SULLA DEFORMAZIONE DI UNA SFERA OMOGENEA ISOTROPA PER DATE
FORZE APPLICATE SULLA SUPERFICIE ¹⁾); NOTA DEL PROF. VA-
LENTINO CERRUTI.

In una breve Nota comunicata al Congresso dell'Associazione francese per il progresso delle Scienze tenutosi in Grenoble nell'agosto dell'anno passato ho esposto il calcolo della deformazione prodotta in una sfera omogenea isotropa da spostamenti arbitrariamente impressi a' punti della superficie; completo ora il mio studio coll'analisi del caso in cui i punti della superficie si suppongono soggetti a date forze esterne. Il metodo di ricerca è quello stesso del quale mi sono già servito in altre pubblicazioni e che ho delineato nella mia Memoria dal titolo: *Ricerche intorno all'equilibrio de' corpi elastici isotropi* ²⁾; pertanto a questa Memoria rimando per la dichiarazione tanto del metodo quanto di que' simboli di cui non si richiamasse qui esplicitamente il significato, come pure rimando alla Nota che ho letto a Grenoble per la dimostrazione di alcune trasformazioni delle quali mi giovo nel corso di questo lavoro.

1.^o Assunto il centro O della sfera come origine di una terna di assi rettangolari, accenno con r, R le distanze di un punto variabile x, y, z dal centro della sfera e da un altro punto $O_1 (x_1, y_1, z_1)$ fisso ma scelto a piacere nell'interno della sfera stessa, e comincio col calcolare gli spostamenti ξ, η, ζ , del punto x, y, z quando soltanto in superficie (cioè solo per $r = a$ raggio della sfera) agiscano forze e queste riferite all'unità di superficie abbiano rispetto agli assi le componenti

$$(1) \quad 2\varrho\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{d}{dr} \frac{1}{R}, \quad 2\varrho\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{d}{dr} \frac{1}{R}, \quad 2\varrho\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{d}{dr} \frac{1}{R}.$$

A determinare compiutamente il problema aggiungerò an-

1) Estratto da' Rendiconti della r. Acc. de' Lincei, t. 2^o, 1^o semestre, p. 461-469, 586-592.

2) Acc. r. de' Lincei. Memorie della Classe di Sc. fis. mat. e nat. Serie 3^a, t. XIII, p. 81-122.

cora la condizione che sieno impediti gli spostamenti possibili per la sfera supposta irrigidita. Le forze (1) costituiscono un sistema di forze in equilibrio e la deformazione da esse generata, simmetrica rispetto alla retta OO_1 , avviene in piani passanti per questa retta e l'asse della rotazione elementare di una particella qualunque è perpendicolare al piano che la congiunge con OO_1 . Perciò la condensazione cubica $\mathfrak{D}$ e il doppio τ della rotazione riusciranno funzioni soltanto di r e di $\alpha x + \beta y + \gamma z$, essendo α, β, γ i coseni di direzione di OO_1 . D'altra parte, detta t la distanza del punto x, y, z dalla OO_1 , per un teorema noto ¹⁾ le due funzioni $\Omega^2 \mathfrak{D}$, ed $\omega^2 \tau$ costituiscono una coppia di funzioni *potenziale* ed *associata*, ed in conseguenza

$$t\tau = \text{cost.} + \frac{\Omega^2}{\omega^2} \int t \left(r \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial r} d\phi - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \phi} \frac{dr}{r} \right),$$

ove per compendio si faccia

$$\cos \phi = \frac{\alpha x + \beta y + \gamma z}{r}.$$

Prendasi una funzione H , simmetrica rispetto ad OO_1 , finita continua e ad un sol valore entro lo spazio occupato dalla sfera e soddisfacente in questo spazio alla $\Delta^2 = 0$, e pongasi ipoteticamente

$$(2) \quad \mathfrak{D} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial r} rH;$$

anche la $\mathfrak{D}$ godrà delle stesse proprietà che la H . Ne consegue

$$t\tau = \text{cost.} - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} t \frac{\partial H}{\partial \phi};$$

ma τ deve restare finita dappertutto entro la sfera, dunque la costante sarà nulla e si avrà semplicemente

$$\tau = - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial H}{\partial \phi},$$

1) Vedi *I. c.*, p. 97.

da cui per le componenti τ_1, τ_2, τ_3 della τ secondo gli assi si cavano le espressioni

$$(3) \quad \tau_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(z \frac{\partial H}{\partial y} - y \frac{\partial H}{\partial z} \right), \quad \tau_2 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(x \frac{\partial H}{\partial z} - z \frac{\partial H}{\partial x} \right), \\ \tau_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(y \frac{\partial H}{\partial x} - x \frac{\partial H}{\partial y} \right).$$

2.° Con ciò le equazioni indefinite per l'equilibrio assumeranno la forma seguente:

$$(4) \quad \Delta^2 \xi + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial . r H}{\partial r} = 0, \quad \Delta^2 \eta + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial . r H}{\partial r} = 0, \\ \Delta^2 \zeta + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial . r H}{\partial r} = 0.$$

Se poi si riflette che le espressioni come $\tau_3 \frac{dy}{dn} - \tau_2 \frac{dz}{dn}$ si riducono ad

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(x \frac{\partial H}{\partial r} - r \frac{\partial H}{\partial x} \right)$$

od anche ad

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(\frac{x}{r} \frac{\partial . r H}{\partial r} - \frac{\partial . r H}{\partial x} \right),$$

e che, posto

$$T^2 = a^2 - 2a^2 (xx_1 + yy_1 + zz_1) + (x^2 + y^2 + z^2) (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2),$$

per $r = a$ sussistono tre relazioni del tipo

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{R} = - \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T}$$

si avranno ai limiti la equazione

$$(5) \quad 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} + 2 \frac{d\xi}{dr} - \frac{1}{\pi} \frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x}{r} \frac{\partial . r H}{\partial r} \\ + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial . r H}{\partial x} = 0$$

e le altre due che se ne ricavano, mutando successivamente α, α_1, ξ in $y, y_1, \eta; z, z_1, \zeta$.

