SULLE SUPERFICIE DI RIEMANN RELATIVE ALLE CURVE ALGEBRICHE,

Nota di **P. del Pezzo**, Duca di Cajanello, in Napoli

Adunanza del 26 giugno 1892

Il Klein (*) ha indicato un metodo semplicissimo per costruire intuitivamente la superficie riemanniana relativa ad una curva algebrica, quando se ne conosca la forma, e quindi determinarne il genere senza cercare il numero delle sue falde e dei punti di diramazione esaminandone l'equazione

Sia data una curva piana algebrica f involuppo di tangenti

Le tangenti reali involuppano la curva reale e sono in numero semplicemente infinito, quelle immaginarie sono in numero doppiamente infinito. Ogni tangente immaginaria ha un punto reale. L'insieme di questi punti reali da cui si possono condurre tangenti immaginarie corrisponde univocamente all'insieme delle tangenti immaginarie della curva, purchè si supponga ognuno di quei punti reali tante volte ripetuto e sovrapposto a sè stesso quante sono le tangenti immaginarie che da quel punto si possono condurre alla curva. Quei punti costituiscono così una superficie corrispondente alla curva. Il suo genere è quello della curva.

(*) Math. Ann., V, 8.

Per esempio, ad ottenere la riemanniana di una ellisse si ragiona a questo modo: la si considera come l'involuppo delle sue tangenti. Da ogni punto reale P interno alla ellisse si possono condurre due e due sole tangenti immaginarie, queste si riuniscono in una sola reale quando il punto P sta sul contorno dell'ellisse. Sicchè pensando il pezzo di piano interno all'ellisse come costituito da due falde, possiamo ad ogni tangente immaginaria far corrispondere un unico punto P dell'interno dell'ellisse, che sarà l'unico punto reale che giace su quella, e viceversa al punto P possiamo riferire un'unica tangente immaginaria, che sarà o l'una o l'altra delle due condotte da P , secondochè pensiamo P come appartenente alla prima o alla seconda falda.

Alle tangenti reali si possono poi riferire univocamente i punti di contatto.

La superficie di Riemann della ellisse è dunque di due falde formate dalla parte interna dell'ellisse contata due volte e riunite lungo il contorno dell'ellisse.

Ma quando dalla ellisse si passa a studiare le curve di genere più alto le costruzioni indicate si complicano di molto.

Mi propongo in questa breve nota di estendere gli stessi procedimenti del Klein alla costruzione delle riemanniane delle curve di genere superiore a zero, considerando le curve normali del genere che si vuol esaminare contenute in spazi a più dimensioni. Il che può farsi mediante facili osservazioni. Più particolarmente mi occupo della curva del quarto ordine e genere uno dello spazio a tre dimensioni.

§ I

CURVE DI GENERE UNO.

1. Abbiasi nello spazio a tre dimensioni una curva storta C^4 intersezione di una quadrica reale Q^2 e di un cono reale K^2 di vertice O . Da O la C^4 è proiettata sopra un piano π in una conica γ a contorno reale: per fissare le idee sia γ una ellisse.

2. Secondochè sono o no reali le quattro tangenti condotte da O alla curva C avremo i seguenti casi.

1° Il contorno della conica γ è diviso in quattro parti dai punti P_1, P_2, P_3, P_4 , che sono le tracce delle quattro tangenti reali condotte da O alla curva C^4 . I punti R dei segmenti P_1P_2 e P_3P_4 sono proiezioni di coppie di punti reali della curva C^4 , mentre i punti I dei segmenti P_2P_3 e P_4P_1 sono proiezioni di coppie di punti immaginari coniugati della curva C^4 .

2° Il contorno della conica γ è diviso in due parti dai punti P_1 e P_2 che sono le tracce delle due sole tangenti reali condotte da O alla curva C^4 . I punti R di uno dei segmenti P_1P_2 sono proiezioni di coppie di punti reali e i punti I dell'altro di coppie di punti immaginari coniugati della curva C^4 .

3° Tutte e quattro le tangenti condotte da O alla curva C^4 sono immaginarie ed ogni punto R della conica γ è proiezione di una coppia di punti reali della curva C^4 .

4° Tutte e quattro le tangenti condotte da O alla curva C^4 sono immaginarie ed ogni punto I della conica γ è proiezione di una coppia di punti immaginari coniugati della curva C^4 , la quale in questo caso non ha punti reali.

