**SOPRA IL COEFFICIENTE DI AUTOINDUZIONE DI UN ANELLO
A SEZIONE RETTANGOLARE.**

Nota di A. GARBASSO

(in Torino).

§ 1. Nella mia memoria « Su la funzione T_{me} di Maxwell »¹⁾ tutti gli sviluppi furono condotti nell'ipotesi che la corrente si distribuisse uniformemente nella sezione dell'anello, che serviva alle esperienze.

Mi propongo di mostrare adesso che, per il calcolo del coefficiente d'autoinduzione, questo modo di considerare le cose, mentre introduce una certa semplicità in un problema già abbastanza difficile, porta alla fine a trascurare dei termini, la cui grandezza arriva appena a pochi centesimi del valore complessivo.

§ 2. E per vero, se il flusso elettrico si produce sopprimendo un campo di intensità uniforme H , la corrente nell'anello elementare è data da :

$$\begin{aligned} & \frac{H \pi (r+x)^2}{2 \pi (r+x) \rho} \frac{dx dy}{\rho} , \\ & = \frac{H}{2\rho} (r+x) dx dy ; \end{aligned}$$

quindi la corrente totale si calcola con la formola :

$$\begin{aligned} & + \frac{h}{2} + \frac{l}{2} \\ & \frac{H}{2\rho} \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} dx (r+x) , \\ & = \frac{H}{2\rho} r h l . \end{aligned}$$

¹⁾ N. Cim. (5), I, 401, 1901.

Ponendo :

$$\frac{H}{2\rho} r h l = 1$$

si ricava :

$$\frac{E}{2\rho} = \frac{1}{r h l},$$

e però la corrente elementare potrà mettersi sotto la forma :

$$\frac{1}{h l} \cdot \frac{r+x}{r} dx dy.$$

e il coefficiente di autoinduzione, nel caso, che ci occupa, sarà dato da :

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= \frac{1}{l^2 h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 \frac{(r+x_1)(r+x_2)}{r^2} P, \\ &= \mathbf{L} + \frac{1}{l^2 h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 \left(\frac{x_1+x_2}{r} + \frac{x_1 x_2}{r^2} \right) P, \\ &= \mathbf{L} + \frac{1}{l^2 h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 Q P, \end{aligned}$$

$$(1) \quad = \mathbf{L} + \mathbf{A}.$$

Per procedere innanzi conviene scrivere per P il suo valore, cioè :

$$P = P_1 - P_2 \log \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}$$

con :

$$P_1 = 4 \pi r \log 8 r \cdot \left[1 + \frac{x_1 + x_2}{2r} + \frac{(x_2 - x_1)^2 + 3(y_2 - y_1)^2}{16r^2} \right] \\ + 4 \pi r \left[-2 - \frac{x_1 + x_2}{2r} + \frac{x_1 x_2}{2r^2} + \frac{3(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{16r^2} \right],$$

e :

$$P_2 = 4 \pi r \left[1 + \frac{x_1 + x_2}{2r} + \frac{(x_2 - x_1)^2 + 3(y_2 - y_1)^2}{16r^2} \right].$$

Verrà subito :

$$Q P_1 = 4 \pi r \log 8 r \cdot \left[\frac{x_1 + x_2}{r} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2r^2} + \frac{x_1 x_2}{r^2} \right] \\ + 4 \pi r \left[-2 \frac{x_1 + x_2}{r} - \frac{(x_1 + x_2)^2}{2r^2} - 2 \frac{x_1 x_2}{r^2} \right], \\ = 4 \pi r \log 8 r \cdot \left[\frac{x_1 + x_2}{r} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2r^2} + 3 \frac{x_1 x_2}{r^2} \right] \\ + 4 \pi r \left[-2 \frac{x_1 + x_2}{r} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{2r^2} - 4 \frac{x_1 x_2}{r^2} \right], \\ = \Pi_1,$$

$$Q P_2 = 4 \pi r \left[\frac{x_1 + x_2}{r} + \frac{(x_1 + x_2)^2}{2r^2} + \frac{x_1 x_2}{r^2} \right], \\ = 4 \pi r \left[\frac{x_1 + x_2}{r} + \frac{(x_2 - x_1)^2}{2r^2} + 3 \frac{x_1 x_2}{r^2} \right], \\ = \Pi_2,$$

e :

$$\Delta = \frac{1}{l^2 h^2} \int dy_2 \int dy_1 \int dx_2 \int dx_1 \left[\Pi_1 - \Pi_2 \log \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2} \right] \\ - \frac{h}{2} - \frac{h}{2} - \frac{l}{2} - \frac{l}{2}$$

L'uguaglianza (I), quando si tenga conto della forma di Π_1 e Π_2 , basta già per dimostrare che i valori di Λ e L differiscono uno dall'altro per semplici termini di correzione, dell'ordine di grandezza di quelli, che servono per passare da L' a L .

