Sulfate.

$$\begin{array}{cc} \frac{1}{2}(\text{NH}_4)_2\text{SO}_4 \left\{ \begin{array}{l} 1,1411 \\ 15^\circ \text{ C.} \end{array} \right. & \frac{1}{2}(\text{MgSO}_4) \left\{ \begin{array}{l} 1,2251 \\ 15^\circ \text{ C.} \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} 1,1342 \text{ (K.)} \\ 0,0069 \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} 1,2173 \text{ (K.)} \\ 0,0078 \end{array} \right. \end{array}$$

Vorstehende Reihe von Salzlösungen wird genügen, um den Grad der Genauigkeit zu zeigen, welchen das durch Gleichung (2) ausgedrückte approximative Gesetz besitzt. Bei der Unsicherheit, welche den meisten Dichtebestimmungen anhaftet, lässt sich im Durchschnitt nur eine Genauigkeit bis zur zweiten Decimale erwarten, und dieser genügt das Gesetz in den meisten Fällen. Eine wesentliche Ausnahme findet sich nur bei den Lösungen des $\frac{1}{2}(\text{BaBr}_2)$, welche wohl später noch aufgeklärt werden wird.

Als interessant wäre noch zu erwähnen, dass die Alkalien in kaustischem Zustande mit doppelten Modularwerthen in Lösung zu treten scheinen.

Es genügt mir, in vorliegender Abhandlung auf die weitgehenden Dichteregelmässigkeiten der Salzlösungen einstweilen aufmerksam gemacht zu haben. Weitere interessante Betrachtungen, welche sich an dieselben anschliessen, behalte ich mir für später vor. Namentlich ist es mir von Wichtigkeit, ähnliche Resultate für anorganische Doppelsalze aufzuhehlen und in die schwierigen Verhältnisse organischer Verbindungen einzudringen, von welchen zu erwarten steht, dass die Radicale derselben ebenfalls mit constanten Modularwerthen in irgend welches Lösungsmittel eintreten.

Speyer, im August 1883.

III. Das Gesetz der Rotationsdispersion; von E. Lommel.

Am Schlusse meiner Abhandlung: „Theorie der elliptischen Doppelbrechung“¹⁾ habe ich die Formel:

$$(A) \quad A = C \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2}$$

1) Lommel, Wied. Ann. 15. p. 373. 1882.

aufgestellt, welche die Drehung Δ der Polarisationssebene als Function der Wellenlänge λ und des Brechungscoefficienten n der drehenden Substanz darstellt, und habe gezeigt, dass dieser Ausdruck mit der Erfahrung (nämlich mit den Beobachtungen Stefan's am Bergkrystall) in befriedigender Weise übereinstimmt.

Diese Formel ist aus den vollständigeren Gleichungen der Theorie durch eine Reihe von Approximationen abgeleitet worden und kann daher selbstverständlich nur auf eine angenäherte Gültigkeit Anspruch erheben.

Ich möchte nun zeigen, dass, wenn man in der Annäherung an die Forderungen der Theorie einen Schritt weiter geht, Formeln gewonnen werden, die sich den Beobachtungen noch besser anschliessen, als die obige Formel (A).

Für den Phasenunterschied D der beiden elliptisch polarisirten Wellen, deren Normale durch die Richtungs cosinus u_3, v_3, w_3 bestimmt ist, wurde in der citirten Abhandlung der für farblos durchsichtige Mittel näherungsweise gültige Ausdruck gefunden:

$$(1) \quad D = qz \cdot \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{2}{s_1 s_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\delta^2 w_3^4 q^2},$$

worin s_1 und s_2 die beiden aus der Gleichung:

$$(2) \quad s = \frac{1}{2}(N_1 + N_2 - 2q^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(N_2 - N_1)^2 + T_3^2 + 4\delta^2 w_3^4 q^2}$$

hervorgehenden Werthe bedeuten.

Pflanzen sich die beiden Wellen als entgegengesetzt kreisförmig polarisirte längs der optischen Axe eines einaxigen Krystalles oder nach einer beliebigen Richtung in einem isotropen activen Mittel fort, so hat man:

$$u_3 = 0, \quad v_3 = 0, \quad w_3 = 1, \quad N_1 = N_2 = p^2, \quad T_3 = 0$$

zu setzen, und die vorstehenden Ausdrücke gestalten sich einfacher wie folgt:

$$(3) \quad D = z \cdot \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{4\delta q^2}{s_1 s_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} \quad \text{und}$$

$$(4) \quad s_1 = p^2 - q^2 + 2\delta q, \quad s_2 = p^2 - q^2 - 2\delta q.$$

Darin bedeuten z die Dicke der durchlaufenen Schicht, c_1 und c_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der beiden

entgegengesetzt circular polarisirten Wellen (die Geschwindigkeit im leeren Raume = 1 gesetzt), $q = 2\pi/\lambda$ ihre mit 2π multiplicirte Schwingungszahl, und $p = 2\pi/\lambda_0$ die mit 2π multiplicirte Schwingungszahl des Absorptionsstreifens, während $4m\nu^2/\mu$ und δ Constante sind.