3. La C^4 possiede corde *reali* c con punti d'appoggio *reali* e corde *reali* c' con punti d'appoggio *immaginari coniugati*. Nel sistema doppiamente infinito di queste corde *reali* si passa dalle c alle c' attraverso le tangenti reali t della curva data.

Le c sono proiettate da O nelle rette r del piano π , che incontrano in due punti R la conica γ , ed ogni retta r rappresenta quattro corde c , mentre ciascuno dei due punti d'incontro di r con γ rappresenta una corda di C^4 uscente dal punto O .

Le tangenti reali di C^4 si proiettano a due a due nelle tangenti a γ nei punti R , salvo le tangenti reali uscenti da O , se vi sono, le quali hanno per immagine sul piano π le loro tracce rispettive nei punti P .

Le corde c' sono proiettate nelle rette r' di π che non incontrano γ in punti reali. Un piano Oc' incontra C^4 in quattro punti immaginari, separati in due coppie di punti coniugati, che danno luogo a due corde reali c' e però ogni retta r' rappresenta due corde c' .

Sicchè una retta r del piano π , la quale unisca due punti R

della conica γ è sempre la proiezione di quattro corde reali della curva C^4 aventi gli appoggi anche reali

Una retta s che unisca un punto R con un punto I della conica γ non è proiezione di nessuna corda reale della curva C^4 , e lo stesso accade per una retta s , che unisca due punti I della conica γ

Finalmente ogni retta r' che non incontri la γ in punti reali e l'immagine di due sole corde reali c' della curva C^4 , che congiungono coppie di punti immaginari coniugati

4. Ad ogni punto reale della curva C^4 riferiamo la tangente t in quel punto, di guisa che ogni tangente t rappresenti un solo punto della curva C^4 .

Ad ogni punto immaginario della curva C^4 riferiamo quella corda *reale* c' che lo unisce col suo coniugato, donde ogni corda c' rappresenta due punti distinti della curva C^4

Vengono così rappresentati i punti immaginari e reali della curva C^4 sopra un sistema doppiamente infinito di enti reali c' e t

5 Per riconoscere meglio le proprietà di tal sistema si ritorni al piano π

Ogni tangente in un punto R di γ rappresenta due rette t e quindi due punti della curva C^4 , ed ogni retta r' rappresenta due corde c' che non sieno generatrici del cono K^2 , e perciò quattro punti della curva C^4

Alle corde c' , che sono generatrici del cono K^2 , le quali esistono nei casi 1° e 2° e 4° enumerati di sopra, si riferiscano le tangenti a γ nelle rispettive tracce I .

Finalmente alle tangenti reali di C^4 uscenti da O (se ve ne sono) si riferiscano le tangenti a γ nelle tracce rispettive

6 Trasformando il piano π mediante una polarità rispetto a γ , si vede, che i punti del piano π interni alla conica γ rappresentano quattro punti della curva C^4 , a due a due immaginari coniugati, i punti R del contorno della conica γ (quando ve ne sono) due punti reali della C^4 , i punti I del contorno di γ (quando ve ne sono) due punti immaginari coniugati di C^4 , ed i punti del contorno di γ coppie di punti

reali e coincidenti della curva C^4 O in altri termini i punti interni alla conica γ rappresentano sempre quattro punti di C^4 , e quelli del contorno di γ due soli punti della C^4

7 Quando la C^4 possiede una, o due coppie di tangenti immaginarie uscenti da O , e sono M_1, M'_1, M_2, M'_2 le coppie di punti di contatto coniugati, allora nel piano $OM_1M'_1$ esiste una sola corda c' la $M_1M'_1$, e perciò la corrispondente retta r' nel piano π ed il corrispondente punto interno alla conica γ rappresenta solamente due punti di C^4 cioè i punti M_1 , ed M'_1 , ciascuno da contarsi due volte. Questo punto si chiami N_1 , ovvero N'_1 , secondo che lo si pensa come corrispondente di M_1 , ovvero di M'_1 , e analogamente si denoti con N_2 , ovvero N'_2 il punto di π corrispondente a M_2 , od M'_2

8 Riassumendo, ai punti di contatto delle quattro tangenti della curva C^4 uscenti da O corrispondono nel piano π o quattro punti P del contorno di γ , che separano i punti R dai punti I , ovvero due punti P del contorno di γ , che separano i punti R dai punti I , ed un punto (N_1, N'_1) situato nell'interno di γ , ovvero due punti (N_1, N'_1) ed (N_2, N'_2) ambedue interni a γ , nel qual caso il contorno di γ si compone tutto o di punti R , o di punti I

9 Sieno A, A', B, B' quattro punti immaginari della curva C^4 giacenti in un piano θ uscente da O e sieno coniugati A ed A' nonchè B e B' le coppie A, B ed A', B' sieno allineate con O su due generatrici immaginarie coniugate g e g' del cono K^2 .

