**11. Die Abnahme der Schwere
mit der Höhe, bestimmt durch Wägungen; von
Franz Richarz und Otto Krigar-Menzel.**

(Vorläufige Mittheilung.)

(Aus den Sitzungsberichten der Königl. preuss. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom 23. März 1893; mitgetheilt von den Hrn. Verf.)

Durch die Beendigung einer ersten Reihe von Wägungen, aus denen sich die Abnahme der Schwere mit der Höhe ergibt, ist ein Theil der Bestimmung der Gravitationsconstante und der mittleren Dichtigkeit der Erde zum Abschlusse gelangt, für welche die Königliche Akademie die Mittel bewilligte.

Ueber die Methode, welche bei den definitiven Versuchen, übrigens in wesentlich veränderter Form, zur Ausführung gelangte, hat Hr. v. Helmholtz der Akademie am 18. Dec. 1884 eine kurze Mittheilung vorgelegt.¹⁾ Ihr Princip ist kurz das folgende. An jede der beiden Schalen einer gewöhnlichen Waage ist vermöge einer Stange von rund 2 m Länge eine andere Schale angehängt. Zunächst sei diese „Doppelwaage“ frei aufgestellt. Die Beschleunigung durch die Schwere hat am Orte der oberen Waagschalen einen kleineren Werth, als am Orte der unteren. In idealer Ausführung der Methode werden zwei Wägungen gemacht; bei der ersten befinden sich die beiden nahezu gleichen Massen auf den Waagschalen links oben, bez. rechts unten; bei der zweiten Wägung ist die Masse links von oben nach unten, die rechts von unten nach oben gebracht worden. Bei der zweiten Wägung ist also gegenüber der ersten die Masse links schwerer, die Masse rechts leichter geworden, und die Differenz der beiden Aequilibrirungen ergibt daher die doppelte Abnahme des Gewichtes mit der Höhe.

Ist die „Doppelwaage“ nicht frei aufgestellt, sondern befindet sich zwischen ihren oberen und unteren Schalen eine schwere Masse, etwa ein Bleiklotz, so superponiren sich dessen Gravitationswirkung und die Schwere. Am Orte der oberen

¹⁾ A. König u. F. Richarz, Sitzungsber. der Berl. Akad. 1884. p. 1202.

Waagschalen wirken Schwere und Attraction des Bleiklotzes in gleicher Richtung, am Orte der unteren Waagschalen in entgegengesetzter. Zwei ideale Wägungen, mit denselben Stellungen der zu äquilibrirenden Massen wie oben, ergeben daher bei Berücksichtigung der aus den vorhergehenden Versuchen bekannten Abnahme der Schwere mit der Höhe die vierfache Attraction des Bleiklotzes.

Die Möglichkeit einer Ausführung dieses Planes hing in erster Linie von der Beschaffung der erforderlichen Metallmasse ab. Das königl. preuss. Kriegsministerium erklärte sich in entgegenkommendster Weise bereit, das gewünschte Bleiquantum von etwa 100 000 kg aus den Beständen der Geschützgiesserei in Spandau zur unentgeltlichen Benutzung zu überlassen. Es erschien wünschenswerth, einen weiten Transport dieser grossen Masse zu vermeiden; nach Rücksprache mit der königlichen Fortification wurde daher eine der erdgedeckten Kasematten in der Citadelle von Spandau als geeignetes Arbeitslocal ausgewählt und vom königlichen Kriegsministerium für die Versuche bereitwilligst überwiesen. Den genannten Behörden, sowie auch besonders der königlichen Commandantur in Spandau, sind wir für ihr förderliches Entgegenkommen bei Beginn und im weiteren Verlaufe unserer Untersuchung zu grossem Danke verpflichtet.

An der Einrichtung des Beobachtungsraumes und der Apparate nahm Hr. A. König bis zum Sommer 1889 theil. Seit dem Winter 1887/88 ist der eine von uns, O. Krigar-Menzel, als Mitarbeiter in die Untersuchung eingetreten.

I. Einrichtung des Raumes; Anordnung der Apparate.

Unser Arbeitsraum ist der innerste Theil einer Kasematte, die sich zu ebener Erde in der Länge von etwa 20 m unter den Gewölben eines mit Erdaufschüttung versehenen Bastions erstreckt. Die Temperaturschwankungen innerhalb eines Tages dringen nicht bis dorthin. Um die durch den Witterungswechsel veranlassten Schwankungen genügend abzuschwächen, liessen wir den Beobachtungsraum durch einen doppelten Bretterverschlag mit Sägespänefüllung von dem äusseren Theile der Kasematte abtrennen. Aber dieser Schutz genügte noch nicht gegen den Einfluss lang andauernder Winterkälte; deshalb

wurde im Februar 1892 noch ein zweiter gleicher Verschluss in einem Abstände von 3—4 m vor dem ersten angebracht. So gelang es, die jährliche Schwankung in die Grenzen $+ 5^{\circ}$ und $+ 12^{\circ}$ C. einzuschliessen. Sehr unangenehm war anfänglich die grosse Feuchtigkeit; eiserne Theile des Mechanismus zur automatischen Vertauschung der Gewichte rosteten, Holztheile verzogen sich, und immer wieder versagte der Mechanismus seinen Dienst. Wir haben die Feuchtigkeit wirksam und sauber erst dadurch beseitigen können, dass die ganze Innenseite des Beobachtungslocales mit verlötheten Blechplatten bekleidet wurde; zwei Bleipfannen mit Schwefelsäure, jede von etwa 2 qm Oberfläche, genügten dann, die relative Feuchtigkeit zwischen 50 und 80 Proc. zu halten. Um die Waage gegen die Körperwärme des Beobachters zu schützen, ist der Platz des letzteren durch eine doppelte Zinkwand mit Thür von dem übrigen Theile des Arbeitsraumes getrennt. Ferner ist die Waage noch eingeschlossen in einen Kasten mit doppelten Zinkblechwänden, welcher auf dem cementirten, mit Blech bedeckten Fussboden aufsteht und ungefähr 3 m breit, lang und hoch ist. Derselbe umschliesst auch den aus der Erde hervorragenden oberen Theil des Fundamentes für den Bleiklotz, sowie den ganzen Raum, welchen dieser einnimmt; die Gewichte bleiben bei der Vertauschung stets innerhalb des Zinkkastens; die Stangen, Schnüre etc. der automatischen Vertauschung gehen durch die eine Seite dieses Zinkkastens und durch die oben erwähnte Zwischenwand zum Platze des Beobachters.

Die zur Beleuchtung dienenden Lampen stehen auf einer Console an der Aussenseite des einen Bretterschlages und senden ihr Licht durch ein doppeltes Glasfenster in das Innere des Arbeitsraumes.

