Ueber die numerische Auflösung von Differentialgleichungen.

Von

C. Runge in Hannover.

Die numerische Berechnung irgend einer Lösung einer gegebenen Differentialgleichung, deren analytische Lösung man nicht kennt, hat, wie es scheint, die Aufmerksamkeit der Mathematiker bisher wenig in Anspruch genommen, wenn man von der Berechnung der speciellen Störungen absieht, wo besondere Umstände die Rechnung auf Quadraturen zurückzuführen erlauben. Es scheint nicht bekannt zu sein, dass sich die Methoden für die numerische Berechnung von Integralen verallgemeinern lassen, so dass sie mit ähnlichem Erfolge auf jede beliebige Differentialgleichung angewendet werden können. Ich habe im Folgenden eine Verallgemeinerung der bekannten Simpson'schen Regel gegeben, deren Anwendung mir besonders brauchbar scheint, womit ich aber nicht sagen will, dass nicht auch die andern Methoden mechanischer Quadratur brauchbare Verallgemeinerungen geben können.

Euler bemerkt in seiner Introductio, dass man eine Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(xy)$ näherungsweise berechnen könne, indem man ausgehend von einem Werthepaar $x_0 y_0$ zunächst für eine kleine Aenderung Δx von x die zugehörige Aenderung Δy von y gleich $f(x_0 y_0)\Delta x$ nimmt. In dem neuen so gefundenen Punkte $x_1 = x_0 + \Delta x$, $y_1 = y_0 + \Delta y$ berechnet man von Neuem die einer kleinen Aenderung Δx von x entsprechende Aenderung von y, indem man sie gleich $f(x_1 y_1)\Delta x$ setzt. Indem man so fortfährt, erhält man eine gebrochene Linie, die beliebig genau mit einer Lösung der Differentialgleichung übereinstimmt, wenn nur die einzelnen Aenderungen von x und y hinreichend klein sind. Es hat später Cauchy hierfür den strengen Beweis geliefert unter gewissen Voraussetzungen, auf die ich hier nicht näher eingehen will. Dieses Euler'sche Verfahren besitzt nur einen geringen Grad von Genauigkeit, wie man sofort einsieht, wenn man es auf die Berechnung eines Integrals $\int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ anwendet, das ja auch als die Lösung einer Differentialgleichung $\frac{dy}{dx} = f(x)$ aufgefasst werden kann. Das Euler'sche Verfahren würde nämlich den Näherungswerth

$$f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \cdots$$

ergeben, dessen Abweichung vom wahren Werth, wie man geometrisch unmittelbar erkennt, im Allgemeinen eine Grösse derselben Ordnung wie die Intervalle $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \ldots$ ist. Viel besser ist bekanntlich der Näherungswerth

$$f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right)(x_1 - x_0) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)(x_2 - x_1) + \cdots$$

oder auch der Näherungswerth

$$\frac{f(x_0) + f(x_1)}{2}(x_1 - x_0) + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}(x_2 - x_1) + \cdots,$$

deren Abweichungen vom wahren Werth von der zweiten Ordnung gegen die Grösse der Intervalle sind. Der erste stellt sich geometrisch als die Summe der Tangententrapeze dar, das heisst, der Trapeze, die oben von der über dem Mittelpunkt des Intervalls berührenden Tangente begrenzt sind. Der zweite Näherungswerth ist die Summe der Sehnentrapeze d. h. der Trapeze, die oben von den zwei benachbarte Punkte verbindenden Sehnen begrenzt sind. Bezeichnet man den ersten Näherungswerth mit N_1, den zweiten mit N_2, so stellt

$$N_1 + \frac{1}{3}(N_2 - N_1)$$

einen noch besseren Näherungswerth dar, dessen geometrische Bedeutung die Summe der Parabelstreifen ist, d. h. Streifen, oben begrenzt von Parabelbögen, die je drei Punkte mit der Curve gemein haben, die drei Punkte, deren Abscissen die beiden Endpunkte und die Mitte des Intervalls sind. Dieser Näherungswerth ist es, den die „Simpson'sche Regel" liefert, und seine Abweichung vom wahren Werth ist von der vierten Ordnung gegen die Grösse der Intervalle.