Facciasi

$$\xi = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad \eta = \eta_1 + \eta_2 + \eta_3, \quad \zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$

e impongansi alle ξ_1, η_1, ζ_1 le condizioni di mantenersi nell'interno della sfera finite, continue, ad un sol valore, di soddisfare ivi alla $\Delta^2 = 0$ e in superficie alle equazioni

$$(6) \quad \frac{d\xi_1}{dr} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \quad \frac{d\eta_1}{dr} + \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \quad \frac{d\zeta_1}{dr} + \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} = 0;$$

queste tre funzioni esistono, atteso che come si verifica facilmente ¹⁾,

$$\int_s \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} ds = 0, \quad \int_s \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} ds = 0, \quad \int_s \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} ds = 0$$

e sono determinate salvo una costante. Ma $r \frac{d\xi_1}{dr}, r \frac{d\eta_1}{dr}, r \frac{d\zeta_1}{dr}$ saranno anch'esse come lo sono $a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T}, \dots$ funzioni che nell'interno della sfera godono delle medesime proprietà che le ξ_1, η_1, ζ_1 , e siccome in superficie a causa delle (6) si ha

$$(6') \quad r \frac{d\xi_1}{dr} + a \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \quad r \frac{d\eta_1}{dr} + a \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} = 0, \\ r \frac{d\zeta_1}{dr} + a \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} = 0$$

queste equazioni per una proprietà conosciuta delle funzioni potenziali sussisteranno in tutto lo spazio occupato dalla sfera: potremo quindi prendere

$$\xi_1 = -a \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\chi + \int \frac{dr}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{r}{T} \right) = \frac{\partial J}{\partial x_1},$$

1) Ciò che d'altronde si doveva prevedere, perchè le forze (1), come già s'è detto, costituiscono un sistema di forze in equilibrio.

dove $J = -a \left(\chi + \frac{1}{T} + \int \frac{dr}{rT} \right)$ e χ una funzione delle sole x, y, z che si determinerà in modo che la funzione J si conservi finita e continua nello spazio occupato dalla sfera. Poichè si ha $\int \frac{dr}{rT} = -\frac{1}{a^2} \log \frac{T+a^2-xx_1-yy_1-zz_1}{r}$ è chiaro che basta prendere $\chi = C - \frac{\log r}{a^2}$, dove C è una costante assolutamente arbitraria. Per ragione di simmetria assumeremo $C = -\frac{1}{a^2}$ e con ciò

$$J = -a \left[\frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} + \int_0^r \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} \right) \right].$$

Analogamente si avrà

$$(7) \quad \eta_1 = \frac{\partial J}{\partial y_1}, \quad \xi_1 = \frac{\partial J}{\partial z_1}.$$

Per le ξ_2, η_2, ζ_2 porremo

$$(8) \quad \xi_2 = -\frac{x}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r}, \quad \eta_2 = -\frac{y}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r}, \quad \zeta_2 = -\frac{z}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r},$$

onde le ξ_3, η_3, ζ_3 dovranno in tutta la sfera soddisfare alle equazioni

$$\Delta^2 \xi_3 = 0, \quad \Delta^2 \eta_3 = 0, \quad \Delta^2 \zeta_3 = 0$$

ed in superficie a tre altre equazioni del tipo

$$2 \frac{d\xi_3}{dr} - \frac{x}{\pi} \frac{\partial^2 \cdot rH}{\partial r^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x}{r} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot rH}{\partial x} = 0.$$

Ma $r \frac{d\xi_2}{dr}, r \frac{d\eta_2}{dr}, r \frac{d\zeta_2}{dr}$ soddisferanno pure entro la sfera alla $\Delta^2 = 0$, quindi posto per compendio

$$S = (\Omega^2 - \omega^2) r \frac{\partial^2 \cdot rH}{\partial r^2} + (\Omega^2 + \omega^2) \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} - \Omega^2 H,$$

$$e^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2$$

e detti H' , S' i valori di H , S per $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, ne verrà

$$r \frac{d\xi_3}{dr} = \frac{a^2 - r^2}{8\pi^2 a (\Omega^2 - \omega^2)} \int_s (x' S' - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H'}{\partial x'}) \frac{ds}{e^3}.$$

Ma per essere S e $\frac{\partial H}{\partial x}$ funzioni potenziali, si avrà

$$\frac{a^2 - r^2}{4\pi a} \int_s (x S' - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H'}{\partial x'}) \frac{ds}{e^3} = x S - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H}{\partial x},$$

$$\int_s \frac{S' ds}{e} = \frac{2\pi a}{Vr} \int_0^r \frac{S dr}{Vr},$$

quindi

$$r \frac{d\xi_3}{dr} = \frac{a^2 - r^2}{4\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{Vr} \int_0^r \frac{S dr}{Vr} + \frac{1}{2\pi (\Omega^2 - \omega^2)} (x S - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H}{\partial x}),$$

e di seguito

$$\xi_3 = \frac{1}{4\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \int_0^r dr \frac{a^2 - r^2}{r} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{Vr} \int_0^r \frac{S dr}{Vr} + \frac{1}{2\pi (\Omega^2 - \omega^2)} \int_0^r \frac{dr}{r} (x S - a^2 \Omega^2 \frac{\partial H}{\partial x}).$$