Damit die Waage und der Vertauschungsmechanismus für die Gewichte durch eine mögliche Senkung des Fundamentes unter der Last des Bleiklotzes nicht in Mitleidenschaft gezogen werden, sind dieselben auf einem besonderen Gerüst aufgestellt, welches seine Stützpunkte theils in den Wänden des Gewölbes, theils in seitlichen besonderen Pfeilern findet. Die eigentliche Waage mit dem oberen Schalenpaar ist in einen hölzernen Kasten mit Glasfenstern eingeschlossen. Unterhalb jeder Schale

ist der Boden dieses Kastens durchbohrt, durch diese Löcher hängen die beiden Verbindungsstangen des oberen und unteren Schalenpaares herab. An diesen Verbindungsstangen, welche aus mehreren einzelnen, durch Gelenke verbundenen Stücken bestehen, schwebt das untere Schalenpaar in einem Kanale, der in dem Fundament des Bleiklotzes ausgespart ist und sich horizontal, senkrecht zur Richtung des Waagebalkens durch die ganze Länge des Fundamentes erstreckt. Nach oben ist dieser Kanal durch Eisenplatten gedeckt, die mit dem übrigen Theile des Fundamentes eine ebene Fläche bilden. Die Verbindungsstangen der oberen und unteren Schalenpaare sind geschützt durch zwei Messingröhren von etwa 3 cm Durchmesser, die oben in den Boden des Waagekastens, unten in die eisernen Deckplatten des Kanals eingefügt sind. Der vordere, dem Platze des Beobachters zugekehrte Theil dieses Kanals im Fundamente dient zur automatischen Zuführung der Gewichte zu den unteren Waagschaalen; in den hinteren Theil des Kanals sind ein Thermometer und ein Haarhygrometer eingeführt. Solche befinden sich auch im oberen Waagekasten in nächster Nähe der oberen Schalen; die Thermometer werden ohne jede Oeffnung des Zinkkastens abgelesen; für die Ablesung der Hygrometer müssen kleine Thüren in demselben geöffnet werden.

Sämmtliche Manipulationen an der Waage geschehen vom Platze des Beobachters aus vermittels Stangen, Ketten, Schnüren etc., welche durch die Zinkzwischenwand und die ihr benachbarte Wand des Zinkkastens hindurch zur Waage führen. Die Ablesung der Waage geschieht mit Spiegel und Scala. Das Licht der Scala fällt horizontal durch kleine Oeffnungen in der Zwischenwand und im Zinkkasten auf ein total reflectirendes Prisma, dann vertical abwärts auf den Spiegel, welcher mit horizontaler Fläche dicht hinter der Mittelschneide am Waagebalken befestigt ist; auf dem umgekehrten Wege gelangt das Licht in das Fernrohr. Es wäre sehr zu wünschen gewesen, dass Scala, total reflectirendes Prisma, Waage und Fernrohr einerseits in keiner directen Verbindung gestanden hätten mit dem Mechanismus für die Manipulationen andererseits; damit die durch Vornahme der letzteren entstehenden Erschütterungen sich auf ersteres System

nicht übertragen und in ihm Verschiebungen hervorbringen können. Diese Isolirung hat, nachdem ihre Nothwendigkeit erkannt war, sich theilweise noch nachträglich herstellen lassen.

Waage und Vertauschungsmechanismus sind hergestellt vom Mechaniker Hrn. Paul Stückrath.

II. Die Waage.

Für die Construction der Waage selbst mussten die Ansprüche maassgebend sein, welche an dieselbe zu stellen waren. Als Gewichte sollten Kilogrammstücke dienen. Die Gewichts-differenzen, welche wir messen wollten, betrugen dann ganze Milligramme. Daher verlangten wir, dass der wahrscheinliche Fehler eines Wägungssatzes, d. h. einer Bestimmung jener Gewichts-differenz, $\pm 0,01$ mg nicht übersteigen solle. Die grössten Fehlerquellen sind in der Nothwendigkeit begründet, dass während eines Wägungssatzes die Gewichte mehrere Male zu vertauschen sind und daher die Waage arretirt werden muss.

Dies ist schädlich erstens dadurch, dass bei jeder Arretirung und erneuten Belastung sich die Durchbiegung des Waagebalkens und die Zusammendrückung der Schneiden von neuem herstellen muss, was infolge der elastischen Nachwirkung keineswegs momentan geschieht. Je solider der Waagebalken und die Schneiden gearbeitet sind, um so weniger störend werden solche elastische Nachwirkungen auftreten können. Aus den sehr starken Nachwirkungserscheinungen, welche sich an unserer Waage zeigen, ist zu schliessen, dass sie nicht massiv genug gearbeitet ist. Wir haben nachträglich eine Versteifung an dem Waagebalken anbringen lassen, aber jene Erscheinungen blieben immer noch sehr stark. Jedoch zeigte eine sehr sorgfältige Untersuchung derselben, dass sie bei einer gewissen, stets gleichen Behandlung der Waage auch in derselben Weise auftreten. Wenn man daher immer in der ausprobirten, genau gleichen Weise bei Belastung und Ablesung der Waage verfährt, so fasst man die veränderliche Nachwirkung immer in derselben Phase ab, und ihr Einfluss fällt im Resultate heraus, da es sich in diesem stets nur um Gewichts-differenzen handelt.

Eine zweite durch das wiederholte Arretiren und Lösen der Waage bedingte Fehlerquelle ist die folgende. Befindet sich der Schwerpunkt eines Gehänges sammt seiner Belastung

nicht schon vor dem Absetzen auf die betreffende Endschneide in der durch diese gelegten Verticalebene, so wird das Gehänge nach dem Lösen sich so weit neigen, bis jenes der Fall ist. Da nun die Schneide keine mathematische Linie ist, sondern eher als Cylinderfläche betrachtet werden kann, so wälzt sich die Pfanne bei jener Neigung des Gehänges auf der Endschneide; die Berührungslinie rückt nach aussen oder innen und der Hebelarm wird ein anderer. Wir wollen nun ein Hundertmilliontel der Belastung noch mit Sicherheit messen; also muss auch die Länge des Hebelarmes bis auf diesen Bruchtheil stets dieselbe sein. Die Länge unseres Waagebalkens von Endschneide zu Endschneide beträgt 234 mm; Aenderungen des Hebelarmes um etwa ein milliontel Millimeter müssen mithin ausgeschlossen werden. Hiernach übersieht man, dass durch jenes Wälzen der Pfanne auf der Endschneide grosse Fehler verursacht werden müssen. Hr. Stückrath hat diese Fehlerquelle durch eine sinnreiche Vorrichtung beseitigt, welche die „Centrirung“ genannt werden soll. Ihr Princip ist dieses. Das Gehänge besteht aus zwei getrennten Theilen, einem oberen (o) und einem unteren (u), deren jeder für sich ein starres System bildet und welche untereinander durch ein Cardani'sches Gelenk verbunden sind. Statt dieser Verbindung denke man sich für die schematische Darstellung eine solche durch einen, beiden Theilen des Gehänges gemeinsamen Punkt, den „Drehpunkt“ (p). Die Arretirung des oberen Theiles des Gehänges ist so justirt, dass sein Schwerpunkt und der Drehpunkt p in arretirter Stellung sich in einer Verticalen befinden, welche durch die betreffende Endschneide (s) geht. Die Arretirung des unteren Theiles des Gehänges sammt der starr mit ihm verbundenen Schale ist so justirt, dass auch dessen Schwerpunkt bei leerer Schale in arretirter Stellung sich in derselben Verticalen befindet. Aber die Masse M kann ursprünglich eine seitliche Stellung haben. Beim Lösen der Waage wird zuerst M auf die Schale abgesetzt; in der Phase, in welcher dies geschehen ist, sei das Gehänge durch Fig. 1 dargestellt. Dann wird der untere Theil des Gehänges langsam freigemacht, sodass er infolge der unsymmetrischen Stellung von M um den „Drehpunkt“ p sich dreht, bis zur Stellung Fig. 2. Nun wird wieder arretirt;

dabei wird zuerst M vertical in die Höhe gehoben. Gehänge mit Schale, die noch frei geblieben sind, pendeln dann um die Stellung, bei welcher ihr Schwerpunkt unter dem Drehpunkte p liegt, und werden bei weiterem Arretiren in dieser Gleichgewichtslage festgehalten, sodass die Stellung Fig. 3 resultirt. Bei nochmaligem Lösen wird zunächst die Masse M vertical abwärts auf die Schale gesetzt; dann entspricht die Stellung wieder der Fig. 1, nur dass sich der Schwerpunkt der Masse M jetzt sehr viel näher an der durch den Drehpunkt p gehenden Verticalen befindet. Eine Wiederholung des

Verfahrens gibt eine abermalige Annäherung von M an die Verticale. Diese „Centrirung“ geschieht um so schneller, je grösser die Masse M gegenüber der Masse von Gehänge und Schale ist. Zweimaliges Lösen und Arretiren des unteren Theiles der Gehänge „centrirte“ bei unseren Verhältnissen die Masse M so weit, dass der oben auseinandergesetzte Fehler unmerkbar klein wurde.