Eine ähnliche Ueberlegung führt nun auch für die Differentialgleichungen zu einer wesentlichen Verbesserung des Euler'schen Verfahrens. Ich will mich zunächst auf Differentialgleichungen erster Ordnung beschränken.

Statt

(1) $$\Delta y = f(x_0 y_0)\Delta x \text{ u. s. w.}$$

ist es schon viel besser wenn man

(2) $$\Delta y = f\left(x_0 + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ y_0 + \tfrac{1}{2} f(x_0 y_0)\Delta x\right)\Delta x$$

u. s. w.

setzt. Diese Art der Berechnung entspricht dem aus der Summe der

Tangententrapeze gebildeten Näherungswerthe eines Integrals und deckt sich völlig damit, wenn $f(xy)$ von y unabhängig vorausgesetzt wird.

Oder man kann der Summe der Sehnentrapeze entsprechend setzen:

$$(3) \qquad \Delta y = \frac{f(x_0 y_0) + f\big(x_0 + \Delta x,\ y_0 + f(x_0 y_0)\Delta x\big)}{2}\,\Delta x$$

u. s. w.

Vergleicht man nämlich den wahren Werth von Δy, den man sich ja in eine nach Potenzen von Δx fortschreitende Reihe entwickelt denken kann, mit den von den Näherungsverfahren gelieferten Werthen, die man ebenfalls nach Potenzen von Δx entwickelt, so erkennt man, dass bei dem primitiven von Euler gegebenen Verfahren der Unterschied der beiden Werthe von Δy von der zweiten Ordnung, bei den andern beiden Verfahren dagegen von der dritten Ordnung ist.

Für den wahren Werth von Δy ist nämlich

$$\Delta y = f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2!}$$
$$+ \big(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)\big)\frac{\Delta x^3}{3!} + \cdots$$

wo f_1 und f_2 die partiellen Differentialquotienten erster Ordnung von $f(xy)$, $f_{11} f_{12} f_{22}$ diejenigen zweiter Ordnung nach der bekannten Schreibweise bedeuten.

Die Näherungsverfahren dagegen liefern für Δy:

$$(1) \qquad f\Delta x,$$
$$(2) \qquad f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\frac{\Delta x^3}{8} + \cdots,$$
$$(3) \qquad f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\frac{\Delta x^3}{4} + \cdots,$$

Wenn man nach der Analogie der Simpson'schen Regel die letzten beiden Näherungswerthe so combinirt, dass man zu (2) den dritten Theil des Unterschiedes zwischen (2) und (3) addirt, so erhält man den neuen Näherungswerth

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} + (f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2)\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots,$$

der in dem Falle, wo $f(xy)$ von y unabhängig ist, wo also $f_2 = 0$, zwar auch in dem Gliede dritter Ordnung mit dem wahren Werthe übereinstimmt, aber in dem hier betrachteten allgemeinen Falle nicht. Die Analogie der Simpson'schen Regel kann also in dieser Form nicht festgehalten werden. Aber man kann ihr eine andere Form geben. An die Stelle des Näherungswerthes (3) soll ein anderer treten, der ebenfalls in das Sehnentrapez übergeht, wenn $f(xy)$ von y unabhängig ist.

Es sei nämlich der Näherungswerth von Δy gleich

$$\frac{\Delta' y + \Delta''' y}{2},$$

wo $\Delta' y = f(x_0 y_0)\Delta x$ und $\Delta''' y$ mit $\Delta' y$ durch die Gleichungen

$$\Delta'' y = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta' y)\,\Delta x,$$
$$\Delta''' y = f(x_0 + \Delta x,\ y_0 + \Delta'' y)\,\Delta x$$

zusammenhängt. Dieser Näherungswerth giebt nach Potenzen von Δx entwickelt, die Reihe

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} \tag{3a}$$
$$+ \left(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + 2f_2(f_1 + f_2 f)\right)\frac{\Delta x^3}{4} + \cdots.$$

Der Unterschied zwischen (3a) und (2) ist nun

$$\left[\tfrac{1}{8}(f_1 + 2f_{12}f + f_{22}f^2) + \tfrac{1}{2}f_2(f_1 + f_2 f)\right]\Delta x^3 + \cdots.$$

Und wenn man nun den dritten Theil dieses Unterschiedes zu (2) hinzufügt, so erhält man einen neuen Näherungswerth

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f)\frac{\Delta x^2}{2} \tag{4}$$
$$+ \left(f_{11} + 2f_{12}f + f_{22}f^2 + f_2(f_1 + f_2 f)\right)\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots,$$

der auch in den Gliedern dritter Ordnung noch mit der Entwicklung des wahren Werthes übereinstimmt.

