XIV. Ueber den absoluten Werth der Wärmeleitung der Luft; von A. Winkelmann.

Die im Folgenden mitgetheilten Versuche sind durch die Discussion veranlasst, welche zwischen Hrn. L. Graetz¹⁾ und mir²⁾ vor Kurzem stattgefunden hat. Graetz glaubte in der Berechnung der von mir abgeleiteten Werthe für die absolute Grösse der Wärmeleitung einen Fehler entdeckt zu haben, der, durch die cylindrische Form der Apparate bedingt, die Wärmeleitung um ungefähr 9,1 Proc. des wahren Werthes zu gross erscheinen lasse. Da eine ganz strenge Berechnung für cylinderförmige Apparate bisher noch nicht durchgeführt ist, so begnügte sich Graetz bei seiner neuen Berechnung mit einer Annäherung; diese liefert aber, wie ich gezeigt habe³⁾, einen Grenzwert, der von dem wahren Werthe nicht erreicht werden kann. Die Differenz von 9,1 Proc., die dieser Grenzwert gegenüber dem von mir ermittelten Resultate darstellt, kann deshalb gegen das letztere nicht verwerthet werden, und ist für die Frage, ob meine Berechnung richtig ist, ganz ohne Belang.

Um der von mir ausgeführten Berechnung eine weitere Stütze zu geben, habe ich damals in vierfach verschiedener Weise annähernde Berechnungen für den cylinderförmigen Apparat durchgeführt und gezeigt, dass alle diese Berechnungen nahe übereinstimmende Resultate liefern (die Maximaldifferenz betrug nur 0,58 Proc.). Es ist deshalb nicht wahrscheinlich, dass die Berechnung einen Fehler von 1 Proc. enthält.

Trotz dieses Ergebnisses schien es mir wünschenswerth, das früher gewonnene Resultat auf einem anderen Wege sicherzustellen und zwar dadurch, dass man statt cylinderförmiger Metallapparate solche von Kugelform in Anwendung brachte. Bei dieser Form lässt sich, wie schon Graetz hervorhob, die

1) Graetz, Wied. Ann. **45**. p. 298. 1892.

2) Winkelmann, Wied. Ann. **46**. p. 323. 1892.

3) l. c. p. 329.

Rechnung ganz strenge durchführen, sodass jeder Zweifel ausgeschlossen ist.

§ 1. Der Apparat.

Die massive Kugel, die im Innern einer kugelförmigen Hülle Platz finden sollte, wurde aus Kupfer hergestellt und vergoldet. In der Richtung eines Radius wurde eine 3,5 cm tiefe Ausbohrung von 0,87 cm Durchmesser bewirkt. Um ein Urtheil über die Vollkommenheit der Kugelgestalt zu gewinnen, wurde die Kugel in den kreisförmigen Ausschnitt (3,6 Durchmesser) einer Platte gelegt und dann durch ein Mikroskop die obere Begrenzung der Kugel beobachtet. Bei einer Drehung der Kugel änderte sich die Einstellung nur wenig, sodass die Differenz der verschiedenen Durchmesser kleiner als 0,003 cm war.

Die Bestimmung des mittleren Kegelradius geschah auf hydrostatischem Wege, indem die Ausbohrung durch einen Metallzapfen geschlossen und die Kugel an einem feinen Draht in Luft und Wasser gewogen wurde. Der Radius r der Kugel ergab sich so = 2,5020 cm. Diese Methode lässt eine grosse Genauigkeit zu; denn einem Fehler von 0,01 g in dem Gewichtsverlust entspricht ein Fehler von nur 0,0001 cm im Radius.

Die Kugelhülle von Messing bestand aus zwei Halbkugeln, die gleichfalls im Innern vergoldet waren und die zusammengeschraubt eine Hohlkugel darstellten. Die Dimension wurde durch Wasserwägung ermittelt; der Radius R war 2,8485 cm.

Die massive innere Kupferkugel wurde durch ein Glasrohr, das mit der oberen äusseren Halbkugel fest verbunden war, gehalten. Die doppelte Verbindung wurde in der gleichen Weise, wie früher bei den cylinderförmigen Apparaten¹⁾ hergestellt; auch wurde in ähnlicher Weise wie früher durch Anwendung eines Ringes beim Einsetzen dafür Sorge getragen, dass der Abstand von Kugel und Hülle an allen Stellen der gleiche war.