Drittens wirkt die Nothwendigkeit des Arretirens der Wage in folgender Weise schädlich. Die Schneiden sind keine mathematischen Linien; sie sind auch trotz sorgfältigsten Schleifens keine geometrisch regelmässigen Cylinderflächen, und ebensowenig sind die Pfannen Ebenen. Die Punkte einer Schneide, in welchen dieselbe von der Pfanne berührt wird, sind daher nur dann dieselben, wenn auch genau dieselbe

Stelle der Pfanne ihr gegenüber steht. Mit den Berührungspunkten der Schneiden wechselt aber auch zugleich die Länge des Hebelarmes. Die Gleichheit der Berührungspunkte von Schneiden und Pfannen bei mehrmaligem Lösen kann daher nur vorhanden sein, wenn das Lager der Mittelpfanne unverrückbar fest ist, und wenn die Arretirung den Balken und die Gehänge stets in derselben Weise auf und abführt. Die Arretirung muss daher möglichst solide gearbeitet sein, damit sie sich in belastetem Zustande möglichst wenig durchbiege; es muss ferner Zwangsführung derselben verlangt werden. Ursprünglich entsprach die Construction unserer Waage diesem Postulate keineswegs; die Arretirung fiel durch ihr eigenes Gewicht, bewegte sich also ganz lose in ihrer Führung. Nachträglich ist die Führung soweit fester gemacht worden, als es ging; aber diess war nur ein Nothbehelf; von Zeit zu Zeit wurde die Arretirung immer wieder von neuem schlotterig.

Mit dieser Fehlerquelle hängt auch die Frage zusammen, ob der Arretirungsmechanismus von Balken und Gehänge vortheilhafter in zwei Theilen getrennt, oder in einem Stück starr vereinigt wird. Wir haben mit beiden Systemen gearbeitet und konnten keine Ueberlegenheit eines derselben erkennen.

Durch die Veränderung der Berührungspunkte der Schneiden wirkt auch der Staub schädlich, der sich zwischen Pfannen und Schneiden absetzt und sich nie völlig vermeiden lässt. Häufiges Putzen der Waage war nicht angängig, da die durch den Aufenthalt von Menschen im Zinkkasten verursachten Temperaturdifferenzen sich erst nach etwa fünf Tagen hinreichend ausgeglichen haben. Dadurch, dass wir vor Beginn jeder Wägungsreihe die belastete Waage längere Zeit, mindestens 20 Minuten lang, frei schwingen lassen, wird die Schädlichkeit des Staubes jedenfalls vermindert, indem derselbe platt gewalzt wird. Ausserdem wurde hierdurch der oben erwähnte Zustand stationärer Durchbiegung des Balkens und ebensolcher Zusammendrückung der Schneiden vorbereitet.

Als Material der Schneiden unseres Waagebalkens war zuerst Chalcedon gewählt worden, weil er gegenüber dem sonst meist benutzten Stahl den Vortheil grösserer Härte hat. In der That sind die elastischen Nachwirkungen bei den anfänglichen Chalcedonschneiden schwächer gewesen als später bei

den Stahlscheiden. Aber infolge der grösseren Sprödigkeit sprangen aus den Chalcedonschneiden kleine Stückchen heraus, und sie wurden jedesmal wieder unbrauchbar, wenn die Waage einige Male belastet worden war. Daher kehrten wir wieder zu Stahl zurück.

Die Schneiden werden von Hrn. Stückrath bei seinen Waagen nicht wie sonst mittelst Justirschrauben im Wagebalken gehalten, sondern sind durch Antreiben unverrückbar in demselben befestigt. Dadurch wird eine nachträgliche Veränderung ihrer Lage infolge des Ausgleichs von Spannungen in den scharf angezogenen Justirschrauben vermieden. Es ist eine besondere Fertigkeit von Hrn. Stückrath, die Parallelität der Schneiden in vollkommenster Weise durch blosses Schleifen derselben herstellen zu können.

Während der ersten Jahre der Wägungen ging der Parallelismus der Schneiden nach einiger Zeit immer wieder von neuem verloren. Wir konnten keine andere Erklärung hierfür finden als die, dass im Waagebalken trotz wiederholten starken Hämmerns noch Spannungen von dem Guss desselben her sich nachträglich ausgeglichen. Das bei permanenten Magneten von den Hrn. Strouhal und Barus angewandte Verfahren zur Erzielung constanten Momentes schien uns auch für unsern Zweck Aussicht auf Erfolge zu haben. In der That fand die nachträgliche Lagenänderung der Schneiden nicht mehr statt, nachdem der Waagebalken einige Tage in siedendes Wasser gelegt worden war und sich dann mit diesem langsam abgekühlt hatte.

Endlich ist noch eine Fehlerquelle zu erwähnen, welche zwar nur in der Besondernheit der uns gegebenen Verhältnisse begründet ist, aber sich wie die bisherigen an der Waage selbst geltend macht. Bei den ersten Vorversuchen zeigte sich, dass die Empfindlichkeit von Beginn einer Beobachtungsreihe an allmählich abnahm, um nach ein bis zwei Stunden bei etwa fünf Sechstel des Anfangswerthes constant zu werden. Nachdem wir constatirt hatten, dass die Erscheinung ihre Ursache in den von der Scale ausgehenden Lichtstrahlen haben müssen, erklärten wir sie uns folgendermaassen. Jene Strahlen fallen nur auf die Oberseite des Waagebalkens und des an ihm befestigten Spiegels. Es wird sich daher allmählich nach Be-

ginn der Strahlung ein stationärer Zustand ausbilden, bei welchem die Oberseite des Balkens ein wenig wärmer ist als die Unterseite. Die Folge hiervon muss eine Biegung des Waagebalkens sein in dem Sinne, dass der Schwerpunkt nach unten rückt, also die Empfindlichkeit kleiner wird. Die störende Erscheinung verschwand, nachdem die nichtleuchtenden Strahlen der Scalenbeleuchtung durch Alaunlösung beseitigt worden waren, nachdem über dem Waagebalken ein Diaphragma angebracht war, welches die Lichtstrahlen nur auf den Spiegel fallen liess, und nachdem die Einrichtung getroffen war, dass das Licht der Scale für gewöhnlich vollkommen abgeblendet war durch eine Blechklappe, die nur beim Ablesen der Umkehrpunkte der schwingenden Waage jedesmal für einige Secunden hochgezogen wird.