Si pensi ora che il pezzo del piano π interno alla ellissi γ si componga di quattro fogli sovrapposti 1, 2, 3 e 4 sui quali sieno rispettivamente rappresentati i punti A, A', B e B' della curva C^4 . Se i punti A e B si muovono sino ad incontrarsi rimanendo sempre distinti da A' e B' la retta g si muoverà sino a diventar tangente alla C^4 . Dunque affinchè un punto del foglio 1 movendosi vada sul foglio 3 dovrà passare di necessità per un punto N .

Questi punti N appartengono tanto al foglio 1 quanto al foglio 3.

Si ragioni allo stesso modo su' punti A' e B' e quindi sui fogli 2

e 4, se ne dedurrà, che per passare da un punto di 2 ad uno di 4, o viceversa, è necessario incontrare un punto N questi appartengono dunque ai due fogli 2 e 4

Per fissare le idee si dica che i punti N_1 ed N_2 legano i fogli 1 e 3 mentre N'_1 ed N'_2 legano 2 e 4

10 Se A ed A' si muovono sino ad incontrarsi essi coincidono una volta in un punto reale di C^4 e nello stesso tempo le generatrici g e g' in una reale del cono K^2 . Sicchè nel piano π non si può passare da un punto del foglio 1 ad un punto del foglio 2 senza incontrare un punto R del contorno di γ . Allo stesso modo si ragiona per i punti B e B' e quindi per i fogli 3 e 4. Quando non vi sono punti R non si può passare direttamente da 1 a 2, nè da 3 a 4. Quando vi sono ciascuno di essi va contato due volte corrispondendo a due punti della C^4 . Un medesimo punto R si denoterà con R_{12} , o con R_{34} secondo si penserà appartenere ai fogli 1 e 2, o 3 e 4.

11 Si spostino ora i punti A e B' finchè coincidano, simultaneamente si sposteranno e coincideranno i punti A' e B . Le generatrici g e g' si riuniranno allora in una generatrice reale del cono K^2 sulla quale si troveranno due punti immaginari coniugati S ed S' della curva C^4 nei quali sono giunti rispettivamente i punti A , B' ed A' , B . Se ne ricava che nel piano π non si può passare da un punto del foglio 1 ad un punto del foglio 4, nè da un punto del foglio 2 ad un punto del foglio 3 senza attraversare un punto I sul contorno della ellisse γ . Quando non vi sono punti I , non si può andare direttamente da 1 a 4, o da 2 a 3. Quando ve ne sono ciascuno di essi conta per due nel piano π , poichè rappresenta due punti di C^4 . Verrà indicato con I_{14} , o con I_{23} , secondo che lo si pensi appartenere agli strati 1 e 4, o 2 e 3.

12 L'insieme dei quattro fogli 1, 2, 3 e 4 costituisce una superficie riemanniana relativa alla curva C^4 . I ragionamenti su esposti permettono in ciascuno dei quattro casi, che presenta la C^4 , di esaminare le particolarità della relativa riemanniana.

1° Esistono sul contorno di γ 1 quattro punti P_1, P_2, P_3 e P_4 . Separando i quattro fogli della superficie si ottiene immediatamente la figura di un anello. I segmenti di punti R si sdoppiano e forniscono due paralleli dell'anello. Allo stesso modo i segmenti di punti I due meridiani dell'anello. I punti P sono comuni a quei paralleli e meridiani.