Nun ist aber, wenn wir von einer bereits bei Herleitung des Ausdruckes D benutzten Annäherung abermals Gebrauch machen:

$$(5) \quad \frac{1}{c_1^2} - 1 = \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{s_1}, \quad \frac{1}{c_2^2} - 1 = \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{s_2}.$$

Bezeichnet man ferner mit n den Brechungscoefficienten, den die Substanz bei Abwesenheit des Drehungsvermögens (d. i. wenn $\delta = 0$ wäre) besitzen würde, so hat man mit demselben Grade von Annäherung¹⁾:

$$(6) \quad p^2 - q^2 = \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{n^2 - 1}; \text{ folglich:}$$

$$(7) \quad s_1 = \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{n^2 - 1} + 2\delta q, \quad s_2 = \frac{4m\nu^2}{\mu} \cdot \frac{1}{n^2 - 1} - 2\delta q, \text{ und:}$$

$$(8) \quad \frac{1}{s_1 s_2} = \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{1 - \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 4\delta^2 q^2 (n^2 - 1)^2}.$$

Ferner hat man:

$$\frac{1}{c_1^2} = 1 + \frac{n^2 - 1}{1 + \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot 2\delta q (n^2 - 1)}, \text{ oder:}$$

$$(9) \quad \frac{1}{c_1^2} = n^2 \cdot \frac{1 + \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot 2\delta q \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2}}{1 + \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot 2\delta q \cdot (n^2 - 1)}.$$

Wird der Nenner des Ausdruckes zur Rechten in eine nach Potenzen seines zweiten Gliedes fortschreitende Reihe entwickelt, so ergibt sich:

$$(10) \quad \frac{1}{c_1^2} = n^2 \left(1 + \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot 2\delta q \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} \right) \left(1 - \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot 2\delta q (n^2 - 1) + \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 4\delta^2 q^2 (n^2 - 1)^2 - \dots \right).$$

Vernachlässigt man bei weiterer Entwicklung dieses Ausdruckes diejenigen Glieder, welche mit höheren Potenzen

1) Lommel, Wied. Ann. 4. p. 65. 1878.

der kleinen Grösse δ als der zweiten behaftet sind, so kommt:

$$(11) \quad \frac{1}{c_1^2} = n^2 \left(1 - \frac{\mu}{4 m \nu^2} \cdot 2 \delta q \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} + \left(\frac{\mu}{4 m \nu^2} \right)^2 \cdot 4 \delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2 - 1)^3}{n^2} \right),$$

und, wenn man unter derselben Voraussetzung die Quadratwurzel zieht:

$$(12) \quad \frac{1}{c_1} = n \left(1 - \frac{\mu}{4 m \nu^2} \cdot \delta q \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} + \left(\frac{\mu}{4 m \nu^2} \right)^2 \cdot 2 \delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2 - 1)^3}{n^2} \right).$$

Ebenso findet man:

$$(13) \quad \frac{1}{c_2} = n \left(1 + \frac{\mu}{4 m \nu^2} \cdot \delta q \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} + \left(\frac{\mu}{4 m \nu^2} \right)^2 \cdot 2 \delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2 - 1)^3}{n^2} \right).$$

Lässt man, in erster Annäherung, die Glieder mit der zweiten Potenz von δ vorerst ausser Acht, so hat man:

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{1}{c_1} = n \left(1 - \frac{\mu}{4 m \nu^2} \cdot \delta q \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} \right), \\ \frac{1}{c_2} = n \left(1 + \frac{\mu}{4 m \nu^2} \cdot \delta q \cdot \frac{(n^2 - 1)^2}{n^2} \right), \end{cases}$$

und es ergibt sich:

$$(15) \quad \frac{1}{2} \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right) = n,$$

d. h. das arithmetische Mittel der reciproken Geschwindigkeiten der in einer circularpolarisirenden Substanz sich fortpflanzenden beiden kreisförmig polarisirten Strahlen ist sehr nahe gleich dem Brechungscoefficienten, welchen die Substanz bei Abwesenheit des Drehungsvermögens zeigen würde; bei einaxigen circularpolarisirenden Kristallen also gleich dem Brechungscoefficienten des senkrecht zur Axe sich fortpflanzenden linear polarisirten ordinären Strahles.

Da sich bei diesem Grade der Annäherung ebenso gut auch:

$$(16) \quad \frac{1}{2} (c_1 + c_2) = \frac{1}{n}$$

ableiten lässt, so ist der vorstehende Satz (welcher übrigens unserer Theorie zufolge auch für die magnetische Circularpolarisation gilt) identisch mit dem von Cornu¹⁾ für den

1) Cornu, Compt. rend. 92. p. 1365. 1881, Beibl. 6. p. 236. 1882.