Ora con riduzioni e trasformazioni assai facili si ottiene

$$\int_0^r \frac{\partial H}{\partial x} \frac{dr}{r} = \frac{\partial}{\partial x} \left(r \int_0^r \frac{H dr}{r^2} \right),$$

$$\int_0^r \frac{x S dr}{r} = \frac{x}{r} \int_0^r S dr = (\Omega^2 - \omega^2) x r \frac{\partial H}{\partial r} + (\Omega^2 + \omega^2) x H - \Omega^2 \frac{x}{r} \int_0^r H dr,$$

$$\int_0^r \frac{dr}{r} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{Vr} \int_0^r \frac{S dr}{Vr} = \frac{\partial}{\partial x} \left[(\Omega^2 - \omega^2) H + 2\Omega^2 r \int_0^r \frac{H dr}{r^2} + \frac{\Omega^2 - \omega^2}{2Vr} \int_0^r \frac{H dr}{Vr} \right],$$

$$\int_0^r r dr \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{1}{Vr} \int_0^r \frac{S dr}{Vr} = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(\Omega^2 - \omega^2) H + \frac{2\Omega^2}{r} \int_0^r H dr - \frac{3(\Omega^2 - \omega^2)}{2Vr} \int_0^r \frac{H dr}{Vr} \right];$$

onde, quando per brevità si ponga

$$P = 2H + \frac{1}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}}, \quad Q = 2H - \frac{3}{\sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}},$$

verrà

$$(9) \quad \xi_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} xH + \frac{x}{2\pi} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} - \frac{r}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r H dr \\ + \frac{1}{8\pi} \left(a^2 \frac{\partial P}{\partial x} - r^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

Racogliendo i valori trovati per ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 risulta finalmente

$$(10) \quad \xi = \frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} xH - \frac{r}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r H dr \\ + \frac{1}{8\pi} \left(a^2 \frac{\partial P}{\partial x} - r^2 \frac{\partial Q}{\partial x} \right).$$

espressione non la più semplice che si possa avere per ξ , ma la più appropriata per gli sviluppi ulteriori. Col cambiare x, x_1 in y, y_1 e z, z_1 successivamente, si passa dall'espressione di ξ a quelle di η e ζ .

3.° La funzione H tuttora incognita si caverà dalla relazione

$$\vartheta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r}.$$

Tenendo presente che $H, \frac{1}{r} \int_0^r H dr, P, Q$ nello spazio occupato

dalla sfera soddisfano alla $\Delta^2 = 0$, si deduce

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial x_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial y_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial z_1} - \frac{1}{2\pi} \frac{3\Omega^2 - 4\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H \\ + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} - \frac{r}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Ma

$$\frac{r}{4\pi} \frac{\partial Q}{\partial r} = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r H}{\partial r} - \frac{5H}{4\pi} + \frac{3}{8\pi \sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}},$$

quindi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 J}{\partial x \partial x_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial y_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial z_1} - \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\Omega^2 - 3\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r H}{\partial r} \\ - \frac{3}{8\pi \sqrt{r}} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}} = 0. \end{aligned}$$

Se si pone per compendio

$$G = \frac{r}{T} + 2r \frac{d}{dr} \frac{r}{T},$$

qualora si osservi che

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{r}{T} = \frac{x}{a} \left(-\frac{1}{T} + 2 \frac{d}{dr} \frac{r}{T} \right) - \frac{r^2}{a} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{T},$$

dall'espressione trovata per J (v. eq. 7) si cava facilmente

$$\frac{\partial^2 J}{\partial x \partial x_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial y \partial y_1} + \frac{\partial^2 J}{\partial z \partial z_1} = -\frac{1}{ar} \frac{\partial \cdot r G}{\partial r},$$

per cui sostituendo

$$\frac{\Omega^2 - 3\omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} H \sqrt{r} + \sqrt{r} \frac{\partial \cdot r H}{\partial r} + \frac{3}{4} \int_0^r \frac{H dr}{\sqrt{r}} + \frac{2\pi}{a\sqrt{r}} \frac{\partial \cdot r G}{\partial r} = 0,$$

equazione la quale derivata prima rispetto ad r e poi moltiplicata per $\sqrt{r}$ ci dà quest'altra

$$\begin{aligned} (11) \quad r \frac{\partial^2 \cdot r H}{\partial r^2} + \frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r H}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} H \\ + \frac{2\pi}{a} \sqrt{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial \cdot r G}{\partial r} \right) = 0, \end{aligned}$$

che ci servirà a determinare H o meglio rH .

L'equazione

$$(11') \quad r^2 \frac{\partial^2 \cdot rH}{\partial r^2} + \frac{\Omega^2 - 2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} r \frac{\partial \cdot rH}{\partial r} + \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} rH = 0$$

ha per integral generale

$$C' r^{\varepsilon'} + C'' r^{\varepsilon''},$$

dove C' , C'' sono quantità indipendenti da r ¹⁾ ed ε' , ε'' le due radici dell'equazione di secondo grado

$$\varepsilon^2 - \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \varepsilon + \frac{\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} = 0.$$

Facciasi per brevità

$$\varepsilon_1 = \frac{\omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\sqrt{2\Omega^2 - 2\Omega^2\omega^2 - \omega^4}}{2(\Omega^2 - \omega^2)}.$$

si avrà

$$\varepsilon'' = \left\{ \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2 \sqrt{-1} \right.$$

e l'integral generale della (11') assume la novella forma

$$r^{\varepsilon_1} \left[C' r^{\varepsilon_2 \sqrt{-1}} + C'' r^{-\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \right],$$

da cui col solito procedimento si passa all'integral generale della (11), e si trova così

$$H = r^{\varepsilon_1 - 1} \left(C' r^{\varepsilon_2 \sqrt{-1}} + C'' r^{-\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \right) \\ - \frac{\pi r^{\varepsilon_1 - 1}}{a \varepsilon_2 \sqrt{-1}} \left| \begin{array}{l} r^{\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \int_0^r r^{\frac{1-2\varepsilon_1-2\varepsilon_2\sqrt{-1}}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial \cdot rG}{\partial r} \right) dr \\ - r^{-\varepsilon_2 \sqrt{-1}} \int_0^r r^{\frac{1-2\varepsilon_1+2\varepsilon_2\sqrt{-1}}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial \cdot rG}{\partial r} \right) dr \end{array} \right|$$

1) Cioè se H si immagina espressa per r e due angoli, le C' , C'' saranno funzioni semplicemente di questi due angoli, od anche di $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$, $\frac{z}{r}$.