Zu den Versuchen wurde dasselbe Thermometer wie früher benutzt; eine erneute Vergleichung ergab, dass der Nullpunkt um 0,03° angestiegen war. Man hat deshalb folgende Angaben bezogen auf das Gasthermometer nach den damaligen Beobachtungen.²⁾

1) Winkelmann, Wied. Ann. 44. p. 431. 1891.

2) l. c. p. 443.

Angabe des Thermometers.		Wahre Temperatur.	
15,0	12,0	14,89	11,97
14,5	11,5	14,41	11,48
14,0	11,0	13,93	10,99
13,5	10,5	13,445	10,495
13,0	10,0	12,96	10,00
12,5		12,465	

Das Thermometer wurde durch das Glasrohr in die Ausbohrung der inneren Kugel gesteckt; die Ausbohrung enthielt 15,517 g Quecksilber.

§ 2. Methode der Berechnung.

Die Versuche erstrecken sich auf die Beobachtungen mit Luft, Wasserstoff und Kohlensäure. Bezeichnet man die Abkühlungsgeschwindigkeit für Luft mit v ,

„ „ „ Wasserstoff mit V ,

„ „ „ Kohlensäure „ v' , ferner die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft mit l ,

„ „ „ des Wasserstoffes mit w ,

„ „ „ der Kohlensäure „ k ,

endlich der Wasserwerth der inneren Kugel mit W , so hat man¹⁾

$$(1) \quad \begin{cases} W \cdot v = l \cdot f + C \\ W \cdot V = w \cdot f + C \\ W \cdot v' = k \cdot f + C, \end{cases}$$

wo C eine Constante bezeichnet, deren Grösse durch die Strahlung und durch die Wärmeleitung des die beiden Kugeln verbindenden Glases bedingt ist. Ferner ist

$$f = 4\pi \cdot \frac{R \cdot r}{R - r},$$

wenn R resp. r den Radius der äusseren resp. inneren Kugel darstellt.

Aus den Gleichungen¹⁾ ergeben sich folgende Werthe für die Wärmeleitung der Luft:

$$(2a) \quad l = \frac{V - v}{n - 1} \cdot \frac{W}{f}$$

$$(2b) \quad l = \frac{v - v'}{1 - m} \cdot \frac{W}{f}$$

wo n das Verhältniss der Wärmeleitung des Wasserstoffes zu der der Luft

1) l. c. 435.

$$n = \frac{w}{l}$$

bezeichnet, und m die entsprechende Grösse für Kohlensäure und Luft

$$m = \frac{k}{l}$$

darstellt.

In den Gleichungen (2) sind die einzelnen Grössen für den vorliegenden Kugelapparat durch erneute Beobachtung zu bestimmen mit Ausnahme der Werthe n und m . Diese lassen sich durch die Combination zweier Apparate ableiten, wie es in der früheren Arbeit geschehen ist. Aus der Form der damals benutzten Gleichung (10)

$$n = \frac{w}{l} = \frac{V_2 - V_1}{v_2 - v_1}$$

sieht man, dass das Verhältniss n von den Dimensionen der Apparate ganz unabhängig ist und dass nur die Abkühlungsgeschwindigkeiten, die unter gleichen Bedingungen erhalten wurden, in die Rechnung eingehen. Auch ein Fehler in den Thermometerangaben hat auf diese Grösse gar keinen Einfluss, vorausgesetzt, dass immer das gleiche Thermometer, wie es bei den Versuchen der Fall war, benutzt wird. Man kann deshalb für den vorliegenden Zweck die damals ermittelten Werthe von n und m ohne Bedenken benutzen und hat dann nur mit *einem* Apparat jetzt die Versuche auszuführen.

§ 3. Beobachtungen.

