Belgique, professeur à l'Université catholique de Louvain.

1. Le but réel de ce travail est de faire connaître une méthode nouvelle pour résoudre les systèmes d'équations de condition linéaires*)

$$\left. \begin{array}{l} A_1 X + B_1 Y + C_1 Z = M_1 \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 Z = M_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ A_n X + B_n Y + C_n Z = M_n \end{array} \right\} (1)$$

Seulement comme cette méthode conduit aux mêmes solutions finales que la méthode des moindres carrés, et comme nous désirons ne pas soulever les controverses auxquelles cette dernière méthode a donné si souvent lieu, nous nous sommes contentés d'intituler notre travail »Propriété nouvelle de la méthode des moindres carrés«.

2. Considérons une fonction linéaire quelconque

$$p_1 M_1 + p_2 M_2 \cdots + p_n M_n = \Sigma p M$$

de n variables $M_1, M_2, \dots, M_n$, dans laquelle les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_n$ sont exacts (positifs ou négatifs), tandis que les variables sont affectées d'erreurs inconnues $e_1, e_2, \dots, e_n$ en ayant pour approximations respectives $m_1, m_2, \dots, m_n$.

L'approximation de la fonction linéaire ci-dessus est $\Sigma m|\rho|, **)$ seulement comme il nous a été impossible de résoudre au moyen de cette expression les problèmes que nous rencontrerons dans ce travail, nous l'avons remplacée par la quantité $\sqrt{n \Sigma m^2 \rho^2}$ qui est, on le sait, égale ou supérieure à la précédente.

3. Lorsqu'il s'agit d'une fonction linéaire $F(M_1, M_2, \dots M_n)$ et que les variables sont suffisamment approchées pour que l'on puisse négliger les termes d'ordres supérieurs au premier, ce qui est le cas dans toutes les observations soignées, l'erreur $F(M_1 + e_1, M_2 + e_2, \dots M_n + e_n) - F(M_1, M_2, \dots M_n)$ de la fonction peut être mise sous la forme

$$e_1 \frac{dF}{dM_1} + e_2 \frac{dF}{dM_2} \cdots + e_n \frac{dF}{dM_n}$$

L'approximation de la fonction vaut, par conséquent,

$$\sum m \left| \frac{dF}{dM} \right| \text{ et peut \u00eatre remplac\u00e9e par } \sqrt{n \sum m^2 \left(\frac{dF}{dM} \right)^2}.$$

4. En opérant sur des équations de condition

$$\left. \begin{aligned} A_1 X + B_1 Y + C_1 Z &= M_1 \\ A_2 X + B_2 Y + C_2 Z &= M_2 \\ . &. \\ A_n X + B_n Y + C_n Z &= M_n \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

dont les seconds membres avaient des approximations différentes, nous avons trouvé un résultat identique à celui que l'on obtiendrait en divisant préalablement chaque équation par une quantité proportionnelle à l'approximation de son second membre.

Pour plus de clarté nous supposerons, dans la suite, cette division préalable effectuée, de sorte que tous les seconds membres auront la même approximation m .

La fonction $\Sigma p M$ aura ainsi l'approximation

$$m\sqrt{n \sum p^2},$$

et la fonction $F(M_1, M_2 \dots M_n)$ l'approximation

$$m \sqrt{n \Sigma \left(\frac{dF}{dM} \right)^2}.$$

5. Théorème I. Quel que soit le procédé suivi pour déduire une valeur finale linéaire $X_1 = \Sigma pM$ des équations (2), les coefficients $p_1, p_2, \dots, p_n$ satisfont aux relations

$$\Sigma p A = 1 \quad \Sigma p B = 0 \quad \Sigma p C = 0 \quad (3)$$

et la valeur finale ci-dessus fait nécessairement partie de la série indéfinie des valeurs de X , que l'on peut former en multipliant les équations (2) par les diverses séries de quantités $p_1, p_2 \dots p_n$ répondant aux relations (3), et en les additionnant ensuite membre à membre.

En effet, puisque la formule finale

$$X_1 = \Sigma p M$$

découle, par hypothèse, des équations (2), elle doit être vérifiée pour tout système de valeurs $X_1, Y, Z, M_1, M_2, \dots, M_n$ qui satisfait à ces équations.

Or, on peut former un tel système de valeurs, en se donnant arbitrairement X, Y, Z , et en calculant $M_1, M_2, \dots, M_n$ au moyen des équations (2).

*) Nous raisonnerons sur des équations à trois inconnues et sur la valeur finale de X , mais nos considérations seront générales.