La funzione H per ipotesi si conserva unita in tutta la sfera ed in particolare per $r = 0$; ma $\varepsilon_1 - 1 = \frac{3\omega^2 - 2\Omega^2}{2(\Omega^2 - \omega^2)} < 0$, dunque, perchè la H non diventi infinita per $r = 0$, di necessità dovranno essere $C' = 0$, $C'' = 0$. Mutato sotto il vincolo integrale r in $r\sigma$ ed assunta σ come variabile d'integrazione, dopo semplici riduzioni si otterrà

$$H = \frac{2\pi}{a\varepsilon_2 r} \int_0^1 \sigma^{\frac{1-2\varepsilon_1}{2}} \frac{\sigma^{\varepsilon_2} V^{-1} - \sigma^{-\varepsilon_2} V^{-1}}{2V^{-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{V\sigma} \frac{\partial \cdot \sigma G}{\partial \sigma} \right) d\sigma,$$

od anche, se si fa

$$G\sigma = \frac{\sigma}{T_\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{\sigma}{T_\sigma},$$

dove T_σ è ciò che diventa T dopo il cambiamento di r in $r\sigma$

$$(12) H = \frac{2\pi}{a\varepsilon_2} \int_0^1 \sigma^{\frac{1-2\varepsilon_1}{2}} \frac{\sigma^{\varepsilon_2} V^{-1} - \sigma^{-\varepsilon_2} V^{-1}}{2V^{-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{1}{V\sigma} \frac{\partial \cdot \sigma G\sigma}{\partial \sigma} \right) d\sigma,$$

onde, avendo presente che $\sigma \frac{\partial G}{\partial \sigma} = r \frac{\partial G}{\partial r}$, $\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sigma^2 \frac{\partial G}{\partial \sigma} \right) = \sigma \frac{\partial^2 \cdot \sigma G}{\partial \sigma^2}$, si trarrà

$$(13) \mathfrak{H} = \frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \cdot \frac{1}{a\varepsilon_2} \int_0^1 \sigma^{\frac{1-2\varepsilon_1}{2}} \frac{\sigma^{\varepsilon_2} V^{-1} - \sigma^{-\varepsilon_2} V^{-1}}{2V^{-1}} \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(V\sigma \frac{\partial^2 \cdot \sigma G\sigma}{\partial \sigma^2} \right) d\sigma.$$

4.° Resta ora a vedere come si riducano le espressioni di ξ , η , ζ per $r = a$: premesso che H , P , Q sono simmetriche rispetto a' due punti x, y, z ; x_1, y_1, z_1 , e che si ha

$$r \frac{\partial}{\partial x} \int_0^r H dr = \frac{x}{r} \int_0^r H dr + r^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \int_0^r H dr \right)$$

si desume subito dalla (10)

$$(14) \quad [\xi]_{r=a} = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} x H - \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x}{r} \int_0^r H dr \right]_{r=a} \\ + \frac{a^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{H dr_1}{\sqrt{r_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H dr_1 \right]_{r=a} .$$

Ma detto $R\sigma$ ciò che diventa R quando si mutino x_1, y_1, z_1 in $x_1\sigma, y_1\sigma, z_1\sigma$ e posto

$$G_{\sigma}^{(a)} = \frac{\alpha}{\sigma} \left[\frac{\sigma}{R\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \cdot \frac{\sigma}{R\sigma} \right]$$

sarà

$$\left[\frac{\partial G_{\sigma}}{\partial x} \right]_{r=a} = \frac{\partial G_{\sigma}^{(a)}}{\partial x} + \frac{x}{a^2} \left[G_{\sigma}^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial G_{\sigma}^{(a)}}{\partial r_1} \right]$$

e così pure

$$\left[\frac{\partial H}{\partial x} \right]_{r=a} = \frac{\partial H^{(a)}}{\partial x} + \frac{x}{a^2} \left[H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right] ,$$

se con $H^{(a)}$ si designa ciò che diventa H quando si sostituisce $G_{\sigma}^{(a)}$ in luogo di G_{σ} . D'altra parte

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \left(H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) \frac{dr_1}{\sqrt{r_1}} = 2H^{(a)} .$$

$$\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \left(H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) dr_1 = 2H^{(a)} - \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 ,$$

$$\frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 = \frac{1}{a} \int_0^a H dr_1$$

e in conseguenza

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \left(H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) \frac{dr_1}{\sqrt{r_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} \left(H^{(a)} + 2r_1 \frac{\partial H^{(a)}}{\partial r_1} \right) dr_1 \\
&= -\frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H^{(a)} + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 = -\frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} H^{(a)} \\
&\quad + \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{a} \int_0^a H dr_1
\end{aligned}$$

perciò sostituendo nella (14)

$$(14') \quad [\xi]_{r=a} = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1} \right]_{r=a} + \frac{a^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{H^{(a)} dr_1}{\sqrt{r_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{1}{r_1} \int_0^{r_1} H^{(a)} dr_1 \right]$$

Se poi si pone

$$G_\sigma^* = \frac{1}{a} \left[\frac{1}{R_\sigma} + 2\sigma \frac{d}{d\sigma} \frac{1}{R_\sigma} \right]$$

e si accenna con H^* ciò che diventa $H^{(a)}$ quando si cambi $G_\sigma^{(a)}$ in G_σ^* , è ovvio verificare che

$$\frac{\partial G_\sigma^{(a)}}{\partial x} = -\frac{\partial G_\sigma^*}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial H^{(a)}}{\partial x} = -\frac{\partial H^*}{\partial x_1}$$

che se finalmente negli integrali che figurano in (14'), si cambia dappertutto r_1 in r , σ_1 e si assume σ_1 come variabile d'integrazione, si avrà

$$[\xi]_{r=a} = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1} \right]_{r=a} - \frac{a^2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \left[\int_0^1 \frac{H^*}{\sigma_1} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right] d\sigma_1 \right].$$