Was sonst noch für die practische Anwendung zu bemerken ist, lässt sich besser an einem Beispiele ausführen.

Es sei die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{y + x}$$

gegeben und die Lösung gesucht, die für $x = 0$ $y = 1$ ergiebt. Man kann diese Lösung analytisch angeben. Mit Polarcoordinaten geschrieben wird nämlich die Differentialgleichung die Form erhalten

$$d\varphi = -\frac{dr}{r},$$

woraus, wenn für $r = 1$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$ sein soll, sich ergiebt

$$r = e^{\frac{\pi}{2} - \varphi}.$$

Durch diese Formel kann man unser Verfahren controliren.

$$f(xy) = \frac{y-x}{y+x}$$

Dem Tangententrapez entsprechend		Dem Sehnentrapez entsprechend	
x	y	x	y
0	1	0	1
$\Delta x = 0.1$	$f(0,1)\,\Delta x = 0.1$	$\Delta x = 0.2$	$f(0,1)\,\Delta x = 0.2$
0.1	1.1	0.2	1.2
$\Delta x = 0.2$	$f(0.1, 1.1)\,\Delta x = 0.167$		$f(0.2, 1.2)\,\Delta x = 0.143$
0.2	1.167		1.143
			$f(0.2, 1.143)\,\Delta x = 0.140$

$$\frac{f(0,1)+f(0.2,1.143)}{2}\,\Delta x = \frac{0.2+0.140}{2} = 0.170.$$

Wir erhalten also dem Tangententrapez entsprechend:

$$y = 1.167,$$

dem Sehnentrapez entsprechend:

$$y = 1.170.$$

Ein Drittel der Differenz ist zu dem ersten Werth zu addiren, so dass wir demnach

$$y = 1.168$$

zu setzen haben. Wenn man sich die Reihenfolge der Operationen gemerkt hat, wird man nicht Alles so ausführlich hinzuschreiben brauchen, wie hier geschehen ist. Ich will noch zwei weitere Schritte rechnen, die nunmehr ohne Erläuterung verständlich sein werden

x	y		x	
0.2	1.168		0.2	1.168
0.15	0.106		0.3	0.212
0.35	1.274		0.5	1.380
0.3	0.170			0.140
0.5	1.338	Tangententrapez		1.308
	1.341	Sehnentrapez		0.134
	0.003			0.346
				0.173
				1 341

0.5	1.339		0.5	2.339
0.25	0.114		0.5	0.228
0.75	1.453		1	1.567
0.5	0.160			0.110
1	1.499	Tangententrapez		1.449
	1.499	Sehnentrapez		0.092
				0.320
				0,160
				1.499

Die Schritte sind grösser gemacht als der erste. Die nahe Uebereinstimmung zwischen den beiden Werthen, die dem Tangententrapez und dem Sehnentrapez entsprechen, verbürgt, dass der Fehler nicht wesentlich grösser als die Einheit der dritten Stelle sein wird.

In der That findet man aus der Formel

$$r = e^{\frac{\pi}{2} - \varphi},$$

dass für $x = 1$ y zwischen 1.498 und 1.499 liegt.

Bei allen drei Schritten ist $\frac{dy}{dx} \leqq 1$. Darnach ist x als unabhängige Variable gewählt. Wird $\frac{dy}{dx} > 1$ so muss man x und y ihre Rollen vertauschen lassen. Die Genauigkeit des Verfahrens beruht nämlich darauf, dass die Entwicklung von Δy nach Potenzen von Δx convergirt. Nähert man sich nun einer Stelle, wo $\frac{dy}{dx}$ unendlich wird, so wird die Convergenz schwächer und hört an der Stelle selbst ganz auf. Diese Schwierigkeit wird aber dadurch beseitigt, dass man immer die schneller sich ändernde Coordinate zur Unabhängigen macht.