3. Gewichtsstücke.

Die bei den Wägungen benutzten Gewichte sind erstens Kilogrammstücke, zweitens Hohlkugeln, drittens Reitergewichte. Für die Kilogrammstücke war, damit sie barocentrisch seien, die Kugelform gegeben. Als Material war zuerst vergoldetes Messing gewählt worden; aber die Kugeln, drei an der Zahl, zeigten bei gleicher Masse ein um mehrere Procent verschiedenes Volumen, vermuthlich infolge innerer Höhlräume. Das war für uns unzulässig, da infolge der starken Volumendifferenzen das Gewicht der verdrängten Luft einen zu grossen Einfluss auf unsere Wägungen erhalten hätte. Die neuen Kilogrammkugeln, welche zu den definitiven Wägungen benutzt werden, sind aus gegossenem, gehämmertem Kupfer hergestellt, sind zur Unterscheidung theils vergoldet, theils platinirt, und haben nur geringe Volumendifferenzen. Ihre Massen und Volumina sind im Bureau international des poids et mesures zu Bréteuil durch Hrn. Thiesen bestimmt worden, dem wir hierfür wie für viele werthvolle Rathschläge zum grössten Danke verpflichtet sind.

Zur Compensation des Auftriebes der Luft, bez. zur Bestimmung desselben durch Wägung, wie weiter unten auseinandergesetzt, dienen vier Hohlkugeln. Zwei derselben sind allseitig geschlossen und haben nahe dasselbe Volumen wie die Kilogrammkugeln. Die beiden andern haben je sechs

kreisförmige Löcher, so dass sie keinen inneren abgeschlossenen Hohlraum haben. Diese „durchbrochenen Hohlkugeln“ haben in Luft nahezu dasselbe scheinbare Gewicht wie jene „geschlossenen Hohlkugeln“. Die vier Hohlkugeln mussten aus je zwei Hälften zusammengelöthet werden. Es gelang nicht, Hohlkugeln aus Kupfer, vergoldet, herzustellen, welche genügend constante Masse gehabt hätten. Die definitiven Hohlkugeln sind aus Platin gefertigt und mit Gold gelöthet. Ihre Massen und Volumina wurden von dem Einen von uns (K.-M.) zuerst im Frühjahr 1890, dann wieder im November 1892 auf der Kaiserlichen Normalaichungscommission bestimmt. Es ergaben sich in der That kleine Aenderungen der Constanten, welche aber zu klein waren, als dass sie unsere Resultate wesentlich hätten beeinflussen können.

Die Reitergewichte endlich bestehen aus Aluminiumdraht. Drei Sätze derselben sind in Bréteuil durch Hrn. Kreichgauer unter Leitung von Hrn. Thiesen bestimmt worden. An Stelle einiger verloren gegangener und beschädigter Reitergewichte wurden im Laufe der Untersuchung neue angefertigt, die mit jenen alten auf einer von Hrn. Stückrath angefertigten Spitzenwaage verglichen wurden. Als wesentlich ist noch zu bemerken, dass die Reitergewichte nicht auf den Waagebalken abgesetzt werden, sondern auf das Gehänge, sodass sie mit ihrem vollen Gewichte am selben Hebelarm wie die Kilogrammstücke bez. die Hohlkugeln angreifen.

Auf beiden Seiten der Waage können je sechs Reitergewichte aufgesetzt werden, deren Massen folgende Nominalwerth haben:

0,8; 1; 1,4; 3; 9; 27 mg.

Es ist dadurch die Möglichkeit gegeben, als Zulage jedes gewünschte Vielfache von 0,2 mg herzustellen. Verlangt man z. B. die Zulage 4,2 mg links, so hat man aufzusetzen links 9; rechts $0,8 + 1 + 3$.

Das Aufsetzen geschieht durch Schnurübertragung (neuerdings mit Hilfe von Aluminiumdrähten wegen der wechselnden Feuchtigkeit) vom Platze des Beobachters aus.

4. Methoden der Wägungen.

A. Wägungen mit verticaler Vertauschung.

Nach der ursprünglich geplanten Methode sollte die Differenz der Beschleunigungen am Orte der oberen und der unteren Schalen durch directen verticalen Transport der Kugeln während einer und derselben Wägungsreihe bestimmt werden. Diese Methode erwies sich aber in den allermeisten Fällen als unausführbar, weil schon bei einer Temperaturdifferenz von nur etwa $0,04^{\circ}$ zwischen oben und unten zu bedeutende Störungen auftreten, deren Ursache darin zu suchen ist, dass die nicht im Temperaturgleichgewicht mit der Umgebung befindlichen Gewichtskugeln auf- oder absteigende Luftströmungen erzeugen. Im Sommer ist nämlich die Temperatur am Orte der oberen Waageschalen um einige Zehntel Grad höher, im Winter niedriger, als diejenige am Orte der unteren Waageschalen. Zweimal im Jahre (im Frühjahr und Herbst) pflegt indessen auf mehrere Tage die gewünschte Gleichheit der Temperaturen hinreichend erfüllt zu sein, und es ist uns in der That gelungen, in solchen Zeiten einige brauchbare Bestimmungen nach dieser directen Methode auszuführen.

Die Theorie dieser Wägungsweise soll wegen ihrer grösseren Einfachheit hier zuerst behandelt werden.

Wir bezeichnen die Massen der beiden angewandten Kilogrammkgeln mit M unter Hinzufügung eines individuellen Index; die Massen der beiden zur Compensirung des Luftauftriebes dienenden Hohlkugeln werden entsprechend durch m ausgedrückt; die Volumina der Vollkugeln sind durch V und die nahezu gleichen Hohlkugeln durch $\mathfrak{B}$ gekennzeichnet, die Luftdichte oben und unten ist d_o und d_u . Die links und rechts zur Aequilibrirung dienenden Zulagen sind z_l und z_r , die dadurch bewirkte Einstellung der Waage ist durch den Scalentheil e charakterisirt und kann bei dem geringen Decrement unserer Waage aus drei Umkehrpunkten hergeleitet werden. Der Werth eines Scalentheiles in Milligrammen sei ω , und die Beschleunigung am Orte der oberen und unteren Schalen sei g_o bez. g_u .

Die Scala zählt in dem Sinne, dass eine Mehrbelastung der linken Schalen die Einstellung nach den grösseren Zahlen

treibt. Bezeichnen wir endlich noch die für das Resultat gleichgültige Einstellung der unbelasteten Waage mit Np (Nullpunkt), so können wir als Princip für die aufzustellenden Gleichungen den Satz aussprechen:

Die gesammte links angreifende Kraft weniger der rechts angreifenden Kraft entspricht $(e - Np)$ ausgedrückt in Milligrammgewicht, ist also gleich $(e - Np) \omega \cdot g_o$.

Um die Stellung der Kugeln während einer Wägung kurz bezeichnen zu können, wollen wir ihre Symbole in die vier Fächer eines Kreuzes eintragen; die Bedeutung dieser Fächer ist:

obere Schale links	obere Schale rechts
untere Schale links	untere Schale rechts

Bei unserer zuerst zu behandelnden Methode der verticalen Vertauschungen bleiben die links befindlichen Kugeln immer links, ebenso rechts, wir werden daher die Vollkugeln als M_l und M_r , die Hohlkugeln als m_l und m_r unterscheiden können. Machen wir nun zwei Wägungen mit folgenden Stellungen:

$\begin{array}{c c} \text{I.} & \\ \hline M_l + z_l^{\text{I}} & m_r + z_r^{\text{I}} \\ \hline m_l & M_r \\ \hline \text{Einstellung } e^{\text{I}} & \end{array}$	$\begin{array}{c c} \text{II.} & \\ \hline m_l + z_l^{\text{II}} & M_r + z_r^{\text{II}} \\ \hline M_l & m_r \\ \hline \text{Einstellung } e^{\text{II}} & \end{array}$
---	---

so erhalten wir folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & \left[(M_l - V_l d_o + z_l^{\text{I}}) g_o + (m_l - \mathfrak{B}_l d_u) g_u \right] \\ & - \left[(m_r - \mathfrak{B}_r d_o + z_r^{\text{I}}) g_o + (M_r - V_r d_u) g_u \right] = (e^{\text{I}} - Np) \omega g_o \\ \text{II.} \quad & \left[(M_l - V_l d_u) g_u + (m_l - \mathfrak{B}_l d_o + z_l^{\text{II}}) g_o \right] \\ & - \left[(m_r - \mathfrak{B}_r d_u) g_u + (M_r - V_r d_o + z_r^{\text{II}}) g_o \right] = (e^{\text{II}} - Np) \omega g_o \end{aligned}$$

aus denen durch Subtraction zur Elimination von Np und durch Zusammenfassung nach g_o und g_u folgt:

$$\begin{aligned} g_o \{ & M_l + M_r - m_l - m_r - (V_l + V_r - \mathfrak{B}_l - \mathfrak{B}_r) d_o + (z_l - z_r)^{\text{I}} \\ & - (z_l - z_r)^{\text{II}} - (e^{\text{I}} - e^{\text{II}}) \cdot \omega \} = g_u \cdot \{ M_l + M_r - m_l - m_r \\ & - (V_l + V_r - \mathfrak{B}_l - \mathfrak{B}_r) d_u \}. \end{aligned}$$

Somit ist g_u/g_o bekannt, und wir können daraus bilden:

$$(1) \frac{g_u - g_o}{g_u + g_o} = \frac{(V_l + V_r - \mathfrak{Z}_l - \mathfrak{Z}_r)(d_u - d_o) + (z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} - (e^I - e^{II}) \cdot \omega}{2(M_l + M_r - m_l - m_r)}$$

In dieser Gleichung sind im Nenner alle Summanden unterdrückt, welche sehr klein gegen die grossen Massen der Kugeln sind. Der Zähler stellt nämlich eine Grösse dar, welche etwas über 1 mg beträgt; da nun die Genauigkeit der Wägung höchstens bis auf 0,01 mg getrieben werden kann, so sind nur drei Ziffern desselben verbürgt. Es genügt daher auch im Nenner eine gleiche Zahl von Stellen, d. h. ein ganz roher Werth der Massen. Ebenso kann man $g_u + g_o = 2g$ setzen, und für g die auf die Breite von Spandau bezogene Beschleunigung der Schwerkraft nehmen. Wenn man nun $g_u - g_o$ ausrechnen will, so tritt zunächst ein stets gleichbleibender Factor auf, dessen Zahlenwerth ein für allemal feststeht. Derselbe ist

$$(2) \quad M + M - m - m \stackrel{g}{=} 0,05180 \frac{\text{Meter}}{\text{sec}^2 \cdot \text{mg}}$$

Der andere Factor, Zähler der Gleichung (1), stellt die doppelte Abnahme des Gewichtes eines Kilogramms für die betreffende Höhendifferenz dar, ausgedrückt in mg, und gewährt eine bessere Anschauung als der Werth $g_u - g_o$ selbst. Es ist also:

$$(3) \quad g_u - g_o = 0,05180 \cdot \{ (V_l + V_r - \mathfrak{Z}_l - \mathfrak{Z}_r)(d_u - d_o) + (z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} - (e^I - e^{II}) \omega \}.$$

Somit ist gezeigt, wie man aus einer einzigen nach der angegebenen Methode angestellten Beobachtungsreihe den Werth von $g_u - g_o$ ermitteln kann, ohne den Werth der grossen Massen genau zu kennen. —

B. Wägungen mit horizontaler Vertauschung.

Die grössere Zahl der Bestimmungen ist indessen aus dem oben berührten Hinderungsgrund nicht auf diese Weise gewonnen, sondern durch Combination je zweier an verschiedenen Tagen vorgenommenen Wägungsreihen mit horizontalen Vertauschungen und je einer verticalen Vertauschung nach Schluss jeder Wägungsreihe. Die Vertauschung zwischen rechts und links, sowohl oben als unten, kann bei unserer Waage leider nicht im Innern des Waagekastens bez. des Hohlraumes bei

den unteren Schalen vorgenommen werden; denn nach dem ursprünglichen Plane sollten nur verticale Vertauschungen vorgenommen werden, bei welchen der für den Bleiklotz bestimmte Raum umgangen werden musste. Wir müssen deshalb die Kugeln etwa $1\frac{1}{2}$ m weit aus dem Waagekasten herausfahren, um die Vertauschung vornehmen zu können; dabei bleiben die Kugeln jedoch immer noch innerhalb des grossen Zinkkastens, so dass dieser Umstand wohl meistens unbedenklich und die Annahme, dass die Isothermen Horizontalflächen sind, berechtigt ist. Zu Zeiten starken Temperaturgefälles jedoch und einige Tage lang, nachdem Menschen oder Licht in diesem inneren Raum gewesen sind, zeigten sich Störungen, deren Richtungssinn durch Temperaturveränderungen der Kugeln während der Vertauschung (Luftströme) wohl zu erklären waren. Zum grösseren Schutz gegen diese Einflüsse wurde nachträglich noch der ganze Weg, welchen die Kugeln ausserhalb des Waagekastens zurücklegen müssen, mit Blech umhüllt.

Wir wollen nun die Theorie unserer hauptsächlich angewendeten Methode zur Bestimmung von $g_u - g_o$ ausführen, und betrachten zu dem Zwecke zunächst eine einzelne Wägungsreihe mit Vertauschung von rechts und links. Die oben befindlichen Kugeln bleiben dabei oben, die unteren unten, wir können daher die beiden Vollkugeln durch die Bezeichnungen M_o und M_u , die Hohlkugeln durch m_o und m_u unterscheiden. Die beiden vorkommenden Stellungen sind:

$$\begin{array}{cc} \text{I.} & \text{II.} \\ \frac{M_o + z_l^{\text{I}}}{m_u} \Bigg| \frac{m_o + z_r^{\text{I}}}{M_u} & \frac{m_o + z_l^{\text{II}}}{M_u} \Bigg| \frac{M_o + z_r^{\text{II}}}{m_u} \\ \text{Einstellung } e^{\text{I}} & \text{Einstellung } e^{\text{II}} \end{array}$$

aus denen man folgende Gleichungen ablesen kann:

$$\begin{array}{l} \text{I. } (M_o - V_o d_o + z_l^{\text{I}}) g_o + (m_u - \mathfrak{B}_u d_u) g_u \\ \quad - [(m_o - \mathfrak{B}_o d_o + z_r^{\text{I}}) g_o + (M_u - V_u d_u) g_u] = e^{\text{I}} - N_p) \omega \cdot g_o \\ \text{II. } (m_o - \mathfrak{B}_o d_o + z_l^{\text{II}}) g_o + (M_u - V_u d_u) g_u \\ \quad - [(M_o - V_o d_o + z_r^{\text{II}}) g_o + (m_u - \mathfrak{B}_u d_u) g_u] = (e^{\text{II}} - N_p) \omega \cdot g_o. \end{array}$$

Durch Subtraction der zweiten von der ersten und Zusammenfassung nach g_o und g_u erhält man

$$g_o \{ 2 (M_o - m_o) - 2 (V_o - \mathfrak{B}_o) d_o + (z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} - (e^I - e^{II}) \omega g_o \} = g_u \{ 2 (M_u - m_u) - 2 (V_u - \mathfrak{B}_u) d_u \}.$$

Hieraus ergibt sich ein Ausdruck für g_u/g_o , aus dem folgt:

$$(4) \quad \frac{g_u - g_o}{g_u + g_o} = \frac{2 [M_o - M_u - m_o + m_u - (V_o - \mathfrak{B}_o) d_o + (V_u - \mathfrak{B}_u) d_u] + (z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} - (e^I - e^{II}) \omega}{2 (M_o + M_u - m_o - m_u)}$$

Im Nenner sind wieder, wie in Gleichung (1), sehr kleine Beträge gegen die grossen Massen vernachlässigt worden; im Zähler dagegen heben sich die grossen Massen zum grössten Theile auf, es ist aber zur Bestimmung ihrer kleinen Differenzen die Kenntniss ihrer Grösse bis auf denselben Grad von Genauigkeit nothwendig, den wir von der Wägung selbst verlangen, d. h. 0,01 mg auf 1 kg; bis auf einen so kleinen Betrag bleibt aber die Masse vergoldeter Kupferkugeln, zumal bei der Benutzung unter unseren Verhältnissen nicht constant.