Im Folgenden sind die Beobachtungen mitgetheilt, die bei der Abkühlung in schmelzendem Eise erhalten wurden. Es sind für die einzelnen Temperaturen die Zeiten angegeben, die von dem Moment an gerechnet werden, in welchem das sich abkühlende Thermometer die Ausgangstemperatur (14,89) passirt. Neben der Zeit ist die Abkühlungsgeschwindigkeit

$$v \cdot \log e = \frac{\log r_0 - \log r_n}{t_n}$$

mitgetheilt. Ferner ist die Summe der Zeiten und der Mittelwerth von $v \cdot \log e$, der nach der Formel (2) meiner früheren Arbeit berechnet wurde¹⁾, angegeben.

1) l c. p. 187.

Luft. Druck 17 mm.

Temp.	Zeit in Sec.	$v \log e$	Die weiteren Beobachtungen lieferten für die Summe der Zeiten folgende Werthe. ¹⁾
14,89	0		
14,41	102	0,0001395	
13,93	210	1378	
13,445	320	1385	
12,96	436	1383	
12,465	556	1388	
11,97	681	1392	
11,48	812	1397	
10,99	947	1393	
10,495	1090	1393	
10,00	1245	1389	
Summe: 6399			

Druck:

17 mm 6399

17 „ 6409

35 „ 6394

35 „ 6395

Mittel: 6399

$$v \log e = 0,0001390.$$

Wasserstoff. Druck 40 mm.

Temp.	Zeit in Sec.	$v \log e$	Weitere Beobachtungen:
14,89	0		
14,41	15,8	0,000 9006	
	32,3	8960	
	49,2	9010	
	67,2	8970	
	85,2	9061	
	104,7	9054	
	124,8	9090	
	145,2	9083	
	167,3	9081	
10,00	191,0	9052	
Summe: 982,8			

Druck:

40 mm 982,8

40 „ 986,5

40 „ 985,8

42 „ 983,6

80 „ 985,0

Mittel: 983,9

$$v \log e = 0,0009040.$$

Kohlensäure. Druck 6 mm.

Temp.	Zeit in Sec.	$v \log e$	Weitere Beobachtungen:
14,89	0		
14,41	161	0,0000 884	
	330	877	
	504	879	
	686	879	
	875	882	
	1072	884	
	1278	888	
	1492	884	
	1720	883	
10,00	1961	882	
Summe: 10079			

Druck:

6 mm 100 79

7 „ 100 93

13 „ 100 60

13 „ 100 94

Mittel: 100 81

$$v \log e = 0,0000882$$

Eine Durchsicht der Werthe von $v \log e$ lässt erkennen, dass sie bis zur Temperatur 12,96 kleiner sind, als später:

1) Das Resultat der ersten Beobachtungsreihe ist der Vollständigkeit halber hier nochmals wiederholt.

nur bei der Luft ist der erste Werth grösser. Es wurde schon in der früheren Arbeit auf den gleichen Umstand hingewiesen und die Ursache in einer kleinen Ungenauigkeit (0,01°) des Thermometers festgestellt; auf das Endresultat ist dies nur von geringem Einfluss.

Es war nach den Dimensionen des Apparates zu erwarten, dass auch bei einem höheren Drucke die Abkühlungsgeschwindigkeiten sich nur wenig vergrössern würden. Bei einem Drucke von 710 mm wurde erhalten:

	$v \cdot \log e$
Für Luft	0,0001396
„ Wasserstoff	0,0009127
„ Kohlensäure	0,0000893.

Eine Vergleichung mit den früheren Werthen bei kleinem Druck zeigt, dass die Differenz für Luft und Wasserstoff kleiner als 1 Proc. ist, und dass sie für Kohlensäure 1,2 Proc. beträgt. Die Wirkungen der Gasströmungen sind also hier auch bei einem Druck von 710 mm nur gering.

§ 4. Berechnung der Versuche.

Im Folgenden sind die Werthe angegeben, die zur Berechnung der Wärmeleitungsfähigkeit l der Luft nach den Formeln (2) nöthig sind. Es ist:

$$\left. \begin{array}{l} v \cdot \log e = 0,0001390 \\ V \cdot \log e = 0,0009040 \\ v' \cdot \log e = 0,0000882 \end{array} \right\} \text{bezogen auf Temperatur } 6,1^\circ.$$

Der Wasserwerth W setzt sich zusammen aus dem der Kupferkugel, des eingefüllten Quecksilbers und des Thermometergefässes.