Bergkrystall ausgesprochenen Gesetz, wonach der Mittelwerth der beiden Geschwindigkeiten gleich der Geschwindigkeit des ordinären linear polarisirten Strahles senkrecht zur Axe ist.

Gehen wir jedoch, wie die gegenwärtige Untersuchung es erheischt, in der Annäherung eine Stufe weiter, so erhalten wir durch Addition der Gleichungen (12) und (13):

$$(17) \quad \frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = 2n \left(1 + \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 2\delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2-1)^3}{n^2} \right).$$

Die Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (8) ergibt nun:

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{s_1 s_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} \\ = \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot \frac{(n^2-1)^2}{2n \left(1 - \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 4\delta^2 q^2 (n^2-1)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 2\delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2-1)^3}{n^2} \right)} \end{array} \right.$$

oder, wenn man im Nenner des Ausdrucks zur Rechten das Glied mit der vierten Potenz von δ unterdrückt:

$$(19) \quad \frac{1}{s_1 s_2 \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} \right)} = \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot \frac{(n^2-1)^2}{2n \left(1 - \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 2\delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2-1)^2 (n^2+1)}{n^2} \right)}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (3) ein, so erhält man den Phasenunterschied D der beiden circularen Strahlen in folgender Gestalt:

$$(20) \quad D = z \cdot \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot \frac{2\delta q^2 (n^2-1)^2}{n \left(1 - \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 2\delta^2 q^2 \cdot \frac{(n^2-1)^2 (n^2+1)}{n^2} \right)}.$$

Diesem Phasenunterschied ist aber die von einer Schicht der wirksamen Substanz hervorgebrachte Drehung Δ der Polarisationssebene proportional, oder es ist, wenn C eine Constante bedeutet:

$$\Delta = CD.$$

Schreiben wir daher statt q seinen Werth $2\pi/\lambda$ und setzen:

$$C \cdot z \cdot \frac{\mu}{4m\nu^2} \cdot 2\delta \cdot 4\pi^2 = a, \quad \left(\frac{\mu}{4m\nu^2} \right)^2 \cdot 2\delta^2 \cdot 4\pi^2 = b,$$

sodass a und b constante Grössen sind, so erhalten wir die Drehung der Polarisationssebene in ihrer Abhängigkeit von

Wellenlänge und Brechungsindex ausgedrückt durch die Formel:

$$(I) \quad A = \frac{\alpha(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2 \left(1 - b \cdot \frac{(n^2 - 1)^2(n^2 + 1)}{n^2\lambda^2}\right)}.$$

Aus dieser Gleichung geht die frühere Formel (A) hervor, wenn man $b = 0$ setzt, d. h. wenn man bereits die zweite Potenz von δ ausser Acht lässt.

Bedenkt man nun, dass der Brechungscoefficient n mit abnehmender Wellenlänge wächst, während der eingeklammerte Factor im Nenner des vorstehenden Ausdruckes gleichzeitig abnimmt, so kann man das Product:

$$n \left(1 - b \cdot \frac{(n^2 - 1)^2(n^2 + 1)}{n^2\lambda^2}\right),$$

als annähernd constant betrachten und mit der Constanten α verschmelzen. Wir gelangen so zu der Formel:

$$(II) \quad A = \frac{\alpha(n^2 - 1)^2}{\lambda^2},$$

welche, obgleich noch einfacher als die Formel (A), dennoch den Forderungen der Theorie besser als diese genügt, indem sie das Vorhandensein des mit b behafteten Gliedes wenigstens summarisch berücksichtigt.

Zur Vergleichung dieses Ergebnisses der Theorie mit der Erfahrung stehen vor allem die ausgedehnten und sorgfältigen Messungen von Soret und Sarasin¹⁾ am Bergkrystall zu Gebote, welche sich von der Fraunhofer'schen Linie A ($\lambda = 0,7604$ Tausendstel Millimeter) bis zur Cadmiumlinie 26 ($\lambda = 0,21431$) und von 12° bis 236° Drehung erstrecken. In der folgenden Tab. I sind die beobachteten Werthe mit den nach Formel (II) berechneten zusammengestellt. Die zweite Columnne der Tabelle enthält die Wellenlängen in Luft, für die Fraunhofer'schen Linien nach Ångström, für die ultravioletten Cadmiumlinien nach Cornu; in der dritten Columnne stehen die Brechungscoefficienten, für die Sonnenlinien nach Mascart, für die Linien des Cadmiums nach Sarasin. Die mit (*) bezeichneten Werthe der

1) Soret und Sarasin, Arch. de Gen. 8. p. 5, 97, 201. 1882. — Beibl. 6. p. 942. 1882.

Brechungscoefficienten sind interpolirt. Die folgenden beiden Columnen enthalten die an zwei Quarzexemplaren beobachteten Drehungswinkel, und zwar sind diejenigen Werthe, über deren Genauigkeit Zweifel bestehen, weil die Linien, auf welche sie sich beziehen, schwierig zu beobachten sind, in Klammern eingeschlossen. Die sechste Columnne gibt die aus Formel (II) berechneten Drehungswinkel. Die Constante α wurde als Mittelwerth aus den nicht eingeklammerten und nicht besternten Beobachtungen am Quarz Nr. 2 berechnet.