Macht man aber nach Schluss der eben betrachteten Wägungsreihe eine Vertauchung der beiden Vollkugeln untereinander und der beiden Hohlkugeln untereinander, also eine Vertauschung schräg über Kreuz, d. h. zwischen links oben und rechts unten, sowie zwischen rechts oben und links unten, und stellt dann frühestens am nächsten Tage, nachdem sich die Temperaturen ausgeglichen haben, eine ebensolche Wägungsreihe mit horizontaler Vertauschung an, so kann man durch Vereinigung der Resultate die grossen Massen im Zähler der letzten Gleichung eliminiren. Vorausgesetzt ist dabei nur, dass sich dieselben zwischen beiden Tagen nicht um 0,01 verändert haben; z. B. sind zwei Reihen nicht combinirbar, wenn zwischen beiden die Gewichtskugeln angefasst oder gereinigt worden sind.

Aus der zweiten Wägungsreihe erhalten wir nun eine ganz ebensolche Gleichung für $(g_u - g_o)/(g_u + g_o)$, wir wollen die auf diese Reihe bezüglichen Grössen mit einem Strich bezeichnen; dann ist:

$$(4') \quad \left\{ \frac{g_u - g_o}{g_u + g_o} = \frac{2 [M_o' - M_u' - m_o' + m_u' - (V_o' - \mathfrak{B}_o') d_o' + (V_u' - \mathfrak{B}_u') d_u'] + (z_l - z_r)^{I'} - (z_l - z_r)^{II'} - (e^{I'} - e^{II'}) \omega'}{2 (M_o' + M_u' - m_o' - m_u')} \right.$$

Wegen der zwischen beiden Tagen vorgenommenen Kreuzvertauschung gelten aber folgende Identitäten:

$$M_o' \equiv M_u, \quad M_u' \equiv M_o, \quad m_o' \equiv m_u, \quad m_u' \equiv m_o^1)$$

und man erkennt daraus sofort, dass sich bei einer Addition der aus beiden Reihen abgeleiteten Gleichungen die grossen Massen im Zähler wegheben; die Nenner sind identisch, und man erhält unter Benutzung des Factors (2) folgenden Ausdruck:

$$(5) \quad g_u - g_o = 0,05180 \left\{ \begin{array}{l} [- (V_o - \mathfrak{B}_o) d_o + (V_u - \mathfrak{B}_u) d_u] \\ + \frac{1}{2} [(z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} - (e^I - e^{II}) \omega] \\ + [- (V_o' - \mathfrak{B}_o') d_o' + (V_u' - \mathfrak{B}_u') d_u'] \\ + \frac{1}{2} [(z_l - z_r)^{I'} - (z_l - z_r)^{II'} - (e^{I'} - e^{II'}) \omega'] \end{array} \right.$$

Wie man sieht, gehen die auf beide Wägungsreihen bezüglichen Grössen getrennt von einander und in ganz gleicher Form in das Resultat ein, sodass man aus jeder einzelnen Wägungsreihe die zur Bildung des Zählers von $g_u - g_o$ nöthigen Ausdrücke getrennt berechnen kann. Der eine Ausdruck, den wir mit α bezeichnen, ergibt sich direct aus den Daten der Wägung, und lautet:

$$\alpha = \frac{1}{2} [(z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} - (e^I - e^{II}) \cdot \omega],$$

der andere enthält den durch die kleinen Ungleichheiten der Volumina bedingten Luftauftrieb und werde bezeichnet mit:

$$\Phi = - (V_o - \mathfrak{B}_o) d_o + (V_u - \mathfrak{B}_u) d_u.$$

Man kann dann den Zähler von $g_u - g_o$ stets zusammensetzen aus $\alpha + \alpha' + \Phi + \Phi'$, und diese Summe ist wieder (wie oben der Zähler der Gleichung (1) die doppelte Abnahme des Gewichtes eines Kilogramms für die betreffende Höhendifferenz.

C. Bestimmung der Dichtigkeit der Luft.

Beide auseinandergesetzte Methoden verlangen die Kenntniss der Luftdichte am Orte der oberen und unteren Waagschalen bis auf 1 Procent; die vorkommenden Volumendifferenzen unserer Kugeln betragen nämlich etwas weniger als 1 ccm, und 0.01 mg wird verlangt.

1) Für die Volumina gelten solche Identitäten nicht wegen der veränderten Temperaturen.

Zur Ermittlung der Luftdichte verwenden wir eine Methode der directen Bestimmung des Gewichtes der verdrängten Luft durch Wägung. Das Princip ist die Messung des Gewichtsverlustes eines Körpers von bekannter Masse und bekanntem Volumen durch den Auftrieb in der Luft;¹⁾ die Ausführung dieses Principes war ursprünglich in ganz anderer Form geplant, als sie jetzt wirklich geschieht. — Es werden dabei ausser den beiden geschlossenen Hohlkugeln noch die zwei oben schon beschriebenen durchbrochenen Hohlkugeln gebraucht, welche in Luft scheinbar dasselbe Gewicht, wie jene zeigen, dagegen nur das geringe Volumen ihrer Wandungen besitzen. Die Massen dieser durchbrochenen Kugeln wollen wir durch μ , das Volumen durch v charakterisiren.

Um nun d_o zu bestimmen, macht man mit einer geschlossenen und einer durchbrochenen Hohlkugel eine Doppelwägung auf den oberen Schalen:

I. Links $\mu_o + z_l^I$, rechts $m_o + z_r^I$, Einstellung e^I

II. „ $\mu_o + z_l^{II}$, „ $\mu_o + z_r^{II}$, „ e^{II} .

Daraus folgen die beiden Gleichungen:

$$(\mu_o - v_o d_o + z_l^I) - (m_o - \mathfrak{B}_o d_o + z_r^I) = (e^I - Np) \omega$$

$$(\mu_o - \mathfrak{B}_o d_o + z_l^{II}) - (\mu_o - v_o d_o + z_r^{II}) = (e^{II} - Np) \omega$$

und nach Elimination von Np :

$$2(\mu_o - m_o) + 2(\mathfrak{B}_o - v_o) d_o + (z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II} = (e^I - e^{II}) \omega$$

schliesslich:

$$d_o = \frac{(m_o - \mu_o) - \frac{1}{2}[(z_l - z_r)^I - (z_l - z_r)^{II}] - (e^I - e^{II}) \omega}{\mathfrak{B}_o - v_o}$$

Ebenso kann auf den unteren Schalen durch das andere Hohlkugelpaar m_u und μ_u die Luftdichte d_u gefunden werden. Die auf diese Weise gewonnene Bestimmung ist genauer, als für unsere Zwecke nöthig, denn es ist leicht, sowohl die etwas über 100 ccm betragende Volumdifferenz im Nenner als auch die im Zähler vorkommende Massendifferenz genauer als auf 1 Proc. zu bestimmen.