Das Verfahren lässt sich ohne Schwierigkeit auch auf Differentialgleichungen höherer Ordnung anwenden. Ich will es nur für Differentialgleichungen zweiter Ordnung hinschreiben. Jede Differentialgleichung n^{ter} Ordnung kann man bekanntlich auch als ein System von n simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung schreiben, indem man für die $n-1$ ersten Differentialquotienten besondere Buchstaben schreibt. Ich will mein Verfahren gleich für ein System von simultanen Differentialgleichungen aussprechen, weil dabei seine Symmetrie besser hervortritt. Es sei gegeben

$$\frac{dy}{dx} = f(xyz),$$

$$\frac{dz}{dx} = g(xyz).$$

Wir können dies System als eine Richtungsvorschrift im Raume auffassen, analog der Differentialgleichung erster Ordnung, die als eine Richtungsvorschrift in der Ebene gelten kann, und können nun ähnlich wie oben, von einem Punkte ausgehend, Näherungswerthe berechnen. Nach dem Euler'schen Verfahren würde man setzen

$$\Delta y = f(xyz)\Delta x, \quad \Delta z = g(xyz)\Delta x,$$

wenn x zur unabhängigen Veränderlichen gewählt ist. Dem Tangententrapez entsprechend würde man setzen

$$\Delta y = f\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ \ y + \tfrac{1}{2} f \Delta x,\ \ z + \tfrac{1}{2} g \Delta x\right)\Delta x,$$

$$\Delta z = g\left(x + \tfrac{1}{2}\Delta x,\ \ y + \tfrac{1}{2} f \Delta x,\ \ z + \tfrac{1}{2} g \Delta x\right)\Delta x.$$

Und dem Sehnentrapez entsprechend würde man setzen

$$\Delta' y = f(x, y, z)\Delta x, \quad \Delta'' y = f(x+\Delta x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z)\Delta x,$$
$$\Delta''' y = f(x+\Delta x,\ y+\Delta'' y,\ z+\Delta'' z)\Delta x,$$
$$\Delta' z = g(x, y, z)\Delta x, \quad \Delta'' z = g(x+\Delta x,\ y+\Delta' y,\ z+\Delta' z)\Delta x,$$
$$\Delta''' z = g(x+\Delta x,\ y+\Delta'' y,\ z+\Delta'' z)\Delta x,$$

$$\Delta y = \frac{\Delta' y + \Delta''' y}{2},$$
$$\Delta z = \frac{\Delta' z + \Delta''' z}{2}.$$

Wenn man diese beiden Systeme von Näherungswerthen nach der Analogie der Simpson'schen Regel combinirt, so lässt sich zeigen, dass die resultirenden Näherungswerthe von Δy und Δz nach Potenzen von Δx entwickelt in den Gliedern erster, zweiter und dritter Ordnung mit den Entwicklungen, der wahren Werthe übereinstimmen. Man kann sich davon durch directe Entwicklung überzeugen. Es ist aber wünschenswerth den Beweis so anzuordnen, dass er sich ohne Schwierigkeit auch für den Fall von Differentialgleichungen n^{ter} Ordnung verallgemeinern lässt.

Es ist

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f + f_1\Delta x + f_2\Delta y + f_3\Delta z$$
$$+\tfrac{1}{2}(f_{11}\Delta x^2 + f_{22}\Delta y^2 + f_{33}\Delta z^2 + 2f_{12}\Delta x\Delta y$$
$$+2f_{23}\Delta y\Delta z + 2f_{13}\Delta x\Delta z) + \cdots.$$

Wenn man hier für Δy und Δz ihre wahren Werthe, nach Potenzen von Δx entwickelt, einsetzt:

$$\Delta y = f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots,$$
$$\Delta z = g\Delta x + (g_1 + g_2 f + g_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots,$$

so erhält man eine Entwicklung von $f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)$ nach Potenzen von Δx.