2° Esistono 1 due punti di diramazione P_1, P_2 sul contorno di γ e gli altri due N_1 ed N_2 nei quali si passa rispettivamente da 1 a 3, da 2 a 4. Lungo i punti R di uno dei segmenti $P_1 P_2$ si passa da 1 a 2, o da 3 e 4 e lungo i punti I dell'altro segmento $P_1 P_2$ si passa da 1 a 4, o da 2 a 3. Si incida la superficie $\overline{1234}$ lungo il segmento $P_1 P_2$ due volte, l'una lungo i punti R_{12} l'altra lungo i punti R_{34} . La superficie restante può immaginarsi composta di due calotte sferiche $\overline{14}, \overline{23}$ sia per esempio $\overline{23}$ interna ad $\overline{14}$. Si faccia un'altra incisione lungo la linea $N_1 N_2$. Si tolga $\overline{23}$ da dentro $\overline{14}$ e capovolgetola e raggristatala in continuità di $\overline{14}$ (in modo che si connettano le parti che prima erano connesse lungo i punti R) si otterrà una sfera con due buchi i cui orli provengono dai margini della fenditura $N_1 N_2$. Finalmente riconnettendo questi orli si perviene alla figura di una sfera con un manico.

3° Il contorno di γ contiene soli punti R . La superficie $\overline{1234}$ è formata di due sfere $\overline{13}$ e $\overline{24}$. Si può passare da una sfera all'altra solamente per uno dei quattro punti N_1, N'_1, N_2, N'_2 . Questa superficie si compone di due falde (le due sfere) con quattro punti di diramazione (i punti N). Una nota formola ne dà il genere uguale ad uno. Lungo il contorno di γ si possono eseguire due tagli che la spezzano in due parti.

4° Il contorno di γ contiene solamente punti I . La superficie $\overline{1234}$ che qui si deduce è la stessa che nel caso precedente, salvo che le due sfere sono $\overline{14}$ e $\overline{23}$.

13 Se si deforma con continuità il cono K^2 in modo p e che la sua parte reale diventi tutta interna al cono quadrico col vertice in O e circoscritto alla quadrica Q si può sempre limitarsi a considerare uno solo dei casi summentovati p. e. il 3° caso.

14 Quando la curva C^* possiede un punto doppio O da questo è proiettata univocamente sopra una conica γ e le sue corde univocamente sulle rette r del piano π sicchè la sua riemanniana coincide con quella della conica γ

15 Una curva qualunque di genere uno può sempre trasformarsi univocamente in una curva del quarto ordine dello spazio a tre dimensioni e quindi si può sempre costruire la sua riemanniana nel modo accennato di sopra.

§ II

DELLE CURVE DI GENERE p .

16 Abbiassi in uno spazio lineare di $p + 2$ dimensioni $[p + 2]$ una curva C dell'ordine $2p + 2$ e del genere p definita come l'intersezione di una superficie reale F_2 rigata dell'ordine $p + 1$ (la superficie normale di quello spazio) e di un cono quadrico reale K^2 avente a sostegno un $[p - 1]$ che indicheremo con O

Ogni $[p]$ del cono K^2 incontra la superficie F_2 e per conseguenza la curva C in $p + 1$ punti, sicchè la curva C viene proiettata dal $[p - 1]$ O su di un piano π in una conica γ a contorno reale, ogni punto di γ corrispondendo a $p + 1$ punti di C

17 Sia S un punto della conica γ che rappresenti $p + 1$ punti della curva C dei quali $2q$ punti Q sieno immaginari e a due a due coniugati, con $0 \leq 2q \leq p + 1$, ed i rimanenti $p + 1 - 2q = t$ punti T sieno reali. Lo si indicherà con S_q , ovvero con S_t secondochè lo si pensa corrispondere ai punti Q , o ai punti T ($2q + t = p + 1$) Analogamente sia S' un punto di γ , che rappresenti $2q'$ punti Q' immaginari e t' punti T' reali della curva C

La corda SS' della conica γ e proiezione delle $(p + 1)^2$ corde QQ' , QT' , $Q'T$, TT' , della curva C , fra le quali le $t t'$ corde TT' sono reali, le rimanenti sono immaginarie. O altrimenti le rette r del piano π che incontrano la conica γ in due punti reali distinti sono immaginari o di corde reali ad appoggi reali o di corde immaginarie della curva C .

18 Una retta r' del piano π la quale non incontri in punti reali la conica γ congiunta con O genera un $[p + 1]$ che incontra C in $2p + 2$ punti tutti immaginari e a due a due coniugati, questi dan luogo a $p + 1$ corde reali c' con appoggi immaginari. Sicche la r' rappresenta $p + 1$ corde reali c' ad appoggi immaginari.