§ 3. Dovendo ora calcolare la Λ porremo anzitutto:

$$\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2,$$

$$\Lambda_1 = \frac{1}{l^2 h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 \Pi_1,$$

$$\Lambda_2 = \frac{1}{l^2 h^2} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_2 \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dy_1 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_2 \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} dx_1 \Pi_2 \log V \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}.$$

Il primo di tali termini si integra immediatamente e fornisce:

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= \frac{1}{l^2 h^2} \left(4 \pi r \log 8 r \cdot \frac{1}{12} \frac{l^4 h^2}{r^2} - 4 \pi r \frac{1}{12} \frac{l^4 h^2}{r^2} \right), \\ &= 4 \pi r \cdot \frac{1}{6 r^2} (\log 8 r - 1) \frac{1}{2} l^2; \end{aligned}$$

se si fa l'ipotesi che i termini in $\frac{l^4}{r^2}$, $\frac{h^2}{r^2}$ siano già trascurabili risulta:

$$\Lambda'_1 = 0.$$

Ed ora resta da calcolare il secondo termine, cioè Λ_2 ; questo può scindersi in tre, ponendo in luogo di Π_2 la sua espressione. Sarà infatti:

$$\Lambda_2 = \Lambda_{211} + \Lambda_{212} + \Lambda_{213},$$

con :

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,1} &= \frac{4\pi r}{l^2 h^2} \cdot \frac{1}{r} \iiint dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 (x_1 + x_2) \log V \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}, \\ \Lambda_{2,2} &= \frac{4\pi r}{l^2 h^2} \cdot \frac{1}{2r^2} \iiint dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 (x_2 - x_1)^2 \log V \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}, \\ \Lambda_{2,3} &= \frac{4\pi r}{l^2 h^2} \cdot \frac{3}{r^2} \iiint dy_2 dy_1 dx_2 dx_1 x_1 x_2 \log V \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_2 - x_1)^2}.\end{aligned}$$

Il primo di tali termini, $\Lambda_{2,1}$, è nullo; il secondo ha per valore :

$$\begin{aligned}\Lambda_{2,2} &= \frac{4\pi r}{l^2 h^2} \cdot \frac{1}{2r^2} \left[\frac{1}{20} l^2 h^4 - \frac{19}{72} l^4 h^2 - \frac{1}{30} l^6 \log \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) + \frac{1}{60} h^6 \log \left(1 + \frac{l^2}{h^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{12} l^4 h^2 \log (l^2 + h^2) - \frac{1}{15} l^4 h^5 \operatorname{artg} \frac{l}{h} + \frac{1}{5} l^5 h \operatorname{artg} \frac{h}{l} \right]; \quad 1)\end{aligned}$$

quanto al terzo, $\Lambda_{2,3}$, non abbiamo avuto finora occasione di calcolarlo, ma il problema non presenta nessuna difficoltà, se non quella materiale risultante dalla lunghezza degli sviluppi. Le formole, che s'impiegano, sono, oltre a quelle che servono al calcolo di $\Lambda_{2,2}$, ancora le due :

$$\begin{aligned}g). \quad \int x^m \operatorname{artg} \frac{x}{c} dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{artg} \frac{x}{c} - \frac{c}{m+1} \frac{x^m}{m} + \frac{c^3}{m+1} \frac{x^{m-2}}{m-2} \\ &\quad - \frac{c^5}{m+1} \frac{x^{m-4}}{m-4} + \dots \pm \frac{c^m}{m+1} x \mp \frac{c^{m+1}}{m+1} \operatorname{artg} \frac{x}{c} + C, \\ &\quad (\text{per } m \text{ intero e dispari})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h). \quad \int x^m \operatorname{artg} \frac{x}{c} dx &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \operatorname{artg} \frac{x}{c} - \frac{c}{m+1} \frac{x^m}{m} + \frac{c^3}{m+1} \frac{x^{m-2}}{m-2} \\ &\quad - \frac{c^5}{m+1} \frac{x^{m-4}}{m-4} + \dots \pm \frac{c^{m-1}}{m+1} \frac{x^2}{2} \mp \frac{c^{m+1}}{m+1} \frac{1}{2} \log (x^2 + c^2) + C, \\ &\quad (\text{per } m \text{ intero e pari})\end{aligned}$$