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z) = f + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\Delta x$$
$$+\tfrac{1}{2}f_2(f_1 + f_2 f + f_3 g)\Delta x^2$$
$$+\tfrac{1}{2}f_3(g_1 + g_2 f + g_3 g)\Delta x^2$$
$$+\tfrac{1}{2}(f_{11} + f_{22}f^2 + f_{33}g^2 + 2f_{12}f + 2f_{23}fg$$
$$+2f_{13}g)\Delta x^2$$

$+$ Glieder höherer Ordnung.

Der Einfachheit wegen mögen U und V für die beiden Ausdrücke

$$U = f_2(f_1 + f_2 f + f_3 g) + f_3(g_1 + g_2 f + g_3 g),$$
$$V = f_{11} + f_{22} f^2 + f_{33} g^2 + 2 f_{12} f + 2 f_{23} f g + 2 f_{13} g$$

geschrieben werden, so dass

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z) = f + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\Delta x + U\frac{\Delta x^2}{2} + V\frac{\Delta x^2}{2} + \cdots.$$

Wenn man die Entwicklung für den dem Sehnentrapez entsprechenden Näherungswerth machen will, so ist

$$f\frac{\Delta x}{2} + f(x+\Delta x,\ y+\Delta'' y.\ z+\Delta'' z)\frac{\Delta x}{2}$$

zu bilden, wo

$$\Delta'' y = f(x+\Delta x, y+f\Delta x, z+g\Delta x)\Delta x = f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\Delta x^2 + \cdots,$$
$$\Delta'' z = g(x+\Delta x, y+f\Delta x, z+g\Delta x)\Delta x = g\Delta x + (g_1 + g_2 f + g_3 g)\Delta x^2 + \cdots.$$

Folglich ergiebt sich für den Näherungswerth von Δy die Entwicklung

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + U\frac{\Delta x^3}{2} + V\frac{\Delta x^3}{4} + \cdots.$$

Für den Näherungswerth der dem Tangententrapez entspricht, hat man

$$f\left(x+\tfrac{1}{2}\Delta x,\ y+\tfrac{1}{2}f\Delta x,\ z+\tfrac{1}{2}g\Delta x\right)\Delta x$$
$$= f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + V\frac{\Delta x^3}{8} + \cdots,$$

Zieht man diesen von jenem ab, so erhält man

$$U\frac{\Delta x^3}{2} + V\frac{\Delta x^3}{8} + \cdots.$$

Und der dritte Theil dieser Differenz zu dem letzten addirt giebt

$$f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2} + U\frac{\Delta x^3}{6} + V\frac{\Delta x^3}{6} + \cdots.$$

Die hingeschriebenen Glieder stimmen sämmtlich mit den entsprechenden Gliedern des wahren Werthes von Δy überein. Denn es ist

$$\Delta y = \int_0^{\Delta x} f(x+\Delta x,\ y+\Delta y,\ z+\Delta z)\,\Delta x = f\Delta x + (f_1 + f_2 f + f_3 g)\frac{\Delta x^2}{2}$$
$$+ U\frac{\Delta x^3}{2.3} + V\frac{\Delta x^3}{2.3} + \cdots.$$

Das gleiche gilt von dem Näherungswerth von Δz. Der Beweis ist derselbe, nur dass y und z, so wie f und g ihre Rollen vertauschen.

Zu der practischen Benutzung des Verfahrens ist nur noch zu bemerken, dass man am Besten diejenige Variable zur Unabhängigen macht, von der man die convergentesten Reihenentwicklungen vermuthet. Man wird also im Allgemeinen die unabhängige Variable wechseln, wenn die Differentialquotienten gross werden.

Als Beispiel will ich die Differentialgleichung behandeln, welche die Gestalt eines Tropfens oder einer Blase bestimmt und analytisch bisher nicht hat gelöst werden können.

Es ist hier bekanntlich die mittlere Krümmung eine lineare Function der senkrechten Coordinate. Bei richtiger Annahme der horizontalen Coordinatenebene kann also die mittlere Krümmung der senkrechten Coordinate proportional gesetzt werden. Der Tropfen soll auf einer horizontalen Grundlage ruhen. Er wird dann eine Symmetrieachse besitzen, die zur z-Axe genommen wird mit der positiven Richtung abwärts. Bei einer Blase, die von unten gegen eine horizontale Fläche drückt, wird ebenso die Symmetrieaxe zur z-Axe gemacht aber mit der positiven Richtung nach oben. Die Differentialgleichung lautet dann:

$$z = \frac{a^2}{2}(K_1 + K_2),$$

wo K_1 und K_2 die beiden Hauptkrümmungen und a eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante (von der Dimension einer Länge) bedeuten. Der eine Hauptkrümmungsradius ist bei einer Rotationsfläche immer gleich der Länge der Normalen zwischen der Fläche und der Rotationsaxe.