Ma

$$[J]_{r=a} = -\frac{1}{R} + \frac{1}{a} - a \int_0^a \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{a^2} \right)$$

quindi, se per compendio si faccia

$$\Pi = \frac{1}{R} - \frac{1}{a} + a \int_0^a \frac{dr}{r} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{a^2} \right) + \frac{a^2}{2\pi} \int_0^1 \frac{H^*}{\sigma_1} \left[\frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \right] d\sigma_1,$$

ne verrà

$$[\xi]_{r=a} = - \frac{\partial \Pi}{\partial x_1},$$

e analogamente

$$(14'') \quad [\eta]_{r=a} = - \frac{\partial \Pi}{\partial y_1}, \quad [\zeta]_{r=a} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z_1}.$$

L'integrale duplicato rispetto a σ ed a σ_1 che entra nell'espressione di Π , si potrebbe facilmente convertire in una somma di integrali semplici, ma per lo scopo di questo lavoro siffatta trasformazione non importa.

5.° Passiamo ora al caso generale in cui, pur essendo nulle le forze che sollecitano ogni singolo elemento di massa, le forze agenti alla superficie sieno qualunque colla sola condizione di costituire un sistema di forze in equilibrio. Sieno per unità di superficie L , M , N le loro componenti secondo gli assi; u , v , w gli spostamenti che esse producono nella sfera e Θ la condensazione cubica. Per noti teoremi del prof. Betti avremo

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta &= \frac{1}{\varrho} \int_s \left(L \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + M \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} + N \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds \\ &\quad - 2\omega^2 \int_s \left(u \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + v \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} + w \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds, \\ \frac{1}{\varrho} \int_s (L\xi + M\eta + N\zeta) ds &= 2\omega^2 \int_s \left(u \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{R} + v \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{1}{R} \right. \\ &\quad \left. + w \frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{1}{R} \right) ds \end{aligned}$$

e da queste relazioni, posto

$$A = \frac{1}{\varrho} \int_s L \left(\Pi + \frac{1}{R} \right) ds, \quad B = \frac{1}{\varrho} \int_s M \left(\Pi + \frac{1}{R} \right) ds, \quad C = \frac{1}{\varrho} \int_s N \left(\Pi + \frac{1}{R} \right) ds,$$

si trae

$$(15) \quad 4\pi\Omega^2 \Theta = \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1};$$

ma di Θ conviene dare un'altra espressione più comoda. Accennata con Φ una funzione finita, continua, ad un sol valore e soddisfacente entro la sfera alla $\Delta^2 = 0$, facciasi ipoteticamente

$$(15') \quad \Theta = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1},$$

ne verrà

$$\frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2 \Omega^2} \left(\frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{\partial B}{\partial y_1} + \frac{\partial C}{\partial z_1} \right)$$

onde

$$(16) \quad \Phi = \frac{\Omega^2 - \omega^2}{4\omega^2 \Omega^2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{A dr_1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \frac{B dr_1}{r_1} + \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \frac{C dr_1}{r_1} \right)$$

Poichè, attesa l'ipotesi fatta sulle forze $\bar{L}$, $\bar{M}$, $\bar{N}$, si ha

$$(17) \quad \int_s L ds = 0, \quad \int_s M ds = 0, \quad \int_s N ds = 0,$$

nello sviluppo delle A , B , C in serie ordinate per le potenze ascendenti di $\frac{r_1}{a}$ i termini indipendenti da r_1 vengono a mancare; per questo motivo così gli integrali del secondo membro della (16) come le loro derivate rispetto alle x_1 , y_1 , z_1 si mantengono finite in tutta la sfera. Che sieno poi inoltre funzioni continue ad un sol valore e soddisfino entro la sfera alla $\Delta^2 = 0$, è cosa che si vede senza difficoltà.

6.° Secondo il metodo esposto nella mia Memoria ¹⁾ devesi ora assegnare una funzione ψ_1 , la quale nello spazio esterno alla sfera sia finita, continua, ad un sol valore, soddisfi alla $\Delta^2 = 0$, si annulli all'infinito e in superficie per la derivata rispetto ad r_1 prenda i valori $\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2}$: queste condizioni

1) Vedi l. c., pag. 89.

la determinano completamente e se ne ottiene la espressione col processo che segue. Si consideri la funzione

$$\Phi_1 = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{r_1}{a} \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2},$$

la quale, nell'interno della sfera, gode delle stesse proprietà generali che alla funzione ψ_1 abbiamo imposto nello spazio esterno e la si immagini continuata nello spazio esterno, ma colla condizione che in superficie prenda gli stessi valori di Φ_1 . Mediante una trasformazione per raggi vettori reciproci quando per centro d'inversione si prenda il centro della sfera data e la sfera stessa per sfera direttrice, trovasi per la funzione cercata ¹⁾

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{d}{dr_1} \left(r_1^2 \frac{d}{dr_1} \frac{\Phi \left(\frac{a^2}{r_1} \right)}{r_1} \right).$$

Poniamo ipoteticamente

$$\frac{r_1}{a} \frac{d\psi_1}{dr_1} = \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{d}{dr_1} \left(r_1^2 \frac{d}{dr_1} \frac{\Phi \left(\frac{a^2}{r_1} \right)}{r_1} \right),$$

ne verrà, rappresentando con $\Phi' \left(\frac{a^2}{r_1} \right)$ la derivata di $\Phi \left(\frac{a^2}{r_1} \right)$ rispetto all'argomento $\frac{a^2}{r_1}$,

$$(18) \quad \psi_1 = - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{a^3}{r_1^2} \Phi' \left(\frac{a^2}{r_1} \right).$$

Questa funzione fruisce di tutte le proprietà caratteristiche della ψ_1 , ma non mi fermerò a farne la verifica. Noterò di passaggio che la funzione designata con ψ nella mia Memoria sarebbe in questo caso espressa da $\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}$.