1) Nella formola a pag. 433 della mia memoria, dalla quale è ricavato questo valore, e nelle seguenti, furono scambiati per errore di trascrizione i simboli $\operatorname{artg} \frac{l}{h}$ e $\operatorname{artg} \frac{h}{l}$; i calcoli numerici però vanno bene.

delle quali la seconda contiene, come caso particolare, la formula l) della memoria precedente.

Eseguendo il calcolo per intero risulta :

$$\Lambda_{2,3} = \frac{4\pi r}{l^2 h^2} \cdot \frac{3}{r^2} \left[\frac{1}{360} l^2 h^4 - \frac{23}{360} l^4 h^2 + \frac{1}{144} l^6 \log \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) - \frac{1}{30} l^8 h \operatorname{artg} \frac{h}{l} + \frac{1}{18} l^3 h^3 \operatorname{artg} \frac{l}{h} \right];$$

e dunque :

$$\begin{aligned} \Lambda_2 &= \Lambda_{2,2} + \Lambda_{2,3}, \\ &= 4\pi r \cdot \frac{1}{6r^2} \left[\frac{1}{5} h^2 - \frac{233}{120} l^2 + \frac{1}{40} \frac{l^4}{h^2} \log \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) + \frac{1}{20} \frac{h^4}{l^2} \log \left(1 + \frac{l^2}{h^2} \right) + \frac{1}{4} l^2 \log (l^2 + h^2) - \frac{1}{5} \frac{h^3}{l} \operatorname{artg} \frac{l}{h} + l h \operatorname{artg} \frac{l}{h} \right] \end{aligned}$$

Se si fa l'ipotesi che i termini in $\frac{l^2}{r^2}$, $\frac{h^2}{r^2}$ siano già trascurabili risulta :

$$\Lambda'_2 = 0,$$

e dunque :

$$\Lambda' = 0,$$

e ancora :

$$\begin{aligned} \mathbf{L}' &= \mathbf{L}' + \Lambda', \\ &= \mathbf{L}'; \end{aligned}$$

il quale risultato si poteva prevedere perchè, se si suppone piccolissima la sezione dell'anello, è lecito ammettere, manifestamente, che il flusso dell'elettricità sia uniforme in tutta la sua ampiezza.

Nel caso più generale si ottiene invece :

$$\begin{aligned}
 \Lambda &= \Lambda_1 - \Lambda_2 , \\
 &= 4\pi r \cdot \frac{1}{6r^2} \left[-\frac{1}{5} h^2 + \left(\frac{\log 8r - 1}{2} + \frac{233}{120} \right) l^2 - \frac{1}{40} \frac{l^4}{h^2} \log \left(1 + \frac{h^2}{l^2} \right) \right. \\
 &\quad - \frac{1}{20} \frac{h^4}{l^2} \log \left(1 + \frac{l^2}{h^2} \right) - \frac{1}{4} l^2 \log (l^2 + h^2) + \frac{1}{5} \frac{h^3}{l} \operatorname{artg} \frac{l}{h} \\
 &\quad \left. - l h \operatorname{artg} \frac{l}{h} \right] , \\
 &= \frac{4\pi}{3(r_1 + r_2)} \left\{ -\frac{1}{5} h^2 + \left[\frac{\log 4(r_1 + r_2)}{2} + \frac{173}{120} \right] l^2 - \dots \right\} .
 \end{aligned}$$

§ 4. Fatto il calcolo viene, per l'anello che servì alle esperienze :

$$\Lambda = 0,47 ;$$

e poichè si aveva :

$$\mathbf{L} = L + \Lambda ,$$

$$L = 9,56 ,$$

sarà :

$$\frac{\Lambda}{\mathbf{L}} = \frac{0,47}{9,56 + 0,47} ,$$

$$= \frac{0,47}{10,03} ,$$

$$= 0,05 \text{ circa} ;$$

questo valore dimostra ciò che si era enunciato.

Torino, Agosto 1901.