Der andere Hauptkrümmungsradius ist gleich dem der Meridiancurve. Bezeichnet r den Abstand eines Punktes von der z-Axe, s die Bogenlänge und φ den Winkel, den die Meridiancurve dort mit der Horizontalebene bildet, so hat man also

$$2z = a^2\left(\frac{\sin\varphi}{r} + \frac{d\varphi}{ds}\right).$$

Statt $\frac{d\varphi}{ds}$ kann man auch schreiben $\frac{d(\sin\varphi)}{dr}$ oder $\frac{d(-\cos\varphi)}{dz}$, da ja $\frac{dr}{ds} = \cos\varphi$ $\frac{dz}{ds} = \sin\varphi$ ist Es lässt sich daher die Differentialgleichung durch eins der beiden folgenden Systeme von simultanen Differentialgleichungen ersetzen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dz}{dr} &= \tan\varphi, \\ \frac{d(\sin\varphi)}{dr} &= \frac{2z}{a^2} - \frac{\sin\varphi}{r}, \end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{aligned} \frac{dr}{dz} &= \cot\varphi, \\ \frac{d(\cos\varphi)}{dz} &= -\frac{2z}{a^2} + \frac{\sin\varphi}{r}. \end{aligned}\right.$$

Wenn $|\tan\varphi| < 1$ ist, werde ich das erste System, wenn $|\tan\varphi| > 1$, das zweite gebrauchen. Alle Tropfen und Blasen haben in der Rotationsaxe eine horizontale Tangentialebene. Ich beschränke mich daher auf diesen Fall, dass für $r = 0$ auch $\varphi = 0$ ist. Dann folgt für $r = \varphi = 0$, da hier $\frac{\sin\varphi}{r} = \frac{d(\sin\varphi)}{dr}$ ist, dass $\frac{d(\sin\varphi)}{dr} = \frac{2z}{a^2} - \frac{d(\sin\varphi)}{dr}$, dass mithin die Krümmung in der Rotationsaxe gleich $\frac{z}{a^2}$ ist. Je nach dem für den Werth von z in der Rotationsaxe angenommenen Werthe erhält man andere und andere Lösungen der Differentialgleichung. Es würde genügen für einen festen Werth von a die Schaar der Lösungen zu berechnen. Denn da a die Dimension einer Länge hat, so würde irgend eine Lösung je nach der Wahl der Längeneinheit jedem beliebigen Werthe von a entsprechen. Es ist daher keine wesentliche Beschränkung der Allgemeinheit, wenn ich $a = 1$ annehme.

Sei nun zum Beispiel für $r = 0$ $z = 1$, so würde sich die Rechnung so gestalten:

Dem Tangententrapez entsprechend					Dem Sehnentrapez entsprechend				
r	z	$\sin\varphi$	$\tan\varphi$	$2z - \frac{\sin\varphi}{r}$	r	z	$\sin\varphi$	$\tan\varphi$	$2z - \frac{\sin\varphi}{r}$
0	1	0	0	1	0	1	0	0	1
0.1	0	0.1			0.2	0	0.2		
0.1	1	0.1	0.1005	1	0.2	1	0.2	0.2041	1
0.2	0.0201	0.2	Tangententrapez			0.0408	0.2		
0.2	1.0201	0.2				1.0408	0.2	0.2041	1.0816
	1.0204	0.2082	Sehnentrapez						
Differenz	+0.0003	+0.0082				0.0408	0.2163		
$\frac{1}{3}$ Differenz	+0.0001	+0.0027				0.0408	0.4163		
						0.0204	0.2082		
0.2	1.0202	0.2027	0.2070	1.027	0.2	1.0202	0.2027	0.2070	1.027
0.1	0.0207	0.1027			0.2	0.0414	0.2054		
0.3	1.0409	0.3054	0.3207	1.064	0.4	1.0616	0.4081	0.4470	1.103
0.2	0.0641	0.2128				0.0894	0.2206		
0.4	1.0843	0.4155				1.1096	0.4233	0.4672	1.161
	1.0876	0.4215				0.0934	0.2322		
	33	60				0.1848	0.4376		
	11	20				0.0674	0.2188		
0.4	1.0854	0.4175							

