welche eine Gewichtszunahme eines Kilogrammstückes von 1 mg bewirken könnte. Es ist mir einige Aussicht zur Ausführung des Versuches gegeben, der dann rückwärts auf einem neuen Wege zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde benutzt werden könnte.

VII. *Ein neuer Satz in der Theorie der Diffraction und dessen Anwendung; von J. Fröhlich in Budapest.*

Der mathematische Ausdruck, welcher zur Berechnung der Intensität des gebeugten Lichtes dient, führt nach einigen einfachen Betrachtungen zu einem eigenthümlichen Zusammenhang zwischen der kinetischen Energie des von einem leuchtenden Flächenelemente ausgehenden, auf einen unendlich grossen auffangenden Schirm fallenden gebeugten Lichtes einerseits und der Energie des von einer sehr grossen leuchtenden Fläche herrührenden, jedoch nur auf ein Element des Schirmes fallenden gebeugten Lichtes andererseits.

Insbesondere ist dies Verhältniss seiner leichten Anwendbarkeit wegen beachtenswerth; es ergibt dieselbe eine einfache Beobachtungsmethode, welche die Frage der Gleichheit der kinetischen Energien des einfallenden und des gebeugten Lichtes für jede Oeffnung sofort experimentell zu entscheiden gestattet.

Zur Herleitung dieses Satzes machen wir folgende Voraussetzungen:

Es sei eine beugende Oeffnung $\mathfrak{F}$ (Fig. 1), welche durch eine beliebige, ebene oder räumliche Curve begrenzt ist, deren Dimensionen zur Lichtwellenlänge sehr gross sind, so dass die Amplitude des gebeugten Lichtes nur bei kleinen Beugungswinkeln endlichen Werth besitze, sonst aber verschwinde. Ferner sei eine gleichmässig leuchtende Licht-

quelle von der Gestalt einer Kugeloberfläche FF , von welcher das Licht nach der Beugung durch $\mathfrak{F}$ zu dem ebenfalls kugelflächenförmigen auf-
 fangenden Schirme ff gelangt; die Radien der Flächen FF und ff , ϱ_1 und ϱ_0 sind sehr gross im Verhältniss zu den Dimensionen der Oeffnung

Fig. 1.

und liegt deren gemeinschaftlicher Mittelpunkt O in der Oeffnung oder deren unmittelbarer Nähe.

Die Amplitude der Lichtbewegung, welche vom Elemente ∂F ausgeht, sei in der Entfernung Eins: $(\mathfrak{A}_0^2 \partial F)^{\frac{1}{2}}$ (da jedes Element ∂F von den anderen gänzlich unabhängig schwingt), somit gelangt zur beugenden Oeffnung eine Bewegung, deren Amplitude $\frac{(\mathfrak{A}_0^2 \partial F)^{\frac{1}{2}}}{\varrho_1}$, welche wir hinfort mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnen; dieselbe ist daher die von ∂F herrührende Amplitude des einfallenden Lichtes.

Die Bewegung des gebeugten Lichtes ist von der Form $A \sin\left(2\pi \frac{t}{T} + \delta\right)$; der allgemeine Ausdruck, welcher die Amplitude derselben sowohl für Fresnel's als auch für Fraunhofer's Erscheinungen enthält, ist:

$$A^2 = \mathfrak{A}_1^2 K^2 \left\{ \left(\iint \frac{\partial \varrho_1}{\partial n} \cos p \partial \mathfrak{F} \right)^2 + \left(\iint \frac{\partial \varrho_1}{\partial n} \sin p \partial F \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}},$$

dabei ist:

$$p = \frac{2\pi}{\lambda} \left\{ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2} \left(\frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_0} \right) - (x\alpha + y\beta + z\gamma) \right\},$$

und es sind xyz die Coordinaten des Elementes $\partial \mathfrak{F}$ der fictiven Fläche, welche die beugende Oeffnung bedeckt