Tabelle I.

Bergkrystall.

$$\Delta = \frac{\alpha(n^2 - 1)^2}{\lambda^2}. \quad \log \alpha = 0,595\,812\,5.$$

Spectral- linien	λ	n	Δ beob. Quarz Nr. 2	Δ beob. Quarz Nr. 4	Δ ber.	D_2	D_1
<i>A</i>	0,760 4	1,539 02	[12,668] ⁰	[12,628] ⁰	12,772 ⁰	-0,104 ⁰	-0,144 ⁰
<i>a</i>	0,718 36	1,540 187	14,304	14,2984	14,386	-0,082	-0,088
<i>B</i>	0,686 71	1,540 99	15,746	—	15,800	-0,054	—
<i>C</i>	0,656 21	1,541 88	17,318	17,307	17,372	-0,054	-0,065
<i>D₂</i>	0,589 513	1,544 19	21,684	21,696	21,748	-0,064	-0,052
<i>D₁</i>	0,588 912	1,544 19	21,727	21,724	21,793	-0,066	-0,069
<i>E</i>	0,526 913	1,547 18	27,543	27,537	27,588	-0,045	-0,051
<i>F</i>	0,486 074	1,549 66	32,773	32,749	32,776	-0,003	-0,027
<i>G</i>	0,430 725	1,554 29	[42,604]	[42,568]	42,602	+0,002	-0,034
<i>h</i>	0,410 12	1,556 3 *	47,481	47,492	47,406	+0,075	+0,086
<i>H</i>	0,396 81	1,558 16	[51,193]	[51,182]	51,053	+0,140	+0,129
<i>K</i>	0,393 33	1,558 3 *	[52,155]	—	51,992	+0,163	—
<i>L</i>	0,381 96	1,560 19	[55,625]	—	55,589	+0,036	—
<i>M</i>	0,372 62	1,561 49	58,894	58,876	58,742	+0,152	+0,134
Cd 9	0,360 90	1,563 48	[63,268]	[63,229]	63,162	+0,106	+0,067
<i>N</i>	0,358 18	1,564 00	[64,459]	—	64,269	+0,190	—
Cd 10	0,346 55	1,566 17	69,454	—	69,302	+0,152	—
<i>O</i>	0,344 06	1,566 68	70,587	70,588	70,463	+0,124	+0,125
Cd 11	0,340 15	1,567 44	72,448	—	72,329	+0,119	—
<i>P</i>	0,336 00	1,568 42	74,571	74,592	74,440	+0,131	+0,152
<i>Q</i>	0,328 58	1,570 0	78,579	78,598	78,369	+0,210	+0,229
Cd 12	0,324 70	1,570 94	[80,459]	—	80,577	-0,118	—
<i>R</i>	0,317 98	1,572 90	[84,972]	[84,991]	84,726	+0,246	+0,265
Cd 17	0,274 67	1,587 50	121,052	121,063	120,772	+0,280	+0,291
" 18	0,257 13	1,596 24	143,266	143,229	142,902	+0,364	+0,327
" 23	0,231 25	1,614 02	[190,426]	—	189,947	+0,479	—
" 24	0,226 45	1,618 16	201,824	201,770	201,401	+0,423	+0,369
" 25	0,219 35	1,625 02	220,731	220,69145	220,592	+0,139	+0,099
" 26	0,214 31	1,630 40	235,972	—	236,050	-0,078	—

In den beiden letzten Columnen endlich sind die Differenzen D_2 und D_4 zwischen Beobachtung und Rechnung verzeichnet, nämlich diejenigen Grössen, welche man zu den berechneten Werthen hinzufügen muss, um die beobachteten zu erhalten. (Siehe Tab. I p. 584.)

Wenn man bedenkt, dass sich die Rechnung auf zwei voneinander völlig unabhängige Beobachtungsreihen, die der Wellenlängen und die der Brechungscoefficienten, gründet, während die Formel nur eine Constante enthält, so darf man die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen gewiss als eine sehr befriedigende bezeichnen. Die Boltzmann'sche Formel:

$$\Delta = \frac{a}{\lambda^2} + \frac{b}{\lambda^4} + \dots$$

(welche übrigens auch aus unserer Theorie durch Reihenentwicklung der obigen Ausdrücke hervorgeht) gibt mit zwei Constanten Abweichungen von mehr als $2,5^\circ$ und erreicht erst mit vier Constanten einen Grad der Uebereinstimmung, welcher mit demjenigen unserer einconstantigen Formel (II) vergleichbar ist.