7.° Dopo ciò posto

$$\omega^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2 + (z'_1 - z_1)^2$$

1) $\Phi \left(\frac{a^2}{r_1} \right)$ simboleggia ciò che diventa Φ , quando al posto di r_1 vi si sostituisce $\frac{a^2}{r_1}$.

e indicati con Θ' , ψ'_1 i valori di Θ , ψ_1 nel punto x'_1 , y'_1 , z'_1 , l'integrale ¹⁾

$$(19) \quad -\frac{1}{4\pi\omega^2} \int_s (\Omega^2 \Theta' - \omega^2 \psi'_1) \left(\frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\omega} \frac{dy'}{dn} - \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{\omega} \frac{dz'}{dn} \right) ds$$

diventerà ²⁾

$$\frac{\Omega^2}{4\pi^2(\Omega^2 - \omega^2)} \int_s \left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \left(y' \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{\omega} - z' \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{\omega} \right) ds$$

ossia

$$\frac{\Omega^2}{4\pi^2(\Omega^2 - \omega^2)} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_s \left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \frac{ds}{\omega} - y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_s \left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \frac{ds}{\omega} \right).$$

La funzione Φ continuata nello spazio esterno colle stesse proprietà e colla condizione di annullarsi all'infinito e di non subire discontinuità nel passaggio dallo spazio interno all'esterno,

ha per espressione $\frac{a}{r_1} \Phi \left(\frac{a^2}{r_1} \right)$, di cui la derivata rispetto ad r_1

ha in superficie il valore $-\left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)$; quindi per la densità

δ della materia che distribuita sulla superficie sferica $r = a$ ha per funzione potenziale interna Φ e per funzione potenziale esterna $\frac{a}{r_1} \Phi \left(\frac{a^2}{r_1} \right)$, sarà data da

$$\delta = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)',$$

dove ben inteso si deve porre $r_1 = a$. Pertanto nello spazio interno sarà

$$4\pi\Phi = \int_s \left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)' \frac{ds}{\omega},$$

1) Vedi *l. c.*, p. 90.

2) Con $\left(\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \right)'$ è simboleggiato ciò che diventa la funzione $\frac{\Phi}{a} + 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r_1}$ quando le x_1 , y_1 , z_1 , si cambino in x'_1 , y'_1 , z'_1 , che sono le variabili rispetto alle quali si deve fare la integrazione.

e l'integrale (19) avrà per valore

$$\frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right).$$

Laonde i doppi T_1 , T_2 , T_3 delle componenti della rotazione elementare di una particella avranno i valori ¹⁾

$$(20) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial E}{\partial x_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} \right) \\ T_2 &= \frac{\partial E}{\partial y_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \\ T_3 &= \frac{\partial E}{\partial z_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left(y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

8.° Pertanto gli spostamenti u , v , w dovranno soddisfare alle tre equazioni indefinite

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \Delta^2 u + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} &= 0, & \Delta^2 v + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} &= 0, \\ \Delta^2 w + \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} &= 0, \end{aligned} \right.$$

ed a tre equazioni ai limiti del tipo

$$(22) \quad \frac{L}{\rho} = 2\omega^2 \frac{du}{dr_1} - \frac{1}{\pi} \frac{2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x_1 \partial \cdot r_1 \Phi}{r_1 \partial r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2 \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial x_1} + \frac{\omega^2}{r_1} \left(y_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial E}{\partial y_1} \right).$$

Facciasi

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4, \quad v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4, \quad w = w_1 + w_2 + w_3 + w_4,$$

e si determinino in primo luogo le u_i , v_i , w_i colle condizioni di soddisfare entro la sfera alla $\Delta^2 = 0$ ed in superficie alle equazioni

1) Vedi *L. c.* p. 90.

$$2\omega^2 \frac{du_1}{dr_1} = \frac{L}{\varrho}, \quad 2\omega^2 \frac{dv_1}{dr_1} = \frac{M}{\varrho}, \quad 2\omega^2 \frac{dw_1}{dr_1} = \frac{N}{\varrho}.$$

A cagione delle (17) queste funzioni esistono ed hanno per espressioni

$$(23) \quad u_1 = u^0 + L^*, \quad v_1 = v^0 + M^*, \quad w_1 = w^0 + N^*,$$

dove u^0 v^0 w^0 sono tre costanti arbitrarie, ed

$$\begin{aligned} L^* &= 2L + \int_0^{r_1} \frac{\dot{L} dr_1}{r_1}, & L &= \frac{1}{8\pi\varrho\omega^2} \int_s \frac{L ds}{R}, \\ M^* &= 2M + \int_0^{r_1} \frac{\dot{M} dr_1}{r_1}, & M &= \frac{1}{8\pi\varrho\omega^2} \int_s \frac{M ds}{R}, \\ N^* &= 2N + \int_0^{r_1} \frac{\dot{N} dr_1}{r_1}, & N &= \frac{1}{8\pi\varrho\omega^2} \int_s \frac{N ds}{R}. \end{aligned}$$

In secondo luogo per le u_2 , v_2 , w_2 si prendano i valori

$$(24) \quad u_2 = -\frac{x_1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}, \quad v_2 = -\frac{y_1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}, \quad w_2 = -\frac{z_1}{2\pi} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1}$$

e di seguito si definiscano le u_3 , v_3 , w_3 colle condizioni di soddisfare entro la sfera all'equazione $\Delta^2 = 0$ ed in superficie a tre equazioni del tipo

$$2 \frac{du_3}{dr_1} - \frac{x_1}{\pi} \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{x_1}{r_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} + \frac{1}{\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial x_1} = 0.$$

