Ueber gewisse Differentialgleichungen.

Von W. FRAHM in Tübingen.

1. In einer berühmten Abhandlung über schiefe Determinanten stellt Cayley die Aufgabe, diejenigen Differentialgleichungen aufzusuchen, welche im Falle von beliebig vielen Veränderlichen den bekannten Euler'schen, bei dem Problem der Rotation eines starren Körpers angewendeten entsprechen. Es ist mir gelungen, diese Gleichungen aufzustellen und eine Anzahl von Integralen derselben aufzufinden. Man kann diese Gleichungen in eine gewisse kanonische Form bringen, worüber zunächst der folgende Satz angeführt sein möge:

Es sei das System von $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ Differentialgleichungen:

$$(1) \quad 0 = T_{ik} \frac{dr_{ik}}{dt} + \sum_{\mu} (T_{i\mu} - T_{k\mu}) r_{i\mu} r_{k\mu} \quad (i, k, \mu = 1, 2, \dots, n),$$

wo $r_{ik} = -r_{ki}$, die von t abhängenden Veränderlichen, $T_{ik} = T_{ki}$, $T_{ii} = 0$ aber Constante bedeuten, vorgelegt; ist dann λ ein willkürlicher Parameter, so ist die Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & T_{12}r_{12} & T_{13}r_{13} & \dots & T_{1n}r_{1n} \\ T_{21}r_{21} & \lambda & T_{23}r_{23} & \dots & T_{2n}r_{2n} \\ T_{31}r_{31} & T_{32}r_{32} & \lambda & \dots & T_{3n}r_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ T_{n1}r_{n1} & T_{n2}r_{n2} & \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix}$$

ein Integral jenes Systems. Ein weiteres Integral ist:

$$T_{12}r_{12}^2 + T_{13}r_{13}^2 + \dots = \frac{1}{2} \sum_{i,k} T_{ik}r_{ik}^2 = \text{const.}$$

In der Entwicklung der eben geschriebenen Determinante verschwinden bekanntlich die Coefficienten der ungeraden oder der geraden

Potenzen von λ , je nachdem n gerade oder ungerade ist (Baltzer, Det. S. 62). Wenn also κ die grösste ganze in $\frac{n}{2}$ enthaltene Zahl bezeichnet, so giebt jene Entwicklung κ Integrale, indem man jeden Coefficienten einer beliebigen Constanten gleich setzt. Für $n = 3$ hat man die erwähnten Euler'schen Gleichungen, und kann mit Hülfe der gefundenen Integrale sofort das Problem auf Quadraturen zurückführen. Noch mag bemerkt werden, dass der Multiplicator der Gleichungen (1) gleich Eins ist, indem r_{ik} unter dem Summenzeichen nicht vorkommt.

II. Um zu zeigen, dass die Gleichungen (1) wirklich den Euler'schen entsprechen und um sofort zu der kanonischen Form zu gelangen, bemerke ich, dass jene bekanntlich auf rein algebraischem Wege durch eine Umformung der drei Differentialgleichungen erhalten werden, welche die Erhaltung der Momente ausdrücken. Aber die Letzteren sind von einer Form, so, dass man sofort übersieht, welche Gleichungen im Falle von beliebig vielen Veränderlichen an deren Stelle treten müssen. Des kürzeren Ausdrucks wegen wählen wir die geometrische Bezeichnungsweise und betrachten ein Element in einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen. Um aber noch mehr Uebersichtlichkeit zu gewinnen, beschränken wir uns auf den Fall $n = 4$, da die gleiche Rechnung für ein beliebiges n zum Ziele führt. Es sei nunmehr:

$$(1^*) \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} = C$$

die Determinante einer orthogonalen Substitution, $y_1 y_2 y_3 y_4$ die Coordinaten eines festen Elements; werden die c_{ik} als Functionen eines Parameters t (Zeit) angesehen, so kann man setzen:

$$(2) \quad \begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + c_{13}y_3 + c_{14}y_4 \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + c_{23}y_3 + c_{24}y_4 \\ x_3 = c_{31}y_1 + c_{32}y_2 + c_{33}y_3 + c_{34}y_4 \\ x_4 = c_{41}y_1 + c_{42}y_2 + c_{43}y_3 + c_{44}y_4 \end{cases}$$