Wie ich früher mehrfach gezeigt habe¹⁾, lässt sich der Brechungscoefficient farblos durchsichtiger Körper sehr nahe durch die einfache Dispersionsformel:

$$n^2 - 1 = \frac{a}{1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}$$

darstellen. Setzt man diesen Werth von $n^2 - 1$ in die Formel (II) ein, so gelangt man zu folgendem neuen Ausdruck für die Rotationsdispersion:

$$(III) \quad \Delta = \frac{a}{\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2},$$

welcher zwei Constante a und λ_0^2 enthält, dagegen von dem Brechungscoefficienten unabhängig ist.

Die Berechnung der Beobachtungen von Soret und Sarasin nach dieser Formel (III) führt zu folgender Tabelle:

1) Lommel, Wied. Ann. 3. p. 347. 1878; 8. p. 628. 1879; 13. p. 354. 1881.

Tabelle II.

Bergkrystall.

$$\Delta = \frac{a}{\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2} \cdot \log a = 0,855\,591\,2. \quad \log \lambda_0^2 = 7,935\,125\,7 - 10.$$

Spectral- linien	Δ beob. Quarz Nr. 2	Δ beob. Quarz Nr. 4	Δ berechnet	D_2	D_4
A	[12,668] ⁰	[12,628] ⁰	12,780 ⁰	−0,112 ⁰	−0,152 ⁰
a	14,304	14,2984	14,372	−0,068	−0,074
B	15,746	—	15,778	−0,032	—
C	17,318	17,307	17,340	−0,022	−0,033
D_2	21,684	21,696	21,697	−0,018	−0,001
D_1	21,727	21,724	21,744	−0,017	−0,020
E	27,543	27,537	27,510	+0,033	+0,027
F	32,773	32,749	32,692	+0,081	+0,057
G	[42,604]	[42,568]	42,509	+0,095	+0,059
h	47,481	47,492	47,361	+0,120	+0,131
H	[51,193]	[51,182]	50,966	+0,227	+0,216
K	[52,155]	—	51,979	+0,176	—
L	[55,625]	—	55,514	+0,111	—
M	58,894	58,876	58,706	+0,188	+0,170
Cd 9	[63,268]	[63,229]	63,130	+0,138	+0,099
N	64,459	—	64,231	+0,228	—
Cd 10	69,434	—	69,294	+0,160	—
O	70,587	70,588	70,442	+0,145	+0,146
Cd 11	72,448	—	72,350	+0,098	—
P	74,571	74,592	74,445	+0,126	+0,147
Q	78,579	78,598	78,436	+0,113	+0,162
Cd 12	[80,459]	—	80,658	−0,199	—
R	[84,972]	[84,991]	84,746	+0,226	+0,245
Cd 17	121,052	121,063	121,131	−0,079	−0,068
" 18	143,266	143,229	143,387	−0,121	−0,158
" 23	[190,426]	—	190,527	−0,101	—
" 24	201,824	201,770	201,999	−0,175	−0,229
" 25	220,731	220,69145	221,120	−0,389	−0,429
" 26	235,972	—	236,526	−0,554	—

Die Constanten a und λ_0^2 sind aus denselben Daten welche der Berechnung der Tab. I zu Grunde liegen, nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die Uebereinstimmung der berechneten mit den beobachteten Werthen ist im ganzen sogar noch etwas besser, als bei Formel (II). Es ist indess zu bemerken, dass das Gültigkeitsgebiet der Formel (III) nothwendig ein beschränkteres ist. Denn da der eingeklammerte Factor des Nenners gegen Null rückt, wenn λ sich dem Werthe λ_0 nähert, so muss sich die Curve der nach (III) berechneten Δ bei abnehmendem λ schliess-

lich über die Curve der beobachteten Δ erheben und ins Unendliche ansteigen. Dies wird um so früher eintreten, je grösser der Werth von λ_0 ist. Bei der vorliegenden Beobachtungsreihe macht sich dieser Umstand erst bei den Linien Cd 25 und Cd 26 und auch hier nur in sehr geringem Maasse geltend.

Dagegen bietet die Formel (III) den Vortheil, dass ihre Anwendung die Kenntniss des Brechungscoefficienten nicht erfordert. Wir können sie daher auch auf solche Beobachtungsreihen anwenden, bei welchen eine Bestimmung der Brechungscoefficienten für das nämliche Versuchsmaterial nicht vorliegt.

Tabelle III.

Terpentinöl, rectificirt.

Formel (III). $\log a = 0,593\ 291\ 6$. $\log \lambda_0^2 = 8,560\ 811\ 7 - 10$.

Spectral- linien	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	10,9°	10,86°	+ 0,04
<i>D</i>	14,05	14,07	- 0,02
<i>E</i>	18,7	18,70	0,00
<i>b</i>	19,6	19,71	- 0,11
<i>F</i>	23,2	23,18	+ 0,02
<i>G</i>	32,75	32,69	+ 0,06

Tabelle IV.

Terpentinöl, nicht rectificirt.

Formel (III). $\log a = 0,997\ 177\ 6$. $\log \lambda_0^2 = 7,603\ 137\ 0 - 10$.