Queste tre funzioni esistono perchè è ben facile verificare che

$$\int_s x_1 \frac{\partial^2 \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1^2} ds + \frac{\Omega^2 + \omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \int_s \frac{x_1}{r_1} \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} ds - \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \int_s \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial x_1} ds = 0;$$

ora le condizioni imposte alle u_3, v_3, w_3 non differiscono da quelle cui soddisfano le ξ_3, η_3, ζ_3 salvo la mutazione del simbolo H nel simbolo Φ ; per cui sarà

$$(25) \quad u_3 = \frac{1}{\pi} \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} x_1 \Phi + \frac{1}{2\pi} x_1 \frac{\partial \cdot r_1 \Phi}{\partial r_1} - \frac{1}{2\pi} \frac{\Omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} r_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \Phi dr_1 \\ + \frac{1}{8\pi} \left(a^2 \frac{\partial P_1}{\partial x_1} - r_1^2 \frac{\partial Q_1}{\partial x_1} \right)$$

dove per compendio si è fatto

$$P_1 = 2\Phi + \frac{1}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi dr_1}{\sqrt{r_1}}, \quad Q_1 = 2\Phi - \frac{3}{\sqrt{r_1}} \int_0^{r_1} \frac{\Phi dr_1}{\sqrt{r_1}}.$$

Mutando successivamente nella (25) x_1 in y_1, z_1 se ne deducono i valori di v_3, w_3 .

9.° Finalmente le u_4, v_4, w_4 si determineranno colle condizioni di soddisfare entro la sfera alla $\Delta^2 = 0$ ed in superficie alle equazioni

$$(21') \quad \left\{ \begin{array}{l} 2r_1 \frac{du_4}{dr_1} + y_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial E}{\partial y_1} = 0, \\ 2r_1 \frac{dv_4}{dr_1} + z_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} = 0, \\ 2r_1 \frac{dw_4}{dr_1} + x_1 \frac{\partial E}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial E}{\partial x_1} = 0. \end{array} \right.$$

Ma anche le $r_1 \frac{du_4}{dr_1}, \dots$ soddisferanno alla $\Delta^2 = 0$ e, poichè si ha

$\Delta^2 E = 0$, lo stesso avverrà per le $y_1 \frac{\partial E}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial E}{\partial y_1}, \dots$ dunque, dovendo essere u_4, v_4, w_4 funzioni finite, continue e a un sol valore, le equazioni (21') reggeranno non solo per i punti della superficie ma per tutti i punti della sfera: perciò

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} u_i &= \frac{1}{2} \left(z_1 \frac{\partial}{\partial y_{1,0}} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} - y_1 \frac{\partial}{\partial z_{1,0}} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right), \\ v_i &= \frac{1}{2} \left(x_1 \frac{\partial}{\partial z_{1,0}} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} - z_1 \frac{\partial}{\partial x_{1,0}} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right), \\ w_i &= \frac{1}{2} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial x_{1,0}} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} - x_1 \frac{\partial}{\partial y_{1,0}} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right). \end{aligned} \right.$$

Possiamo fare astrazione dalle costanti arbitrarie che bisognerebbe aggiungere alle $u_3, v_3, \dots, v_i, u_i, \dots$ e supporle compenetrare nelle u^0, v^0, w^0 . Resta ancora a determinare la funzione E ; perciò formiamoci le T_1, T_2, T_3 si avrà

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} - \frac{1}{2\pi r_1} \left(y_1 \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \Phi dr_1 - z_1 \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \Phi dr_1 \right) \\ &\quad + \frac{\partial w_i}{\partial y_1} - \frac{\partial v_i}{\partial z_1} - \frac{1}{4\pi} \left(y_1 \frac{\partial Q_i}{\partial z_1} - z_1 \frac{\partial Q_i}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

e altre due espressioni analoghe per le T_2, T_3 . Comparando queste espressioni delle T con quelle somministrate dalle (20) e sommando membro a membro le eguaglianze così ottenute dopo aver moltiplicato la prima per $\frac{x_1}{r_1}$, la seconda per $\frac{y_1}{r_1}$, la terza per $\frac{z_1}{r_1}$, avremo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r_1} &= \frac{x_1}{r_1} \left(\frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} \right) + \frac{y_1}{r_1} \left(\frac{\partial L^*}{\partial z_1} - \frac{\partial N^*}{\partial x_1} \right) + \frac{z_1}{r_1} \left(\frac{\partial M^*}{\partial x_1} - \frac{\partial L^*}{\partial y_1} \right) \\ &\quad + \frac{x_1}{r_1} \left(\frac{\partial w_i}{\partial y_1} - \frac{\partial v_i}{\partial z_1} \right) + \frac{y_1}{r_1} \left(\frac{\partial u_i}{\partial z_1} - \frac{\partial w_i}{\partial x_1} \right) + \frac{z_1}{r_1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_1} - \frac{\partial u_i}{\partial y_1} \right). \end{aligned}$$

D'altra parte si cava facilmente dalle (26)

$$2 \left(\frac{\partial w_1}{\partial y_1} - \frac{\partial v_1}{\partial z_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} + \frac{\partial E}{\partial x_1},$$

$$2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial z_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial y_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} + \frac{\partial E}{\partial y_1},$$

$$2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial y_1} \right) = \frac{\partial}{\partial z_1} \int_0^{r_1} \frac{E dr_1}{r_1} + \frac{\partial E}{\partial z_1},$$

quindi sostituendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r_1} - \frac{E}{r_1} = \frac{2x_1}{r_1} \left(\frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} \right) + \frac{2y_1}{r_1} \left(\frac{\partial L^*}{\partial z_1} - \frac{\partial N^*}{\partial x_1} \right) \\ + \frac{2z_1}{r_1} \left(\frac{\partial M^*}{\partial x_1} - \frac{\partial L^*}{\partial y_1} \right) \end{aligned}$$