19 Il $[p - 1]$ -cono K^{2p} circoscritto alla superficie F_2 ed avente a sostegno O è dell'ordine $2p$ (*), ed ha in comune con K^{2p} $4p$ spazi $[p]$ generatori. Da O possono quindi condursi $4p$ spazi $[p]$ tangenti alla curva C , dei quali sieno a reali, $2a'$ immaginari a due a due coniugati.

Gli a $[p]$ tangenti reali toccano la C nei punti $B_1, B_2, \dots B_a$ ed hanno per traccia sulla conica γ i punti $A_1, A_2, \dots A_a$ che sono gli estremi dei segmenti dove giacciono rispettivamente i punti $S_1, S_2, \dots S_{a'}$.

Due $[p]$ tangenti immaginari Δ e Δ' coniugati stanno in uno $[p + 1]$ reale θ , nel quale si trova la corda reale c'_θ che unisce i due punti di contatto E ed E' . Questa conta per due fra le corde contenute in θ . La traccia di θ sul piano π è una retta r'_θ che rappresenta $p + 1$ corde reali c' due delle quali coincidono nella c'_θ . Vi sono a' spazi θ , corde c'_θ , rette r'_θ e si indicheranno con $\theta_1, \theta_2, \dots \theta_{a'}$, $c'_{1\theta}, c'_{2\theta}, \dots c'_{a'\theta}$, $r'_{1\theta}, r'_{2\theta}, \dots r'_{a'\theta}$. Vi sono poi $2a'$ punti E ed E' che verranno ordinatamente designati con $E_1, E_2, \dots E_{a'}, E'_1, E'_2, \dots E'_{a'}$.

20 Si riferisca ad ogni punto reale di C la tangente in quel punto, ad ogni punto immaginario la corda reale c' che lo unisce col suo coniugato. Ad ogni punto immaginario della C corrisponde così una sola corda c' e ad una corda c' due punti immaginari della C . Alle corde c'_θ corrispondono due coppie di punti riuniti. Sono così rappresentati i punti reali ed immaginari di C sopra un sistema doppiamente infinito di enti reali.

(*) Ossia $2p$ è il *primo rango* di F_2 . In generale dicesi *primo rango* di una F_2^n immersa in $[m]$ l'ordine degli $[m-3]$ -coni ad essa circoscritti, cioè il *primo rango* della sua sezione spaziale, cioè il rango di una superficie proiezione generica della F_2 in un spazio a tre dimensioni—Cfr C A P O R A L I *Memorie* (Pellerano, Napoli)

21 Ad una corda c' di C si riferisca la sua proiezione r' in π , ma se la corda c' giace in un $[p]$ del cono K^2 , cioè se congiunge p es due dei punti Q menzionati al n° 17, le si riferisca la tangente alla conica γ nel rispettivo punto S di γ traccia di quel $[p]$ sul piano π . Alle tangenti di C si riferiscano le rispettive proiezioni tangenti di γ .

Ne risulta che ad ogni retta r' di π che non seghi γ corrispondono $2p + 2$ punti immaginari di C . Fra' $2p + 2$ punti corrispondenti ad una delle r'_0 vi sono due coppie di punti riuniti in E ed E' . Ad una tangente di γ corrispondono $p + 1$ punti di C dei quali $2q$ sono immaginari ($0 \leq 2q \leq p + 1$) ed i rimanenti t sono reali.

22 Trasformando il piano π mediante una polarità rispetto a γ , si può con un punto interno a γ rappresentare $2p + 2$ punti di C immaginari e a due γ due coniugati. I poli delle rette r'_0 rappresentano $2p + 2$ punti di C due dei quali si riuniscono in E e due in E' . Uno di questi punti verrà chiamato $N_{i,0}$, od $N'_{i,0}$ ($i = 1, 2, \dots, a'$) secondochè lo si pensi corrispondente ad E , o ad E' .

Un punto sul contorno di γ rappresenta $p + 1$ punti di C dei quali $2q$ sono immaginari e i rimanenti t sono reali. I punti $A_1, A_2, \dots, A_a$ (n° 19) rappresentano rispettivamente $p + 1$ punti di C , due dei quali, sempre reali, coincidono ordinatamente nei punti $B_1, B_2, \dots, B_a$ (n° 19). Il punto A_i quando lo si pensi come corrispondente del punto B_i verrà chiamato $A_{i,0}$.