Spectral- linien	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>B</i>	-21,5°	-21,43°	- 0,07
<i>C</i>	23,4	23,51	+ 0,11
<i>D</i>	29,3	29,26	- 0,04
<i>E</i>	36,8	36,84	+ 0,04
<i>b</i>	38,3	38,38	- 0,08
<i>F</i>	43,6	43,52	+ 0,04
<i>G</i>	55,9	55,94	+ 0,08

Tabelle V.

Citronenöl.

Formel (III). $\log a = 1,154\ 132\ 2$. $\log \lambda_0^2 = 8,441\ 253\ 6 - 10$.

Spectral- linien	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>B</i>	34,0°	34,12°	- 0,12
<i>C</i>	37,9	37,81	+ 0,09
<i>D</i>	48,5	48,43	+ 0,07
<i>E</i>	63,3	63,34	- 0,04
<i>b</i>	66,4	66,50	- 0,10
<i>F</i>	77,5	77,40	+ 0,10
<i>G</i>	106,0	106,11	- 0,11

Tabelle VI.

Zuckerlösung.

Formel (III). $\log a = 1,333\ 896\ 8$. $\log \lambda_0^2 = 8,042\ 091\ 9 - 10$.

Spectral- linien	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>A</i>	38,47°	38,77°	- 0,30
<i>a</i>	43,32	43,65	- 0,33
<i>B</i>	47,56	47,96	- 0,40
<i>C</i>	52,70	52,76	- 0,06
<i>D</i>	66,41	66,21	+ 0,20
<i>E</i>	84,56	84,25	+ 0,31
<i>b</i>	87,88	87,96	- 0,08
<i>F</i>	101,18	100,45	+ 0,73
<i>G</i>	131,96	131,42	+ 0,54
<i>H</i>	157,06	158,39	- 1,33

In den vorstehenden Tabellen (III bis VI) sind die Beobachtungen von G. Wiedemann¹⁾ an Terpentinöl und Citronenöl, sowie diejenigen Stefan's²⁾ an Zuckerlösung nach Formel (III) berechnet.

Die Uebereinstimmung ist eine vollkommene, da die Abweichungen nirgends die Grenze der Beobachtungsfehler übersteigen.

Den Formeln (I—III) liegt übrigens die Voraussetzung zu Grunde, dass die wirksame Substanz durchaus aus gleichartigen Molecülen bestehe. Sie gelten daher nicht ohne weiteres auch für circularpolarisirende Lösungen activer Körper, sondern in diesem Falle führt die Theorie zu verwickelteren Gleichungen, welche auch den Einfluss des Lösungsmittels und des Concentrationsgrades berücksichtigen. Hiermit ist jedoch nicht ausgeschlossen, dass jene einfachen Formeln in geeigneten Einzelfällen auch auf Lösungen, insbesondere concentrirtere, mit Erfolg anwendbar seien, wie ja in der That das obige Beispiel der Zuckerlösung darthut. In anderen Fällen dagegen, wie bei den Lösungen der Glykocholsäure³⁾, der Cholalsäure⁴⁾ und des Cholesterins⁵⁾ ist die Uebereinstimmung wenig befriedigend. Die Beobachtungen von R. Nasini⁶⁾ an Substanzen mit ausnehmend hohem Dispersionsvermögen werden zum Theil recht gut durch die Formel (III) dargestellt, wie die folgende Tabelle VII (p. 589) zeigt.⁷⁾ Bei jedem Stoff enthält die erste

1) G. Wiedemann, Pogg. Ann. 82. p. 215. 1851.

2) Stefan, Wien. Ber. 52. p. 486. 1866.

3) Hoppe-Seyler, Erdmann's Journ. (1). 89. p. 157. 1863.

4) Hoppe-Seyler, l. c.

5) Lindenmeyer, Erdmann's Journ. (1). 90. p. 323. 1863.

6) R. Nasini, Atti della R. Acc. dei Lincei (3) 13. 1882. Beibl. 7. p. 392. 1883.

7) Die als beobachtet aufgeführten, auf die Drehung für die Linie *B* als Einheit reducirten Werthe sind aus den p. 393 der Beibl. für das specifische Drehungsvermögen angegebenen Zahlen abgeleitet; sie weichen von den daselbst p. 394 mitgetheilten Werthen zum Theil etwas ab. Die Originalabhandlung stand mir nicht zu Gebote.

Tabelle VII.

Formel (III).