1) Der Factor $\frac{\partial \varrho_1}{\partial n} = \cos(\varrho_1 n)$ folgt aus dem Principe der Gleichheit der kinetischen Energieen, wie dies in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll. Denselben leitete auch W. Voigt aus der Fresnel'schen Theorie ab (Wied. Ann. IV. p. 542 etc.); ebenso aus der Elasticitätstheorie des Lichtes; doch ist derselbe auf die Herleitung oder Gültigkeit des folgenden Satzes von gar keinem Einfluss.

und deren Begrenzung besitzt, n die Normale dieses Elementes und:

$\alpha = \cos \alpha_0 - \cos \alpha_1$, $\beta = \cos \beta_0 - \cos \beta_1$, $\gamma = \cos \gamma_0 - \cos \gamma_1$, wenn $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$, $\alpha_0 \beta_0 \gamma_0$ die Richtungswinkel des einfallenden und des gebeugten Strahles bedeuten.

Die Gleichung der Fläche $\mathfrak{F}$ kann jedenfalls $z = \varphi(x, y)$ gesetzt werden, woraus $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \cos(\varrho_1 n)$ als Function von x und y folgt; ausserdem ist $\partial \mathfrak{F} = \frac{\partial x \partial y}{\cos(nz)}$, wo der Nenner ebenfalls durch x und y ausgedrückt werden kann, so dass unter den Integralzeichen obigen Ausdruckes eine Function von nur x und y steht und die Integration selbst nach x und y ausgeführt werden kann.

Die Amplitude A ist von der Lage des Coordinatensystemes gänzlich unabhängig; geben wir demselben in Zukunft eine solche Lage, dass der einfallende Strahl, also die $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1$ -Richtung, sehr nahezu in die ZX -Ebene fällt, so vereinfachen sich dadurch die folgenden Betrachtungen.

Nach Ausführung der Integrationen in A verschwinden die Variablen x und y ; es treten an deren Stelle die Begrenzungsconstanten der Oeffnung ein, und hängt A ausser von diesen noch von ϱ_1 und ϱ_0 , α , β , γ ab. Wir haben es jedoch nur mit unendlich kleinen Beugungswinkeln zu thun, so dass wir schreiben können:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1 - \alpha_0) \sin \alpha_0 = (\alpha_1 - \alpha_0) \sin \alpha_1 \\ \beta &= (\beta_1 - \beta_0) \sin \beta_0 = (\beta_1 - \beta_0) \sin \beta_1 \\ \gamma &= (\gamma_1 - \gamma_0) \sin \gamma_0 = (\gamma_1 - \gamma_0) \sin \gamma_1 \end{aligned} \right\}, \text{ und ausserdem:}$$

$$\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1$$

$$\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1.$$

Schreibt man in vorletzter Gleichung:

$$\alpha_0 = \alpha_1 + (\alpha_0 - \alpha_1), \quad \beta_0 = \beta_1 + (\beta_0 - \beta_1), \quad \gamma_0 = \gamma_1 + (\gamma_0 - \gamma_1)$$

und entwickelt, so hat man:

$$\cos \gamma_1 \sin \gamma_1 (\gamma_0 - \gamma_1) = -\cos \alpha_1 \sin \alpha_1 (\alpha_0 - \alpha_1) - \cos \beta_1 \sin \beta_1 (\beta_0 - \beta_1),$$

oder:

$$\gamma = -\alpha \frac{\cos \alpha_1}{\cos \gamma_1} - \beta \frac{\cos \beta_1}{\cos \gamma_1} = -\alpha \frac{\cos \alpha_0}{\cos \gamma_0} - \beta \frac{\cos \beta_0}{\cos \gamma_0},$$

somit ist γ eine lineare Function von α und β , daher hängt A , da nach unserer Voraussetzung ϱ_0 und ϱ_1 constant, nur von α und β ab; wir schreiben dies:

$$A^2 = \mathfrak{A}_i^2 K^2 \Psi(\alpha, \beta).$$

Bei der gewählten Lage des Coordinatensystemes sind die in Betracht kommenden Flächenelemente:

$$\partial F = \varrho_1^2 \partial \alpha_1 \partial \beta_1, \quad \partial f = \varrho_0^2 \partial \alpha_0 \partial \beta_0,$$

daraus folgt:

$$\mathfrak{A}_i = \left(\frac{\mathfrak{A}_0^2 \partial F}{\varrho_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} = (\mathfrak{A}_0^2 \partial \alpha_1 \partial \beta_1)^{\frac{1}{2}},$$

und es ist die Amplitude des von ∂F herrührenden gebeugten Lichtes:

$$A^2 = K^2 \mathfrak{A}_0^2 \partial \alpha_1 \partial \beta_1 \Psi(\alpha, \beta).$$

Es ergibt sich sonach die kinetische Energie desselben Lichtes, welches auf das Element ∂f fällt:

$$(0) \quad CA^2 \varrho_0^2 \partial \alpha_0 \partial \beta_0 = CK^2 \mathfrak{A}_0^2 \varrho_0^2 \partial \alpha \partial \beta_0 \Psi(\alpha, \beta) \partial \alpha_1 \partial \beta_1.$$

Von diesem Ausdrücke aus können wir nach zwei Richtungen weiter entwickeln: die Integration nach $\alpha_0 \beta_0$ gibt die auf den ganzen Schirm fallende Energie, welche von ∂F herrührt; die Integration nach $\alpha_1 \beta_1$ gibt die von der ganzen leuchtenden Fläche F auf das Element ∂f fallende Energie. Führen wir beide Operationen aus.

1. $\alpha_0 \beta_0$ sind die Variabeln; es ist dann $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_0) \sin \alpha_1$, $\beta = \beta_1 - \beta_0$, weil bei der mehrfach erwähnten Lage des Coordinatensystemes β_1 und β_0 sehr nahezu $\frac{\pi}{2}$; $\partial \alpha_0 = -\frac{\partial \alpha}{\sin \alpha_1} = -\frac{\partial \alpha}{\cos \gamma_1}$; $\partial \beta_0 = -\partial \beta$; $\partial \alpha_0 \partial \beta_0 = \frac{\partial \alpha \partial \beta}{\cos \gamma_1}$; wir erhalten daher für die kinetische Energie des von ∂F herrührenden, auf den ganzen Schirm fallenden gebeugten Lichtes:

$$(I) \quad CK^2 \mathfrak{A}_0^2 \varrho_0^2 \partial \alpha_1 \partial \beta_1 \frac{1}{\cos \gamma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(\alpha, \beta) \partial \alpha \partial \beta.$$

2. Die Variabeln sind $\alpha_1 \beta_1$; dann wird $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_0) \sin \alpha_0$, $\beta = \beta_1 - \beta_0$ (aus demselben Grunde wie vorhin), $\partial \alpha_1 = \frac{\partial \alpha}{\sin \alpha_0} = \frac{|\partial \alpha|}{\cos \gamma_0}$; $\partial \beta_1 = \partial \beta$; $\partial \alpha_1 \partial \beta_1 = \frac{\partial \alpha \partial \beta}{\cos \gamma_0}$; daher ist die kinetische Energie des von der ganzen leuchtenden Fläche FF herrührenden, jedoch nur auf das Element ∂f fallenden gebeugten Lichtes:

$$(II) \quad CK^2 \mathfrak{U}_0^2 \varrho_0^2 \partial \alpha_0 \partial \beta_0 \frac{1}{\cos \gamma_0} \int_{-x}^{+x} \int_{-x}^{+x} \Phi(\alpha, \beta) \partial \alpha \partial \beta.$$

Die Integrationsgrenzen konnten bis $-\infty$ und $+\infty$ ausgedehnt werden, da ja $\Phi(\alpha, \beta)$ nur bei sehr kleinen Werthen von $\alpha_1 - \alpha_0$, $\beta_1 - \beta_0$ endlich bleibt, sonst aber verschwindet.