23 S'immagini che la parte interna di γ sia composta di $2p + 2$ fogli sovrapposti mentre i punti del contorno di γ sieno da contare $p + 1$ volte, si costruirà così una superficie R che sarà la riemanniana della curva C , poichè i suoi punti corrispondono univocamente ai punti di C . I punti $A_{i,0}$, $N_{i,0}$ ed $N'_{i,0}$ ciascuno dei quali corrisponde a due punti riuniti di C apparterranno ciascuno a due fogli della superficie R .

24 Sieno G e G' due dei $[p]$ generatori del cono K^2 immaginari coniugati, e sieno $M_1, M_2, \dots, M_{p+1}, M'_1, M'_2, \dots, M'_{p+1}$ rispettivamente i punti immaginari dove essi incontrano C , e sia M_i coniugato di M'_i . Se due punti M_n ed M'_k si muovono percorrendo la C sino

a coincidere, nello stesso tempo gli spazi G e G' si muovono sino a confondersi con uno degli spazi generatori reali del cono K^2 . Sicchè i due punti della superficie R corrispondenti ad M_b ed M'_k movendosi sino a coincidere incontreranno una volta almeno il contorno di γ in un certo punto S e precisamente il punto S va riguardato come rappresentante un punto reale, o immaginario di C (n° 17) secondochè M_b è andato a riunirsi col suo coniugato, o no, cioè secondo che b è uguale, o diverso da k .

25. Indicando con $f_1, f_2, \dots, f_{p+1}$ ed $f'_1, f'_2, \dots, f'_{p+1}$ i $2p+2$ fogli della superficie R dove sono rappresentati ordinatamente i punti M_i ed M'_i , risulterà da quanto precede che due fogli coniugati come f_i ed f'_i si connettono lungo i punti S_i della conica γ (n° 17) e due fogli come f_i ed f'_k si connettono lungo i punti S_i .

26. Se due punti M_b ed M_k giacenti in un medesimo spazio G si muovono sino a riunirsi, lo G diventa tangente nel punto immaginario E . Dunque dal foglio f_b si può passare direttamente ad f_k attraverso uno dei punti N_θ e sia N_θ . Analogamente f'_b ed f'_k si connettono attraverso N'_θ .

Si ottengono così $2a'$ punti di diramazione.

27. Finalmente se G e G' movendosi vengono a coincidere in uno $[p]$ reale e tangente alla curva C verranno anche a riunirsi un punto M_i col suo coniugato M'_i con un punto M_b e col coniugato di questo M'_b . Dunque attraverso un punto A_θ si connettono quattro fogli della R f_i, f'_i, f_b, f'_b . Vi sono a punti A_θ e (n° 19) $a+2a'=4p$.

28. Riassumendo, si presenterebbero tanti casi ad esaminare di superficie R quante sono rispetto ad a ed a' le soluzioni della equazione $a+2a'=4p$. Ma per semplicità si ridurranno tutti questi casi ad un solo con un ragionamento *a priori* analogo a quello del n° 13.

29. Il cono K^{2p} circoscritto alla superficie F_2 è razionale poichè i suoi $[p+1]$ tangenti sono determinati univocamente da O e

dalle rette generatrici di F_2 . Sicchè rispetto ad esso la stella che ha per sostegno lo spazio O si divide in due parti l'una composta dei $[p]$ interni l'altra dei $[p]$ esterni a K^{2p} . Si deforma con continuità il cono K^2 in modo che la sua parte reale sia tutta interna a K^{2p} , non vi saranno più allora degli spazi $[p]$ reali tangenti alla curva C , e sarà $2a' = 4p$. Ogni $[p]$ di K^2 incontrerà allora F_2 e quindi C in $p + 1$ punti tutti reali, e la conica γ si comporrà di soli punti S_i , lungo i quali si connettono a due a due i fogli f_i ed f'_i della superficie R . Questa si potrà ridurre a $p + 1$ sfere ciascuna composta di due fogli f_i ed f'_i , si passa dall'una all'altra sfera attraverso $4p$ punti di diramazione $N_{i,0}$, $N'_{i,0}$.

Si ottiene così una riemanniana della curva C composta di $p + 1$ falde con $4p$ punti di diramazione.

30. Da una nota formola si ricava che il suo genere è p .

Napoli, 21 giugno 1892.

P DEL PEZZO

Duca di Cajanello