N a m e n	log α	log λ_0	B	C	D	E	b_1	F	λ_{4883}	λ_{4336}
Santonin in Chloroform ($c = 35,258$)	9,57726—10	8,66110—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0,98 \\ +0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,10 \\ 1,10 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,44 \\ 1,44 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,93 \\ 1,95 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,02 \\ 2,06 \\ -0,04 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,41 \\ 2,46 \\ -0,05 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 3,34 \\ 3,39 \\ -0,05 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \right\}$
Parasantonin in Chloroform	9,53444—10	8,83743—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,00 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,13 \\ 1,13 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,54 \\ 1,53 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,18 \\ 2,18 \\ -0,03 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,30 \\ 2,33 \\ -0,03 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,87 \\ 2,88 \\ -0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,32 \\ 4,32 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,10 \\ 5,07 \\ +0,03 \end{array} \right\}$
Santonid in Chloroform	9,52823—10	8,86208—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,00 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,13 \\ 1,13 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,55 \\ 1,55 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,25 \\ 2,23 \\ +0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,37 \\ 2,39 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,98 \\ 2,98 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,55 \\ 4,55 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,39 \\ 5,38 \\ +0,01 \end{array} \right\}$
Metasantonin in Chloroform	9,62791—10	8,38877—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,00 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,12 \\ 1,11 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,34 \\ 1,38 \\ -0,04 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,81 \\ 1,84 \\ -0,03 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,97 \\ 1,93 \\ +0,04 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,35 \\ 2,24 \\ +0,11 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,79 \\ 2,90 \\ -0,11 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \right\}$
Aethylparasantonat in Chloroform	9,56023—10	8,85185—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,07 \\ -0,07 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,23 \\ 1,21 \\ +0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,73 \\ 1,65 \\ +0,08 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,40 \\ 2,36 \\ -0,04 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,53 \\ 2,53 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 3,16 \\ 3,15 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,72 \\ 4,77 \\ -0,05 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,56 \\ 5,61 \\ -0,05 \end{array} \right\}$
Normalpropylparasantonat in Chloroform	9,54834—10	8,82386—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,02 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,17 \\ 1,15 \\ +0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,57 \\ 1,56 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,21 \\ 2,20 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,33 \\ 2,35 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,88 \\ 2,90 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,34 \\ 4,31 \\ +0,03 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \right\}$
Allylparasantonat in Chloroform	9,58630—10	8,81068—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,09 \\ -0,09 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,30 \\ 1,24 \\ +0,06 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,70 \\ 1,68 \\ +0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,35 \\ 2,36 \\ -0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,48 \\ 2,52 \\ -0,04 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 3,07 \\ 3,09 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,59 \\ 4,56 \\ +0,03 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 5,57 \\ 5,31 \\ +0,26 \end{array} \right\}$
Santonsäure in Chloroform	9,55788—10	8,78645—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 1,01 \\ -0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,16 \\ 1,14 \\ +0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,51 \\ 1,53 \\ -0,02 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,14 \\ 2,14 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,28 \\ 2,28 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,79 \\ 2,78 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,02 \\ 4,05 \\ -0,03 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 4,69 \\ 4,68 \\ +0,01 \end{array} \right\}$
Normalpropylsantonat in Chloroform	9,52423—10	8,74547—10	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0,91 \\ +0,09 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,02 \\ 1,02 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,26 \\ 1,36 \\ -0,10 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,89 \\ 1,88 \\ +0,01 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 1,92 \\ 2,00 \\ -0,08 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 2,42 \\ 2,42 \\ 0,00 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} 3,55 \\ 3,45 \\ +0,10 \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} - \\ - \\ - \end{array} \right\}$

Zeile die beobachteten, die zweite die berechneten Werthe, die dritte die Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung.

Nach unserer Theorie müssen dieselben Gesetze der Rotationsdispersion auch für die magnetische Drehung der Polarisationssebene gelten. Wir wollen daher die obigen Formeln auch noch mit den diesbezüglichen Messungen Verdet's¹⁾ am Schwefelkohlenstoff und Kreosot vergleichen. Für ersteren wurden die Brechungscoefficienten von Verdet, für letzteres von Gernez an demselben Material bestimmt. Die folgenden Tabellen VIII und IX enthalten die nach Formel (II) berechneten Resultate.

Tabelle VIII.

Schwefelkohlenstoff.

Formel (II). $\log a = 8,994\,033\,5 - 10$.

Spectral- linien	n	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	1,6147	0,592	0,592	+0,000
<i>D</i>	1,6240	0,768	0,761	+0,007
<i>E</i>	1,6368	1,000	1,002	-0,002
<i>F</i>	1,6487	1,234	1,233	+0,001
<i>G</i>	1,6728	1,704	1,720	-0,016

Tabelle IX.

Kreosot.

Formel (II). $\log a = 9,152\,086\,4 - 10$.

Spectral- linien	n	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	1,5369	0,573	0,612	-0,039
<i>D</i>	1,5420	0,758	0,775	-0,017
<i>E</i>	1,5488	1,000	1,000	0,000
<i>F</i>	1,5558	1,241	1,210	+0,031
<i>G</i>	1,5678	1,723	1,626	+0,097

Für den Schwefelkohlenstoff ist die Uebereinstimmung ziemlich befriedigend. Beim Kreosot jedoch überschreitet die Differenz für die Linie *G* die von Verdet äusserstenfalls zugegebene Fehlergrenze von $\pm 0,054$ beträchtlich. Die Formel (II) ist also in diesem Falle zur Darstellung der beobachteten Drehungen nicht ausreichend.