Die Grössen c_{ik} hängen bekanntlich von sechs (allgemein $\frac{n \cdot n - 1}{2}$) Parametern ab; um diese und also auch die c_{ik} als Functionen von t zu definiren, kann man also 6 Differentialgleichungen aufstellen. Wählen wir beliebig viele (etwa s) constante Elemente $y^{(s)}$ und ordnen jedem einen constanten Coefficienten m_s zu. Man erhält alsdann ebensoviele

Werthsysteme der x und kann nunmehr folgende 6 $\binom{n \cdot n - 1}{2}$ Differentialgleichungen aufstellen:

$$(3) \quad 0 = \frac{d}{dt} \sum_s m_s \left(x_i^{(s)} \frac{dx_k^{(s)}}{dt} - x_k^{(s)} \frac{dx_i^{(s)}}{dt} \right),$$

welche den Gleichungen für die Erhaltung der Momente analog gebildet sind. Sollten die Elemente stetig auf einander folgen und deren unendlich viele vorhanden sein, so müsste die Summe in ein bestimmtes vierfaches Integral übergehen. Um das System (3) umzuformen, setzen wir:

$$(4) \quad \begin{cases} r_{ik} = -r_{ki} = c_{1i} \frac{dc_{1k}}{dt} + c_{2i} \frac{dc_{2k}}{dt} + c_{3i} \frac{dc_{3k}}{dt} + c_{4i} \frac{dc_{4k}}{dt}, \\ r_{ii} = 0, \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

Daraus findet man:

$$(5) \quad \frac{dc_{ik}}{dt} = r_{k1}c_{i1} + r_{k2}c_{i2} + r_{k3}c_{i3} + r_{k4}c_{i4}.$$

Das System der y kann man, wie aus der Theorie der Trägheitsmomente bekannt ist, immer und im Allgemeinen nur auf eine Weise so wählen, dass:

$$(6) \quad \sum_s m_s y_i^{(s)} y_k^{(s)} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

wenn i von k verschieden ist. Setzt man noch:

$$(7) \quad T_{ik} = \sum_s m_s (y_i^{(s)2} + y_k^{(s)2}),$$

so findet man, wenn man nach den Gl. (2) $\frac{dz_i}{dt}$ bildet (wobei die y als Constanten anzusehen sind) und mit Hülfe von (5), (6), (7) reducirt:

$$(8) \quad \sum_s m_s \left(x_i^{(s)} \frac{dx_k^{(s)}}{dt} - x_k^{(s)} \frac{dx_i^{(s)}}{dt} \right) = T_{12} r_{12} C_{ik, 12} + T_{13} r_{13} C_{ik, 13} \\ + T_{14} r_{14} C_{ik, 14} + T_{23} r_{23} C_{ik, 23} \\ + T_{24} r_{24} C_{ik, 24} + T_{34} r_{34} C_{ik, 34}.$$

Hier sind $C_{ik, uv}$ diejenigen zweigliedrigen Minoren, welche durch Kreuzung der i^{ten} und k^{ten} Vertikalreihe mit der u^{ten} und v^{ten} Horizontalreihe aus C (1^a) erhalten werden. Man differentiiere nunmehr die Gleichungen (8) nach t und multiplicire dieselben nach einander mit den Grössen der ersten, zweiten . . . sechsten Horizontalreihe aus folgendem Schema:

$$\begin{aligned}
& C_{12, 12} \ C_{13, 12} \ C_{14, 12} \ C_{23, 12} \ C_{24, 12} \ C_{34, 12} \\
& C_{12, 13} \ C_{13, 13} \ C_{14, 13} \ C_{23, 13} \ C_{24, 13} \ C_{34, 13} \\
& \dots\dots\dots \\
& C_{12, 34} \ C_{13, 34} \ C_{14, 34} \ C_{23, 34} \ C_{24, 34} \ C_{34, 34}
\end{aligned}$$

und addire jedesmal; dann kann man nach bekannten Determinantensätzen die Coefficienten aller Grössen $T_{ik} r_{ik}$ zu zweigliedrigen Determinanten zusammenziehen. Wegen der Relationen zwischen den c_{ik} fallen hierbei aber jedesmal zwei Glieder aus, und in den übrigen vier kommen die c_{ik} nicht mehr explicite, sondern nur in den Verbindungen r_{ik} vor, so dass man die 6 Differentialgleichungen findet:

$$(9) \quad \left\{ \begin{aligned} 0 &= T_{12} \frac{dr_{12}}{dt} + (T_{13} - T_{23}) r_{13} r_{23} + (T_{14} - T_{24}) r_{14} r_{24} \\ 0 &= T_{13} \frac{dr_{13}}{dt} + (T_{12} - T_{32}) r_{12} r_{32} + (T_{14} - T_{34}) r_{14} r_{34} \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= T_{34} \frac{dr_{34}}{dt} + (T_{31} - T_{41}) r_{31} r_{41} + (T_{32} - T_{42}) r_{32} r_{42} . \end{aligned} \right.$$

Aber diese ergeben sich wirklich aus (1), wenn man $n = 4$ setzt.

III. Wenn alle Buchstaben und Zeichen die eingeführte Bedeutung beibehalten, so kann man die Function bilden:

$$(10) \quad T = \frac{1}{2} \sum_s m_s \frac{(dx_1^{(s)2} + dx_2^{(s)2} + \dots + dx_n^{(s)2})}{dt^2}.$$

Wenn man nun beachtet, dass die x Functionen der c_{ik} sind, mithin von $\frac{n \cdot n - 1}{2}$ Parametern abhängen, so findet man, dass die Gleichungen

(3) sich aus der Hypothese, dass $\delta \int T dt = 0$ sein soll, also aus der Gleichung des Hamilton'schen Principis ableiten lassen. Nach Einführung der Grössen r_{ik} aber verwandelt sich T in eine quadratische Form der letzteren Grössen, deren $\frac{n \cdot n - 1}{2} \left(\frac{n \cdot n - 1}{2} + 1 \right)$ Coefficienten aber nun von den $\frac{n \cdot n + 1}{2}$ Summen: $\sum_s m_s y_i^{(s)} y_k^{(s)}$ abhängen. Es soll

aber gezeigt werden, dass auf anderem Wege Gleichungen abgeleitet werden können, welche von der Form (1) sind, und zwar so, dass man annimmt, T sei als quadratische Function der Grössen r_{ik} mit beliebigen Coefficienten gegeben, und ferner voraussetzt, dass $\delta \int T dt = 0$ ist.

Es sei aber:

$$(11) \quad T = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \Theta_{ik,lm} r_{ik} r_{lm},$$

wo die Coefficienten $\Theta_{ik,lm} = \Theta_{lm,ik}$ ganz willkürliche sind. $P_{ik} = 0$ sei irgend eine der auf Null gebrachten Gleichungen (4) und $\Gamma_{ik} = 0$ irgend eine der $\frac{n \cdot n + 1}{2}$ Bedingungsgleichungen zwischen den Coefficienten c_{ik} . Ferner seien q_{ik} , γ_{ik} unbestimmte Factoren, welche nach den Regeln der Variationsrechnung eingeführt werden müssen, um nach Reduction von $\delta \int T dt$ den Coefficienten jeder Variation Null setzen zu können. Wir haben also die Function zu bilden:

$$(12) \quad \Omega = \frac{1}{2} \sum_{i,k,l,m} \Theta_{ik,lm} r_{ik} r_{lm} + \sum_{ik} q_{ik} P_{ik} + \sum_{ik} \gamma_{ik} \Gamma_{ik}.$$