Ungefähr dieselbe Genauigkeit liefert die Berechnung der

1) F. Richarz, Verh. d. physik. Ges. z. Berlin. 25. Juni 1886; p. 83.

Luftdichte aus Luftdruck, Temperatur und Feuchtigkeit nach der Formel:

$$d = 1,293 \cdot \frac{b - \frac{3}{8}e}{(1 + 0,00367 \vartheta) \cdot 760} \frac{\text{mg}}{\text{ccm}}$$

wo b den Barometerstand im mm Hg, ϑ die Temperatur in Celsiusgraden bedeutet, und $\frac{3}{8}e$ mit dem relativen Feuchtigkeitsgehalt von w Procent zusammenhängt durch die im Bereich der bei uns vorkommenden Temperaturen richtige Formel

$$\frac{3}{8}e = 0,367 \cdot (1 + 0,0037 [\vartheta - 10]) \cdot (9,4 + 0,6 [\vartheta - 10]) \cdot \frac{w}{100}.$$

Zur schnellen Berechnung von d aus b , ϑ , w haben wir uns Tabellen hergestellt.

Der Barometerstand wird im Beobachtungsraum an einem Fues'schen Normalbarometer abgelesen, auf 0^0 reducirt und auf die verschiedenen Höhen der oberen und unteren Schalen hin corrigirt, das Vacuum des Barometers ist von Zeit zu Zeit geprüft worden und stets ausreichend gefunden worden. Die Correctionen der beiden Thermometer sind auf der Kaiserlichen Normalaichungscommission festgestellt worden, ausserdem sind vor kurzem beide unter einander verglichen worden und das eine von ihnen einer neuen Eispunktbestimmung und Vergleichung mit einem neubestimmten Normalthermometer der Kaiserlichen Normalaichungscommission unterzogen worden. Für die beiden Pfister'schen Haarhygrometer sind durch zweimaligen Vergleich mit einem Alluard'schen Condensationshygrometer und Bestimmung des Punktes $w = 100$ die Correctionen festgestellt worden.

Da die beiden Methoden der Bestimmung der Luftdichte anfänglich stets vortreffliche Uebereinstimmung zeigten, wurden die zeitraubenden Luftwägungen unterlassen und nur von Zeit zu Zeit als Controle ausgeführt. Dabei stellte sich aber mit der Zeit eine Differenz in den Resultaten heraus, die schon seit zwei Jahren die constante Grösse von etwa 1 Proc. aufweist, und sich bei d_o wie bei d_u in ganz gleicher Weise zeigt, deshalb aber auch unsere Resultate nicht alteriren kann, wie eine Betrachtung des Ausdrucks $\Phi + \Phi'$ lehrt. Die Ursache dieser Differenz aufzudecken ist uns nicht gelungen; die Neubestimmungen der meteorologischen Instrumente und der Constanten der Hohlkugeln haben keine Erklärung gebracht; auch

der Anwesenheit von Bestandtheilen in der Luft, welche in der meteorologischen Formel für d nicht berücksichtigt sind, konnten wir die Schuld nicht zuschreiben. Wir dachten dabei zunächst an die Möglichkeit eines abnorm hohen Kohlensäuregehaltes der Luft in unserm allseitig mit Blech ausgekleideten Raume; aber derselbe ergab sich doch nur zu 0,1 Proc. Weiter richtete sich unser Verdacht gegen den Dampf des Kamphers, den wir mit Erfolg zur Vertreibung von Motten, Mücken und andere Insecten benutzt hatten. Wir bestimmten die Dampfspannung des gesättigten Kampherdampfes und fanden dieselbe bei etwa 10^0 C. gleich 1 mm Hg, ein Werth, welcher bei dem hohen Moleculargewichte des Kamphers in der That eine Vermehrung der Luftdichte um die gefundene Grösse hätte erklären können. Aber auch nach Entfernung des Kampherdampfes durch Ventilation blieb die Differenz bestehen.

Dieselbe ist leider bis jetzt unerklärt; aber sie beeinflusst wie oben erwähnt, unsere Resultate nicht.

D. Einzelheiten der Ausführung.

Ueber die praktische Ausführung der einzelnen Wägungsreihen ist noch zu bemerken, dass die im Vorangehenden durch I. und II. bezeichneten Wägungen in abwechselnder Reihenfolge mehrfach wiederholt wurden, meist fünf Wägungen an jedem Tage, wobei $I = III = V$ und $II = IV$; durch Nehmen des Mittels aus den gleichbedeutenden Einstellungen wurden langsame Wanderungen eliminirt, und der in der vorstehenden Theorie mit $e^I - e^{II}$ bezeichnete Werth ist in Wahrheit

$$\frac{1}{3}\left\{\left[\frac{1}{2}(e^I + e^{III}) - e^{II}\right] + [e^{III} - \frac{1}{2}(e^{II} + e^{IV})] + [\frac{1}{2}(e^{III} + e^V) - e^{IV}]\right\}.$$

Der Werth eines Scalentheiles in Milligrammen (ω) oder sein reciproker Werth, die Empfindlichkeit, wurde durch Veränderung der Gewichtszulage um 0,8 mg oder 1 mg. bestimmt. Die Einrichtung unserer Wage erlaubt es, die Reitergewichte während des Schwingens aufzusetzen und abzuheben, wodurch die durch das Arretiren verursachten Veränderungen in der Einstellung der Wage vermieden und sehr gut übereinstimmende Werthe der Empfindlichkeit erzielt werden. Aber eine ziemlich schnell verlaufende elastische Nachwirkung in den Schneiden

bewirkt, dass die Wage nach Abheben der Zulage nicht auf ihre vorige Einstellung zurückgeht, vermuthlich auch nach dem Auflegen nicht vollkommen in die neue Stellung einrückt. So zeigt sich denn die so bestimmte Empfindlichkeit stets 5—10 Proc. kleiner als diejenige, welche durch Aenderung der Zulage mit zwischenliegendem Arretiren gewonnen wird. Letztere ist aber die für die Ausrechnung der Wägungsreihe maassgebende Grösse.

Eine einzelne der Wägungen I, II... V besteht daher bei uns aus einer Reihe von Einstellungen (je nach dem Zustand der Wage fünf bis sieben) mit zwischenliegendem Arretiren und Aufsetzen oder Abheben des zur Empfindlichkeitsbestimmung verwendeten Reiters. Aus den alternirenden Einstellungen erhält man so täglich mindestens 15 Werthe der Empfindlichkeit, deren Mittel ω ergibt.

Es ist wegen der elastischen Nachwirkungen in der Schneide vortheilhaft, die beiden vorkommenden Einstellungen möglichst symmetrisch zur arretirten Stellung der Wage zu wählen, wie auch e^{II} möglichst nahe an e^{I} zu bringen. Letzteres hat noch den Vortheil, dass dann ein Fehler von ω den geringsten Einfluss hat.