Nennen wir nun zwei Elemente ∂F und ∂f etwa conjugirte, wenn deren Kegelecken in der Oeffnung $\mathfrak{F}$ gleich sind, also $\partial \alpha_0 \partial \beta_0 = \partial \alpha_1 \partial \beta_1$, so wird Ausdruck (I) und (II) identisch; in Worten ausgedrückt führt dies zu folgendem Satz:

Die kinetische Energie des von einer grossen, gleichmässig leuchtenden Kugelfläche FF ausgehenden, auf das Schirmelement ∂f fallenden gebeugten Lichtes ist gleich der kinetischen Energie des vom conjugirten leuchtenden Element ∂F herrührenden, auf den ganzen kugelflächenförmigen Schirm ff fallenden gebeugten Lichtes; vorausgesetzt, die Verbindungslinie der conjugirten Elemente durchstösst die Fläche $\mathfrak{F}$ der Oeffnung oder geht in unmittelbarer Nähe derselben vorbei, so dass $\gamma_0 - \gamma_1$ immer ausserordentlich klein sei.¹⁾

Wir können dies Resultat sofort verwerthen.

1) Diesen Satz fand ich zuerst nur für Fraunhofer'sche Erscheinungen, nach brieflicher Mittheilung desselben an Prof. Réthy in Klausenburg machte derselbe darauf aufmerksam, dass der Satz auch auf Fresnel's Erscheinungen ausgedehnt werden könne.

Nehmen wir vorläufig nur an, dass die kinetischen Energien des einfallenden und des gebeugten Lichtes gleich seien, so wird, wenn wir nur das von $\partial\mathfrak{F}$ ausgehende Licht betrachten, aus dem Ausdrucke (I) folgende Gleichung:

$$C\mathfrak{A}_0^2 \partial\alpha_1 \partial\beta_1 \iint \frac{\partial\varrho_1}{\partial n} \partial\mathfrak{F} = C\mathfrak{A}_0^2 \varrho_0^2 \partial\alpha_1 \partial\beta_1 \frac{1}{\cos\gamma_1} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta;$$

daraus:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta = \frac{\cos\gamma}{K^2 \varrho_0^2} \iint \frac{\partial\varrho_1}{\partial n} \partial\mathfrak{F}.$$

Suchen wir andererseits die Intensität der Beleuchtung im Elemente ∂f , hervorgebracht durch die ganze FF Fläche, so hat man nur den Ausdruck (II) mit $C\partial f = C\varrho_0^2 \partial\alpha_0 \partial\beta_0$ zu dividiren, und es ergibt sich das Quadrat dieser, durch A_x bezeichneten Amplitude:

$$A_x^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2 K^2}{\cos\gamma_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(\alpha, \beta) \partial\alpha \partial\beta.$$

Substituirt man den Werth des soeben gefundenen Doppelintegrals, und beachtet, dass γ_1 und γ_0 sehr nahezu gleich sind, so wird:

$$A_x^2 = \frac{\mathfrak{A}_0^2}{\varrho_0^2} \iint \frac{\partial\varrho_1}{\partial n} \partial\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{F}_p}{\varrho_0^2} \mathfrak{A}_0^2,$$

wo $\mathfrak{F}_p$ das andere Doppelintegral bedeutet.

Es ist dies ein merkwürdiges Resultat und sagt aus, dass die Beleuchtung des mittleren Theiles des Beugungsbildes einer sehr grossen gleichmässig leuchtenden Kugelfläche dem Flächeninhalte $\mathfrak{F}_p$ der Projection der beugenden Oeffnung auf die einfallende Wellenfläche direct proportional, hingegen von der Gestalt und Lage der beugenden Oeffnung gänzlich unabhängig sei.

Wir können jedoch mit vollem Rechte die letzte Gedankenfolge umkehren und sagen: Bestätigt sich die Proportionalität dieser Beleuchtung mit $\mathfrak{F}_p$, so ist auch die

Voraussetzung aus welcher sich diese Proportionalität ergab, richtig oder, das Princip der Gleichheit der Energien ist erwiesen, sobald dies Princip für eine dieser Oeffnungen verificirt war.