Das Gewicht der Kupferkugel ist 541,803 g; die specifische Wärme des Kupfers¹⁾ bei 6,1° nach Bède 0,0913; daher der Wasserwerth 49,466.

1) Es ist in der früheren Arbeit die specifische Wärme des Kupfers für die Temperatur 6°,1 — das ist jene Temperatur, auf welche sich die Mittelwerthe von $v \cdot \log e$ beziehen — eingeführt. Da die Kugel sich aber bei den Versuchen von 15° bis 10° abkühlt, so muss die mittlere specifische Wärme für dieses Temperaturintervall eingeführt werden; man erhält dann 0,0916 statt des oben angegebenen 0,0913. Der Unterschied ist nur gering; um die Vergleichbarkeit mit den frühern Resultaten vollständig zu erhalten, wurde auch jetzt der frühere Werth benutzt.

Aus dem Gewicht 15,517 des Quecksilbers und der specifischen Wärme 0,0333 folgt der Wasserwerth 0,517.

Endlich ist der Wasserwerth des Thermometergeräthes ¹⁾ 0,156. Hiermit wird $H = 50,139$.

Aus den schon angegebenen Grössen

$$R = 2,8485 \text{ cm; } r = 2,5020,$$

folgt

$$f = 258,48.$$

An diesem Werthe ist noch eine kleine Correction dafür anzubringen, dass die innere Kugel mit der äusseren durch ein Glasrohr verbunden ist ²⁾. Bezeichnet man den Querschnitt des vom Glasrohre eingenommenen cylindrischen Raumes — in dem vorliegenden Falle ist derselbe = 0,594 qcm — mit ϵ , so ist von f die Grösse:

$$\frac{\epsilon}{R - r}$$

abzuziehen, um dem gedachten Einflusse Rechnung zu tragen. Man erhält dann:

$$f' = f - \frac{\epsilon}{R - r} = 256,77.$$

Endlich findet man aus den früher gewonnenen Mittelwerthen der Wärmeleitung bei der Temp. 6,1°:

$$\frac{w}{l} = \frac{0,0003872}{0,0000561} = 6,902 = n$$

$$\frac{k}{l} = \frac{0,0000335}{0,0000561} = 0,5971 = m.$$

Aus der Gleichung (2a) findet man für die Wärmeleitungsfähigkeit der Luft 0,00005827, und aus der Gleichung (2b) 0,00005668. Beide Werthe beziehen sich auf die Temperatur 6,1° und geben im Mittel:

$$L_{6,1} = 0,00005747.$$

Reducirt man mit dem Temperaturcoefficienten 0,0018 auf 0°, so erhält man:

$$L_0 = 0,0000568.$$

Dieser Werth, der mit dem früher aus cylinderförmigen Apparaten abgeleiteten Resultat $L_0 = 0,0000555$ unmittelbar vergleichbar

1) l. c. p. 448.

2) l. c. p. 450.

ist, zeigt diesem gegenüber eine Differenz von 2,3 Proc. Diese wird theilweise in Beobachtungsfehlern, vielleicht auch in einer kleinen Verschiedenheit der specifischen Wärme des Kupfers begründet sein, wobei hervorgehoben werden mag, dass die zwei früher erhaltenen Werthe unter sich einen Unterschied von der gleichen Grösse zeigen.¹⁾

Da die Verhältnisszahlen n und m der früheren Arbeit entnommen sind, hat es keinen Zweck, auch die Werthe für die Wärmeleitung des Wasserstoffs und der Kohlensäure aus den vorliegenden Beobachtungen zu berechnen; man würde die gleichen Differenzen wie bei der Luft finden.

Das Resultat der Versuche lässt sich so zusammenfassen: Die Grössen, die aus der Beobachtung mit *cylinderförmigen* Apparaten für die Wärmeleitung der Luft ermittelt wurden, stimmen nahe (bis auf 2,3 Proc.) mit dem Werthe überein, der durch einen *kugelförmigen* Apparat gewonnen ist.

Jena, November 1892.

1) l. c. p. 450.