V. Resultate.

Im September 1890 glaubten wir alle Vorbereitungen für den Beginn der definitiven Wägungen getroffen zu haben und hofften auf eine genügende Uebereinstimmung derselben. In dieser Erwartung sahen wir uns aber zunächst noch getäuscht; es stellte sich bis zum August 1891 noch eine Reihe der im Capitel „Wage“ besprochenen Fehlerquellen heraus; auch functionirte bis dahin der automatische Vertauschungsmechanismus noch nicht tadellos, sodass das Innere des Zinkkastens allzu oft betreten werden musste: allzu oft, in Anbetracht der hohen Anforderungen, die an die Constanz der Temperatur zu stellen waren, die wir damals aber noch nicht genügend würdigten. Im October 1891, zur Zeit des sommerlichen Temperaturmaximums, welches in unserm Raume so verspätet eintritt, gelang es zuerst, eine Reihe hinreichend übereinstimmender Wägungen zu erhalten. Im November konnten wir zum ersten Male die Zeit der Temperaturgleichheit oben

und unten zu Wägungen mit Verticalvertauschung benutzen. Diese zeigten uns in auffallendster Weise den grossen Einfluss, den Temperaturdifferenzen schon von einigen Hundertel Grad zwischen Gewichtskugeln und umgebender Luft auf die Wägungen ausüben. Ist die Temperatur oben etwas höher als unten, so erzeugt nach der Verticalvertauschung die von oben nach unten transportirte massive Kugel um sich einen aufsteigenden Luftstrom und erscheint zu leicht; die von unten nach oben transportirte erzeugt einen absteigenden Luftstrom und erscheint zu schwer; die Abnahme des Gewichts mit der Höhe ergibt sich also zu klein. Die Hohlkugeln spielen bei dieser Störung keine Rolle, da ihre Temperatur sich ausserordentlich viel schneller ausgleicht. Ist umgekehrt die Temperatur oben etwas niedriger als unten, so erscheint die Abnahme des Gewichts mit der Höhe zu gross. Dies war im November und December 1891 aufs deutlichste zu erkennen.

In dieser und der nächstfolgenden Zeit wurde eine Anzahl von Beobachtungsreihen unter Bedingungen angestellt, deren Ungünstigkeit wir erst später zu übersehen im Stande waren. Ende Februar 1892 trat ein so rapider Abfall der Temperatur ein, dass wir zur Herstellung des oben erwähnten zweiten Systems von Bretterverschlägen mit Sägespänefüllung schritten. Im März und April waren Temperaturverhältnisse und Zustand der Wage andauernd günstig. Im Mai wurde der letztere allmählich schlechter, wie hinterher gefunden wurde in Folge von Staub und Schlottern der Arretirung; da aber die Zeit der Temperaturgleichheit oben und unten nahe bevorstand, wollten wir die Wage nicht auseinandernehmen. Ende Mai und Anfang Juni trat die Temperaturgleichheit ein und wir konnten Wägungen mit Verticalvertauschung anstellen.

In diesem Wechsel der Verhältnisse von September 1890 bis Juni 1892 ist es uns gelungen, 24 Werthe der Abnahme der Schwere mit der Höhe aus Wägungsreihen mit Horizontalvertauschung und zwei aus solchen mit Verticalvertauschung unter guten Temperaturverhältnissen und bei befriedigendem Zustande der Waage zu erhalten. Für die Wägungen bei ungenügender Temperaturconstanz oder mangelhaftem Zustande

der Waage ergeben sich ferner 26 Werthe aus Reihen mit Horizontalvertauschung und 7 Werthe aus Reihen mit Verticalvertauschung. Wir haben keinen Grund, bei diesen minderwerthigen Beobachtungen das Vorhandensein einer einseitig wirkenden Fehlerquelle anzunehmen; dieselben sollen daher ebenfalls angegeben und berücksichtigt werden.

Aus den drei Gruppen von Bestimmungen ergeben sich für die doppelte Gewichtsabnahme eines Kilogramms bei einer Höhendifferenz von 2,26 m folgende Werthe, ausgedrückt in Milligrammgewicht:

Sieben minderwerthige Bestimmungen aus Wägungen mit Verticalvertauschung liefern:

$$1,2624 \pm 0,0299$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung von $\pm 0,0792$;

26 minderwerthige Bestimmungen aus Wägungen mit Horizontalvertauschung liefern:

$$1,2465 \pm 0,0055$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung von $\pm 0,0283$;

26 Bestimmungen unter guten Verhältnissen, darunter 24 aus Wägungen mit Horizontalvertauschung, zwei aus solchen mit Verticalvertauschung geben:

$$1,2610 \pm 0,0021$$

mit einem wahrscheinlichen Fehler der Einzelbestimmung von $\pm 0,0105$.

Die Vereinigung der drei Gruppenmittel nach Maassgabe ihrer wahrscheinlichen Fehler zu einem Gesamtmittel gibt

$$1,2592 \pm 0,0020.$$

Dieses ist der Werth des Zählers von Gleichung (1) oder (5); durch Multiplication mit dem auf p. 572 berechneten Factor (2) folgt daraus die Differenz der Schwere am Orte der oberen und unteren Waageschalen

$$g_u - g_o = 0,0,6523 \frac{m}{\text{sec}^2}.$$

Unter der Voraussetzung, dass die Erde eine Kugel vom Halbmesser R sei und in concentrischen Schichten gleiche Dichtigkeit habe, würde für äussere Punkte die variable Beschleunigung g dem Quadrate der Entfernung r vom Erdmittelpunkte umgekehrt proportional sein:

$$g = \frac{A}{r^3} \quad \text{und also} \quad dg = -\frac{2A}{r^3} dr,$$

woraus

$$g_u - g_o = \frac{2g}{R} h,$$

wo h die Höhendifferenz sei. Nun ist

$$h = 2,26 \text{ m}; \quad g = 9,813 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}; \quad R = 6366200 \text{ m.}$$

Mithin

$$g_u - g_o \text{ (ber.)} = 0,05697 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Der beobachtete Werth ist also erheblich kleiner als der berechnete. Eine Abweichung in demselben Sinne haben auch bei den früheren Bestimmungen der Abnahme der Schwere mit der Höhe Jolly¹⁾ und Hr. Thiesen²⁾ gefunden. Bei unseren Versuchen war aber auch die Voraussetzung der theoretischen Berechnung, dass man sich ausserhalb der Erde befinde, durchaus nicht erfüllt; die zwischen dem Niveau der oberen und dem der unteren Schalen befindlichen Theile der Gewölbe und der Erdmassen des Bastions müssen durch ihre Gravitationswirkung die Differenz der Schwere zwischen den unteren und oberen Schalen ganz erheblich vermindern. Uebrigens kann im allgemeinen jene Abweichung des beobachteten und berechneten Werthes von $g_u - g_o$ auch darin ihre Ursache haben, dass unterhalb des Beobachtungsortes sich Schichten des Erdkörpers von abnorm geringer Dichtigkeit befinden.

1) Ph. v. Jolly, *Abh. der Münch. Akad.* **13.** (1) p. 155. 1878; **14.** (2) p. 1. 1883; *Wied. Ann.* **14.** p. 331. 1881.

2) Thiesen, *Détermination de la variation de la pesanteur avec la hauteur. Travaux et Mémoires du Bureau international des poids et mesures.* **7.** 1890.

Nach Abschluss der im vorstehenden beschriebenen Versuche ist im August und September vorigen Jahres (1892) der Bleiklotz ohne störenden Zwischenfall aufgebaut worden; die dabei auftretenden technischen Schwierigkeiten haben sich gut überwinden lassen. Wir haben bereits eine Reihe von Messungen der Attraction gemacht, und wenn keine unvorhergesehenen neuen Hindernisse auftreten, ist die glatte Durchführung der Untersuchung nunmehr gesichert.