Gehen wir daher auf die vollständigere Formel:

$$(I) \quad \Delta = \frac{a(n^2 - 1)^2}{n\lambda^2 \left(1 - b \cdot \frac{(n^2 - 1)^2(n^2 + 1)}{n^2\lambda^2} \right)}$$

1) Verdet, Ann. de chim. et de phys. (3) 69. p. 415. 1863. Oeuvres. 1. p. 214.

zurück, so ergeben sich für Schwefelkohlenstoff und Kreosot die in den Tab. X und XI verzeichneten, durchaus befriedigenden Resultate.

Tabelle X.

Schwefelkohlenstoff.

Formel (I). $\log a = 9,199\ 276\ 8-10$.
 $\log b = 7,163\ 984\ 8-10$.

Spectral- linien	n	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	1,6147	0,592	0,595	-0,003
<i>D</i>	1,6240	0,768	0,763	+0,005
<i>E</i>	1,6368	1,000	1,002	-0,002
<i>F</i>	1,6487	1,234	1,230	+0,004
<i>G</i>	1,6728	1,704	1,708	-0,004

Tabelle XI.

Kreosot.

Formel (I). $\log a = 9,284\ 656\ 6-10$.
 $\log b = 8,072\ 199\ 3-10$.

Spectral- linien	n	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	1,5369	0,573	0,582	-0,009
<i>D</i>	1,5420	0,758	0,751	+0,007
<i>E</i>	1,5488	1,000	0,994	+0,006
<i>F</i>	1,5553	1,241	1,230	+0,011
<i>G</i>	1,5678	1,723	1,739	-0,016

Noch besser als die Formel (I) schliesst sich die Formel (III) den Beobachtungen an, wie aus den folgenden beiden Tabellen XII und XIII erhellt.

Tabelle XII.

Schwefelkohlenstoff.

Formel (III). $\log a = 9,343\ 962\ 4-10$.
 $\log \lambda_0^2 = 8,484\ 524\ 4-10$.

Spectral- linien	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	0,592	0,594	-0,002
<i>D</i>	0,768	0,763	+0,005
<i>E</i>	1,000	1,004	-0,004
<i>F</i>	1,234	1,232	+0,002
<i>G</i>	1,704	1,705	-0,001

Tabelle XIII.

Kreosot.

Formel (III). $\log a = 9,322\ 839\ 6-10$.
 $\log \lambda_0^2 = 8,550\ 894\ 8-10$.

Spectral- linien	Δ beob.	Δ ber.	D
<i>C</i>	0,573	0,580	-0,007
<i>D</i>	0,758	0,751	+0,007
<i>E</i>	1,000	0,996	+0,004
<i>F</i>	1,241	1,233	+0,008
<i>G</i>	1,723	1,735	-0,012

Aus der vorliegenden Untersuchung ergibt sich also, dass das Gesetz der Rotationsdispersion, der natürlichen sowohl wie der magnetischen, in allen hier in Betracht gezogenen Fällen durch die Formel:

$$\Delta = \frac{a(n^2 - 1)^2}{\lambda^2}$$

oder durch die nach unserer Lichttheorie mit ihr äquivalente Formel:

$$\Delta = \frac{a}{\lambda^2 \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}\right)^2}$$

mit grosser Annäherung dargestellt wird.

Erlangen, im August 1883.

IV. Ueber eine einfache Methode zur Untersuchung der Thermo-, Actino- und Piëzoelectricität der Krystalle¹⁾; von A. Kundt.

(Hierzu Taf. V Fig. 1–14.)

Die genaue Untersuchung der thermo-electrischen Eigenschaften der Krystalle ist, wie insbesondere die umfassenden Arbeiten Hankel's zeigen, eine sehr mühsame und schwierige Arbeit. Die Ermittlung der Electricität jedes einzelnen Punktes der Oberfläche mit Hülfe des Electrometers erfordert nicht nur viel Zeit, sondern auch eine Reihe von Vorsichtsmaassregeln. Von der Thermoelectricität der Krystalle unterscheidet Hr. Hankel noch eine Electricitätserregung, welche durch Strahlen, und zwar hauptsächlich solche geringer Brechbarkeit, hervorgebracht wird, von ihm Actinoelectricität genannt. Endlich bedingt nach der Entdeckung der Herren J. und P. Curie bei hemimorphen Krystallen der Druck eine Electricitätserregung, die Piëzoelectricität.²⁾ Die genaue electrometrische Untersuchung der Actino- und der Piëzoelectricität bietet im wesentlichen die gleichen Schwierigkeiten wie die der Thermoelectricität.

Für eine möglichst allseitige Erforschung der Krystalle wäre es sehr erwünscht, eine Methode zu besitzen, welche auf einmal die electricische Vertheilung auf der ganzen Ober-

1) Im Auszug mitgetheilt in den Sitzungsber. d. k. Acad. der Wiss. zu Berlin. 1883. 16. p. 421–425.

2) Die betreffende Literatur findet sich citirt bei Hankel, Wied. Ann. 19. p. 818–844. 1883.