Aus $\delta \int \Omega dt = 0$ ergibt sich nun zunächst:

$$(13) \quad \frac{\partial T}{\partial r_{ik}} = q_{ik}.$$

Ferner erhält man die n^2 Gleichungen:

$$(14) \quad 0 = \frac{\partial \Omega}{\partial c_{ik}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial c'_{ik}}; \quad c'_{ik} = \frac{d c_{ik}}{dt}.$$

Entwickelt man das System (14) und setzt für die q_{ik} ihre Werthe aus (13), so erübrigt nur noch, die Factoren γ_{ik} zu eliminiren. Die hierzu führende etwas weitläufige Rechnung, welche der von Herrn Kirchhoff (Borchardt's Journ. Bd. 71, S. 241—46) geführten ähnlich ist, möge übergangen werden, indem sie besondere Schwierigkeiten nicht darbietet. Man findet aber, nachdem alle Reductionen gemacht sind, und unter Anwendung der Abkürzung:

$$(15) \quad t_{\mu s} = \frac{\partial T}{\partial r_{\mu s}}$$

das folgende System:

$$(16) \quad 0 = \frac{d}{dt} \sum_{\mu, s} t_{\mu s} \cdot C_{ik, \mu s},$$

wo die $C_{ik, \mu s}$ die oben definirten Minoren der Determinante der c_{ik} sind. Aus (16) findet man dann durch die in II. geführte Rechnung:

$$(17) \quad 0 = \frac{d t_{ik}}{dt} + \sum_s (r_{is} t_{ks} - r_{ks} t_{is}) \quad i, k, s = 1, 2 \dots n.$$

IV. Ich sage nun, dass man von diesem System Integrale findet, indem man die schiefe Determinante:

$$(17^a) \quad \begin{vmatrix} \lambda & t_{12} & t_{13} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & \lambda & t_{23} & \dots & t_{2n} \\ t_{31} & t_{32} & \lambda & \dots & t_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \Delta$$

nach Potenzen von λ entwickelt und jeden Coefficienten einer beliebigen Constanten gleichsetzt.

Auch $T = \frac{1}{2} \sum_{ik} t_{ik} r_{ik} = \text{const.}$ ist ein Integral, und in Folge der Identität:

$$0 = \sum_{iks} t_{ik} (r_{is} t_{ks} - r_{ks} t_{is})$$

hat man auch:

$$0 = \sum_{ik} t_{ik} \frac{dt_{ik}}{dt}$$

und durch Integration:

$$(18) \quad c = \sum_{ik} t_{ik}^2.$$

Um nun aber die weiteren Integrale zu erhalten, schlagen wir den folgenden Weg ein. Es sei μ eine gerade Zahl und $(\alpha\beta\gamma\delta \dots \lambda\mu)$ das von Jacobi mit der gleichen Symbolik bezeichnete Aggregat, welches Cayley eine „Pfaffiane“ genannt hat, und dessen Elemente in unserem Falle t_{ik} sind. Das Quadrat derselben stellt sich als eine schiefe Determinante dar. (Vergl. Baltzer Det.)

Alsdann beweist man den Satz:

Das System (17) kann durch die folgenden Systeme ersetzt werden:

$$(19) \quad o = \frac{d(\alpha\beta\gamma \dots \lambda\mu)}{dt} + \sum_s [r_{\alpha s}(\beta\gamma \dots \lambda\mu s) - r_{\beta s}(\alpha\gamma \dots \lambda\mu s) \\ + r_{\gamma s}(\alpha\beta\delta \dots \lambda\mu s) \dots \pm r_{\mu s}(\alpha\beta\gamma \dots \lambda s)] .$$