Der nächste Schritt in derselben Weise ausgeführt bringt uns zu den Werthen

r	z	$\sin\varphi$	$\tan\varphi$
0.6	1.2145	0.6614	0.8819

Und da bei dem nächsten Schritt $\tan\varphi$ erheblich grösser als 1 werden würde, so ziehe ich es vor, schon jetzt z zur unabhängigen Veränderlichen zu machen und das zweite System von simultanen Differentialgleichungen

$$\frac{dr}{dz} = \cot\varphi,$$

$$\frac{d(\cos\varphi)}{dz} = -2z + \frac{\sin\varphi}{r}$$

zu Grunde zu legen:

r	z	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\cot\varphi$	$-2z+\frac{\sin\varphi}{r}$	r	z	$\cos\varphi$	$\cot\varphi$	$-2z+\frac{\sin\varphi}{r}$
0.6	1.2145	0.6614	0.7500	1.134	−1.327	0.6	1.2145	0.7500	1.134	−1.327
0.0907	0.08		−0.1061			0.1815	0.16	−0.2123		
0.6907	1.2945		0.6439	0.8416	−1.484	0.7815	1.3745	0.5377	0.6378	−1.669
0.1348	0.16		−0.2375			0.1020		−0.2672		
0.7348	1.3745		0.5125			0.7020		0.4828	0.5513	−1.501
0.7349			0.5238							
1			113			0.0882		−0.2402		
0			38			0.2697		−0.4525		
						0.1349		−0.2262		
0.7348	1.3745		0.5163							

Man kann auch $\cos\varphi$ zur unabhängigen Veränderlichen machen. Dann berechnet man aus der Aenderung von $\cos\varphi$ zuerst die von z und daraus die Aenderung von r. Geht man so zwei Schritte weiter und lässt $\cos\varphi$ beim zweiten Schritt Null werden, so ergiebt sich

r	z	$\cos\varphi$
0.8169	1.6565	0.0000.

Die vierte Decimale ist nicht mehr zuverlässig. Auch habe ich bei der Rechnung mich des Rechenschiebers bedient, wodurch bei der Grösse der Schritte die vierte Stelle fehlerhaft werden kann. Mit halb so grossen Schritten lieferte die Rechnung

r	z	$\cos\varphi$
0.8180	1.6568	0.0000,

woraus ich schliessen zu dürfen glaube, dass für den Rand des Tropfens oder der Blase

$$r = 0.818, \quad z = 1.657$$

mit der Genauigkeit von einer Einheit der dritten Decimalen gesetzt werden kann.

Man kann übrigens auch mathematisch die Genauigkeit des Verfahrens bestimmen. Ich glaube indessen, dass ein practischer Rechner sich meistens mit der geringeren Sicherheit begnügen wird, die er aus der Uebereinstimmung seiner Resultate für grössere und kleinere Schritte gewinnt.

Die Werthe von $\tan \varphi$ oder $\cot \varphi$, die zu gegebenen Werthen von $\sin \varphi$ oder $\cos \varphi$ gehören, kann man aus einer Tabelle entnehmen. Ich habe zuerst die Coordinaten- und Tangenten-Tafeln von C. Dittmann benutzt. Sie sind für diesen Zweck nicht besonders geeignet, und ich habe mir deshalb selbst eine kleine Tabelle angelegt, die für die Zahlen $u = 0.001$ bis 0.710 die Werthe von $\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}$ auf vier Decimalen genau angiebt. Die Tabelle lässt sich auf drei Quartseiten schreiben, aus denen ohne umzublättern sogleich der Werth von $\tan \varphi$ entnommen wird, wenn $\sin \varphi$ gegeben ist, oder von $\cot \varphi$, wenn $\cos \varphi$ gegeben ist.

Potsdam, im September 1894.