d'onde

$$\begin{aligned} (27) \quad E = r_1 E^* + 2x_1 \int_0^{r_1} \left(\frac{\partial N^*}{\partial y_1} - \frac{\partial M^*}{\partial z_1} \right) \frac{dr_1}{r_1} + 2y_1 \int_0^{r_1} \left(\frac{\partial L^*}{\partial z_1} - \frac{\partial N^*}{\partial x_1} \right) \frac{dr_1}{r_1} \\ + 2z_1 \int_0^{r_1} \left(\frac{\partial M^*}{\partial x_1} - \frac{\partial L^*}{\partial y_1} \right) \frac{dr_1}{r_1}, \end{aligned}$$

essendo E^* funzione soltanto di $\frac{x_1}{r_1}, \frac{y_1}{r_1}, \frac{z_1}{r_1}$ e tale che $r_1 E^*$ soddisfi alla $\Delta^2 = 0$; sarà dunque semplicemente

$$r_1 E^* = 2p^0 x_1 + 2q^0 y_1 + 2r^0 z_1$$

dove p^0, q^0, r^0 sono costanti arbitrarie. La funzione E data dalla (27) e le sue derivate sono finite entro la sfera, imperocchè attese le condizioni di equilibrio

$$\int_s (yN - zM) ds = 0, \quad \int_s (zL - xN) ds = 0, \quad \int_s (xM - yL) ds = 0$$

cui sono obbligate le forze L, M, N , se le funzioni sotto i segni d'integrazione nel secondo membro della (27) si sviluppano in serie ordinate per le potenze ascendenti di $\frac{r_1}{a}$, i termini che contengono r_1 al denominatore, scompaiono.

Le parti delle u_1, v_1, w_1 nelle quali figurano p^0, q^0, r^0 , si riducono a

$$q^0 z_1 - r^0 y_1, \quad r^0 x_1 - p^0 z_1, \quad p^0 y_1 - q^0 x_1;$$

di guisa che gli spostamenti u, v, w si possono dividere in due gruppi, uno de' quali rappresentato da

$$u^0 + q^0 z_1 - r^0 y_1, \quad v^0 + r^0 x_1 - p^0 z_1, \quad w^0 + p^0 y_1 - q^0 x_1$$

converrebbe alla sfera anche supposta irrigidita; questo gruppo che le condizioni del nostro problema non determinano, è senza influenza sulla deformazione.

10.° E così il problema che io m'ero proposto, trovasi completamente risoluto. Resterebbero per verità a cercare i termini da aggiungere alle espressioni di u, v, w qualora non fossero zero le forze agenti sopra ciascun elemento di massa: ma chi vorrà consultare la Memoria e la Nota citate al principio del lavoro, sopperirà agevolmente al difetto.

Con poche modificazioni si passerebbe dal caso qui trattato a quello di un corpo indefinito limitato internamente da una superficie sferica, quando fossero date le forze agenti sulla superficie della sfera e si supponessero nulli gli spostamenti dei punti situati a distanza infinita. Ma le modificazioni sono troppo ovvie, perchè convenga insistervi.

La deformazione di una sfera omogenea isotropa venne studiata prima da Lamé ¹⁾, poi da altri geometri ed in particolar modo da W. Thomson ²⁾, e da Borchardt ³⁾. Lamé e Thomson

1) *Mémoire sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques*. Journ. de math. pures et appl., première série, t. 19, p. 51-57.

2) *Dynamical Problems Elastic Spheroidal Shells and Spheroids of Incompressible Liquid*. Phil. Trans. of the R. Society of London, vol. 153, p. 583-616.

3) *Untersuchungen über Elasticität unter Berücksichtigung der Wärme*. Monats. der k. Ak. der Wiss. zu Berlin, 1873, p. 9-56. — *Ueber Deformationen elastischer isotroper Körper durch mechanische an ihrer Oberfläche wirkende Kräfte*, id. id. p. 560-578.

espressero gli spostamenti per serie infinite, Borchardt invece per integrali definiti. Questo mio lavoro contiene una novella soluzione del problema per integrali definiti; in ciò e nell' impiego delle proprietà delle funzioni potenziali la mia soluzione si accosta a quella di Borchardt, ma io spero che il metodo di ricerca apparirà totalmente diverso e di indole affatto generale, mentre quello seguito da Borchardt sembra esclusivo alla sfera.

N.B. Per un errore tipografico, alla pag. 197 sono indicate col simbolo (7) le formole della riga 10^a, mentre quel simbolo compete alla formola della 8^a riga.

N. d. R.

SULLA VARIABILITÀ DEL CALORE SPECIFICO DELL'ACQUA FRA 0° E + 32°;
MEMORIA DEI PROFF. A. BARTOLI ED E. STRACCIATI ¹⁾.

Per avere poi il calore specifico vero di grado in grado abbiamo ammesso che il calorico specifico dell'acqua, $C_{T,t}$, medio fra le due temperature T e t (iniziale e finale del calorimetro, le quali non differivano per solito che circa 2°), sia uguale al calore specifico vero alla temperatura intermedia $\frac{T+t}{2} = \theta$; e con i valori che si erano trovati di $\log \alpha C_{T,t}$, uguali, per l'ipotesi fatta, a $\log \alpha C_\theta$ si è costruito una curva prendendo come ascisse le temperature θ e come ordinate i valori di $\log \alpha C_\theta$: da questa curva si sono dedotti i valori di $\log \alpha C_\theta$ di grado in grado, i quali sono registrati pel rame palline grandi nella tavola VI (seconda colonna) insieme ai valori che si ottengono per il calorico specifico vero dell'acqua di grado in grado, determinando la costante α in modo da rendere uguale a 1 il calore specifico vero a 15°.

Si sono così ottenute sei serie di valori del calorico specifico vero C_θ dell'acqua, da 0° a 31 (tante quante sono le serie di esperienze da noi fatte con diversi metalli) le quali sono registrate nella tavola VII insieme alla loro media.

1) Continuazione e fine. Vedi pag. 97.