Sei in der That ϑ_{ik} der Coefficient von t_{ik} in der Pfaffiane $(\alpha\beta\gamma \dots \lambda\mu)$, dann hat man:

$$\frac{d \cdot (\alpha\beta\gamma \dots \lambda\mu)}{dt} = \sum_{ik} \vartheta_{ik} \frac{dt_{ik}}{dt},$$

mithin, wenn man aus (17) den Werth von $\frac{dt_{ik}}{dt}$ einsetzt:

$$\frac{d(\alpha\beta\gamma \dots \lambda\mu)}{dt} = - \sum_{i,k,s} \vartheta_{ik} r_{is} t_{ks} \quad (i, k, s = 1, 2 \dots n).$$

Der Coefficient von r_{is} ist: $\sum_k \vartheta_{ik} t_{ks}$, also diejenige Pfaffiane, welche aus der ursprünglichen entsteht, indem man den Buchstaben i durch s ersetzt (bis auf's Vorzeichen). Zieht man jetzt den Buchstaben s ans Ende des symbolischen Ausdrucks für die Pfaffiane und beachtet die bei den Vertauschungen der Buchstaben eintretenden Zeichenwechsel, so findet man sofort die angegebenen Systeme. Jedes derselben enthält: $\binom{n}{\mu}$ Gleichungen und liefert ein Integral, denn multiplicirt

Lehrsatz. Lautet die Entwicklung der Determinante Δ in (17^a):

$$(23) \quad \lambda^n + \lambda^{n-2} \Delta_2 + \lambda^{n-4} \Delta_4 + \dots,$$

wo also die Δ_i diejenigen Functionen der t_{ik} bedeuten, welche zufolge der gegebenen Entwicklungen Constanten gleich werden, so finden zwischen diesen und den δ_{ik} Beziehungen statt in der Weise, dass:

$$(24) \quad \delta_i = \Delta_i,$$

wobei δ_i die Coefficienten der Potenzen von λ in der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \lambda & \delta_{23} & \dots & \delta_{2n} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \lambda & \dots & \delta_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n + \delta_2 \lambda^{n-2} + \delta_4 \lambda^{n-4} + \dots$$

bedeuten.

Beweis. Die Bestimmungsart der x und der y war bisher ganz willkürlich, wir können sie aber offenbar so wählen, dass für $t=0$ die x den y gleich werden. Dann verschwinden in (3) für $t=0$ alle c_{ik} , nur die c_{ii} werden gleich Eins. Hieraus erkennt man, dass in (22) für $t=0$ ebenfalls alle Coefficienten $C_{ik,rs}$ verschwinden mit Ausnahme der $C_{ik,ik}$, welche gleich Eins werden. Daher ist:

$$\delta_{ik} = (t_{ik})_{t=0}.$$

Weil nun vermöge der gefundenen Integrale zwischen den t_{ik} die im Lehrsatz angegebenen Relationen bestehen, so auch zwischen den δ_{ik} q. e. d.

V. Es möge noch bewiesen werden, dass im Falle $n=4$ eine einzige Beziehung zwischen den Constanten T_{ik} hinreicht, um ein weiteres Integral zu finden. Das Problem kann dann bekanntlich auf Quadraturen zurückgeführt werden, weil die dazu erforderliche Anzahl von Integralen vorhanden wäre. Wir gehen von der kanonischen Form (1) der Differentialgleichungen aus und fragen, unter welchen Bedingungen lassen dieselben Integrale von der Form:

$$(25) \quad \text{const.} = a_{12} T_{12} r_{12}^2 + a_{13} T_{13} r_{13}^2 + \dots + a_{34} T_{34} r_{34}^2$$

zu, wo die a_{ik} zu bestimmende Constanten bedeuten. Setzt man zur Abkürzung:

$$(26) \quad \begin{cases} \Omega_1 = r_{23} r_{24} r_{34}; & \Omega_2 = r_{13} r_{14} r_{34} \\ \Omega_3 = r_{12} r_{14} r_{24}; & \Omega_4 = r_{12} r_{13} r_{23}, \end{cases}$$

dann kann man die Differentialgleichungen (1) so schreiben:

$$(27) \quad \begin{cases} -T_{12} r_{12} \frac{dr_{12}}{dt} = (T_{13} - T_{23}) \Omega_4 + (T_{14} - T_{24}) \Omega_3, \\ -T_{13} r_{13} \frac{dr_{13}}{dt} = -(T_{12} - T_{23}) \Omega_1 + (T_{14} - T_{24}) \Omega_2, \\ \dots\dots\dots \\ -T_{34} r_{34} \frac{dr_{34}}{dt} = (T_{13} - T_{14}) \Omega_2 + (T_{23} - T_{24}) \Omega_1. \end{cases}$$

Differentiirt man jetzt die Gleichung (25) und eliminirt die Grössen $\frac{dr_{ik}}{dt}$ mit Hülfe von (27), so hat man die Coefficienten von $\Omega_1 \dots \Omega_4$ gleich Null zu setzen, also finden sich für die a_{ik} die Bedingungs-
gleichungen:

$$8) \quad \begin{cases} 0 = 0 & + & 0 & + & 0 & + (T_{24} - T_{34}) a_{23} - (T_{23} - T_{34}) a_{21} \\ & & & & & + (T_{23} - T_{24}) a_{34} \\ 0 = 0 & + (T_{14} - T_{34}) a_{13} - (T_{13} - T_{34}) a_{14} + & 0 & + & 0 \\ & & & & & + (T_{13} - T_{14}) a_{14} \\ 0 = (T_{14} - T_{24}) a_{12} + & 0 & - (T_{12} - T_{24}) a_{11} + & 0 & + (T_{12} - T_{13}) a_{24} \\ & & & & & + 0 \\ 0 = (T_{13} - T_{23}) a_{12} - (T_{12} - T_{23}) a_{13} + & 0 & + (T_{12} - T_{13}) a_{23} + & 0 \\ & & & & & + 0 \end{cases}$$

Diesem System genügt man, indem man setzt:

$$a_{ik} = \lambda + \mu T_{ik},$$

welches auf bekannte Integrale zurückführt, aber wenn alle aus je 4 Columnen des Systems (28) gebildeten Determinanten verschwinden, so reduciren sich diese 4 Gleichungen auf nur drei von einander unabhängige, weshalb sich ein weiteres Integral ergeben müsste. Aber jene Determinanten zeigen alle eine der folgenden beiden Formen:

$$\begin{vmatrix} 0 & T_{14} - T_{31} & T_{34} - T_{13} \\ T_{14} - T_{24} & 0 & T_{24} - T_{12} \\ T_{13} - T_{23} & T_{23} - T_{12} & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & T_{24} - T_{31} & T_{34} - T_{23} \\ T_{14} - T_{34} & T_{24} - T_{13} & 0 & 0 \\ 0 & T_{14} - T_{12} & 0 & T_{12} - T_{14} \\ T_{23} - T_{12} & 0 & T_{12} - T_{13} & 0 \end{vmatrix}.$$

Hier ist die erste Determinante in der zweiten als Factor enthalten und alle andern zu bildenden Determinanten enthalten denselben

Factor*). Verschwindet dieser, so reduciren sich die vier Gleichungen (28) auf nur drei, so dass sich ein weiteres Integral ergibt.

Zum Schluss muss noch erwähnt werden, dass das von Kirchhoff (a. a. O.) und von Clebsch**) behandelte Problem der Bewegung eines starren Körpers in einer Flüssigkeit in dem hier behandelten als specieller Fall enthalten ist, dessen Eigenthümlichkeit geometrisch leicht zu charakterisiren wäre. Die Rechnung des Letzteren kürzt sich ausserordentlich ab, wenn man dort von vornherein die Differentialgleichungen in der kanonischen Form annimmt und die Grössen $\Omega_1 \dots \Omega_4$ einführt.

Tübingen, im October 1873.

*) Hesse: Zur Involution, Borchardt's Journ. Bd 63.

**) Math. Ann. Bd III.