Die Ausführung der dazu nöthigen Beobachtungen geschah nach folgender Methode: In der Nähe des Brennpunktes des Collimators CC (Fig. 2) befand sich ein aus gefettetem feinem Papiere verfertigter Theil einer Kugel- $\text{fläche } FF$, dessen Symmetrieaxe in die des Collimators fiel; hinter FF befand sich eine mit grosser Flamme stetig brennende Petroleumlampe, welche die Fläche FF sehr gleichmässig beleuchtete (die geringen Intensitätsdifferenzen am Rande derselben haben auf die Beobachtung keinen Einfluss, da für diese $\Phi(\alpha, \beta)$ schon verschwindet); die scheinbare Grösse von FF betrug für die Mitte des Collimators etwa 8° , daher deren Dimensionen vollkommen genügten.

Vor der einen Halblinse H_1 eines Heliometers war eine quadratische Oeffnung angebracht, welche während

Fig. 2.

der ganzen Beobachtung dort verblieb, vor die andere Halblinse H_2 wurden nacheinander ebene und räumliche Oeffnungen der verschiedensten Gestalt, sowohl aus ein, als auch aus mehreren Oeffnungstheilen bestehend, befestigt, deren Dimensionen und Lagen genau bestimmt waren. Beide Halblinsen blieben während der Beobachtung unbeweglich und ihre Axen fielen mit der von CC genau zusammen.

Vor dem Brennpunkte des Heliometers polarisirte das drehbare Nicol N_1 das gebeugte Licht und das im Brennpunkte des Oculares befindliche kreisförmige Diaphragma o , gestattete nur die Beobachtung des mittleren Theiles des Beugungsbildes, während die planparallele Glasplatte P ,

die unter 45° zur Rohraxe geneigt war, das Bild der von der constanten Lichtquelle S beleuchteten, ebenfalls kreisförmigen kleinen Oeffnung o , genau so reflectirte, dass o , und das Bild von o , im Oculare unmittelbar nebeneinander zu stehen kamen. Das vor dem Ocular angebrachte zweite Nikol N_2 blieb während der Beobachtung in unveränderter Lage.

Bei der eigentlichen Beobachtung wurde eine der Halblinsen des Heliometers bedeckt und die andere freigelassen, und nun N_1 so weit gedreht, bis beide im Oculare sichtbare Bilder von o , und o , dieselbe Intensität besaßen; nun wurde die erstere Halblinse freigelassen, die andere verdeckt, und durch abermaliges Drehen von N_1 die Gleichheit der Intensität von o , und o , wieder hergestellt. Diese beiden Lagen von N_1 gaben die relative Intensität der Beleuchtung von o , im ersten und im zweiten Falle.

Da nun schon in einer früheren Untersuchung¹⁾ die Gleichheit der kinetischen Energieen für rectanguläre Oeffnungen als thatsächlich bestehend nachgewiesen wurde, brauchte sich gegenwärtige Untersuchung nur mit der Erforschung der Proportionalität der Beleuchtung in o , mit $\mathfrak{F}_p$ zu befassen.

Es zeigte sich hier, wie dies schon nach obiger Arbeit als wahrscheinlich zu erwarten war, eine bis auf die Grenze der Beobachtungsfehler genaue Uebereinstimmung zwischen den theoretischen Folgerungen und den Resultaten der Beobachtung.

Auf Grund dieser Untersuchungen ist man berechtigt als experimentell bestätigten Satz auszusprechen: Bei kleinen Beugungswinkeln ist die kinetische Energie des einfallenden Lichtes für jede beliebig geformte Oeffnung gleich der kinetischen Energie des gebeugtes Lichtes.

Phys. Inst. d. Univ. Budapest, am 15. Juni 1878.

1) Wied. Ann. III. p. 568.