**) $|p|$ désigne la valeur absolue de p .

En les résolvant par rapport à Σp^2 et en posant :

$$d = \frac{1}{nm^2} \begin{vmatrix} [MM], [AM], [BM], [CM] \\ [MA], [AA], [BA], [CA] \\ [MB], [AB], [BB], [CB] \\ [MC], [AC], [BC], [CC] \end{vmatrix}$$

$$a = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} [AA], [BA], [CA] \\ [AB], [BB], [CB] \\ [AC], [BC], [CC] \end{vmatrix}$$

$$b = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} [MA], [BA], [CA] \\ [MB], [BB], [CB] \\ [MC], [BC], [CC] \end{vmatrix}$$

$$c = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} [MM], [BM], [CM] \\ [MB], [BB], [CB] \\ [MC], [BC], [CC] \end{vmatrix}$$

$$\frac{ac - b^2}{a} = nm^2 (\Sigma D^2 \Sigma K^2 - \Sigma DK) : \Sigma (A_r, B_s, C_t, M_u)^2$$

Or, on sait, par une propriété algébrique, que la différence $\Sigma D^2 \Sigma K^2 - \Sigma DK$ vaut une somme de carrés de la forme $(D_r, K_s)^2$.

Par conséquent le rapport $\frac{ac - b^2}{a}$ vaut le quotient

$$nm^2 \Sigma (D_r, K_s)^2 : \Sigma (A_r, B_s, C_t, M_u)^2,$$

et est toujours positif.

3) L'approximation $\sqrt{aX^2 - 2bX + c}$ varie avec X jusqu'à $+\infty$. Elle passe par son minimum $\sqrt{\frac{ac - b^2}{a}}$ pour $X = \frac{b}{a}$. Nous désignerons ce minimum par x .

$$G = \frac{b}{a} - x \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$$

La valeur $\frac{1}{2}(G + P)$, la plus approchée que l'on connaisse, est donc encore la solution $\frac{b}{a}$ des moindres carrés.

Si l'on avait $a = 1$, l'approximation $\frac{1}{2}(P - G)$ serait nulle, et $\frac{1}{2}(G + P)$ serait la valeur exacte.

Si l'on avait $a < 1$, le radical serait imaginaire, et le problème serait absurde. Il suffit de remonter à la valeur de a , il est facile de calculer la valeur de m en dessous de laquelle cette anomalie se présente.

11. Conclusion. Les solutions finales de la méthode des moindres carrés sont les plus approchées qu'on puisse trouver, si l'on évalue les approximations des fonctions liné-

on obtient finalement

$$m \sqrt{n \Sigma p^2} = \sqrt{aX^2 - 2bX + c}$$

9. Les quantités a, b, c et $\sqrt{aX^2 - 2bX + c}$ donnent lieu aux remarques suivantes :

1) Le rapport $\frac{b}{a}$ est la solution finale fournie par les moindres carrés.

2) Si l'on applique le théorème de Van Geer*) aux déterminants qui figurent dans a, b, c , on obtient :

$$a = nm^2 \Sigma (A_r, B_s, C_t, M_u)^2 : \Sigma (A_r, B_s, C_t, M_u)^2$$

$$b = nm^2 \Sigma (B_r, C_s, M_u) (A_r, B_s, C_t) : \Sigma (A_r, B_s, C_t, M_u)^2$$

$$c = nm^2 \Sigma (B_r, C_s, M_u)^2 - \Sigma (A_r, B_s, C_t, M_u)^2$$

Les quantités a et c sont donc essentiellement positives.

D'autre part, si l'on désigne les déterminants (A_r, B_s, C_t, M_u) par $D_1, D_2, \dots$ et les déterminants (B_r, C_s, M_u) par $K_1, K_2, \dots$ on obtient :

10. Si l'on retranche l'approximation $\sqrt{aX^2 - 2bX + c}$ de la solution correspondante, on obtient une différence inférieure à la valeur exacte de l'inconnue.

Le maximum G de cette différence est donc une limite inférieure de l'inconnue.

De même le minimum P de la somme

$$X + \sqrt{aX^2 - 2bX + c}$$

en est une limite supérieure.

La demi somme $\frac{1}{2}(G + P)$ est donc la valeur la plus approchée que l'on connaisse, et son approximation vaut $\frac{1}{2}(P - G)$.

En calculant G et P on obtient

$$P = \frac{b}{a} + x \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$$

aires par l'expression $m \sqrt{n \Sigma p^2}$. L'utilité de ces solutions finales est donc indiscutable, abstraction faite de toute considération relative aux probabilités, aussi longtemps qu'on n'aura pas trouvé une méthode permettant de calculer pratiquement les solutions finales les plus approchées correspondant à l'expression $m \Sigma |p|$ de l'approximation.

Le calcul est facile dans le cas d'une seule inconnue, et conduit à la moyenne arithmétique de la plus petite et de la plus grande des valeurs observées (voir notre Théorie des erreurs, Chapitre IV).

Mais les difficultés que l'on rencontre dans les cas à deux ou plusieurs inconnues sont d'un ordre tel que nous les croyons insolubles au point de vue pratique.

Uccle, le 20 Février 1903.

E. Goedseels.

*) Voir Mansion, Théorie élémentaire des Déterminants, ou notre Théorie des erreurs d'observation No. 89.