Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen.

Von Dr. E. Schröder in Pforzheim.

Das vielbehandelte Problem der Auflösung einer Gleichung wird im Folgenden aus einem, meines Wissens, neuen Gesichtspunkte in Angriff genommen, welcher die gemeinschaftliche Quelle sowohl für mehrere bekannte, als auch für unzählige noch nicht beachtete Auflösungsmethoden bildet. Die Untersuchungen beziehen sich nicht nur auf algebraische, sondern auch auf transcendente Gleichungen mit *einer* Unbekannten. Anregung zu denselben erhielt ich 1867 durch einige Mittheilungen von Herrn Dr. Heinrich Eggers aus Meklenburg — vormals Professor am Gymnasium zu Schaffhausen und gegenwärtig nach Amerika ausgewandert — dem ich namentlich die Kenntniss eines grossen Theiles der in den §§ 2., 3., 7., 8., 11., 12., und 15. vorgelegten, übrigens selbstständig von mir hergeleiteten Resultate verdanke.

§ 1.

Charakter der Auflösungsmethoden und Bedingung ihrer Anwendbarkeit.

Ist $f(z)$ irgend eine eindeutig definirte Function des complexen Argumentes $z = x + iy$, welches wir uns stets durch einen Punkt der Zahlenebene dargestellt denken wollen, so besteht die Aufgabe, welche den Gegenstand der nachfolgenden Betrachtungen bildet, darin, die Gleichung:

$$(1) \qquad f(z) = 0$$

aufzulösen, das heisst, irgend eine Zahl (Wurzel) z_1 zu finden, von der Eigenschaft, dass

$$(2) \qquad f(z_1) = 0$$

ist. Es soll jedoch nur von denjenigen Wurzeln der beliebigen algebraischen oder transscendenten Gleichung (1) die Rede sein, in welchen und um welche herum die Function $f(z)$ stetig ist, für welche ferner die Function von endlicher Ordnung Null wird. Nehmen wir das Zeichen z_1 um irgend eine erste eben dieser Wurzeln vorzustellen, so wird also die Function $f(z)$ in einem gewissen, den Punkt z_1 umschliessenden Gebiete T einwerthig stetig und endlich, und wird $f(z_1)$ von endlicher Ordnung 0 sein.

Aus der Functionentheorie ist nun bekannt*), dass der Grad der Vielfachheit der Wurzel z_1 oder die Ordnung des Verschwindens der innerhalb T einwerthigen Function $f(z)$, ebenso wie die Ordnung des Unendlichwerdens der reciproken Function $\frac{1}{f(z)}$ in dem Punkte z_1 eine (positive) ganze Zahl p sein muss, so dass man setzen kann:

(3) $$f(z) = (z - z_1)^p \, \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ eine ebenfalls innerhalb T einwerthige Function ist, deren Grenze

$$\lim_{z=z_1} \psi(z)$$

einen bestimmten von 0 und ∞ verschiedenen Werth erhält. Da ferner die Derivirte $d_z \psi(z) = \psi^{(1)}(z)$ daselbst ebenfalls wieder einwerthig und endlich sein, da mithin:

(4) $$\lim_{z=z_1} (z - z_1) \, \psi(z) = 0$$

sein muss**), so folgt aus der differenzirten Gleichung (3), nämlich aus:

(5) $$f^{(1)}(z) = (z - z_1)^{p-1} \left\{ p \, \psi(z) + (z - z_1) \, \psi^{(1)}(z) \right\}$$

leicht, dass die Derivirte $f^{(1)}(z)$ unsrer Function im Punkte z_1 von der Ordnung $p - 1$ verschwindet.

Die Gleichung:

(6) $$\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = 0$$

muss demnach die nämlichen Wurzeln wie die Gleichung (1) — eine jede nur *einfach* — besitzen; ausserdem hat sie aber innerhalb T noch diejenigen Werthe von z zu einfachen Wurzeln — und nur diese Werthe — für welche $f(z)$ unendlich wird.

Dieses vorausgesetzt, hat man zur Auflösung der Gleichung (1) bekanntlich unter verschiedenen Methoden die Wahl. Es giebt nun eine grosse und, wie sich zeigen wird, sogar unendliche Mannigfaltigkeit von Auflösungsmethoden, welchen allen dieser Charakter gemeinsam ist, dass man mit einer nahezu ganz willkürlichen Zahl z nach bestimmten Gesetzen zu rechnen beginnt, und durch eine hinreichend

---

*) Vergleiche z. B. Durège, Elemente der Theorie der Functionen einer complexen veränderlichen Grösse, Leipzig 1864, § 29.

**) Ibidem § 24. und 27.

weit fortgesetzte Reihe von Operationen zu einem Resultat geführt wird, welches der gesuchten Wurzel z_1 so nahe kommt, als man will. Jener *Anfangswerth* z kann manchmal als ein erster (oder nullter) Näherungswerth für die gesuchte Wurzel z_1 angesehen werden, von welchem aus man durch den Algorithmus der Auflösungsmethode successive zu besseren und genaueren Näherungswerthen geführt wird; oft auch ist man dabei des Durchganges durch zwischenliegende Näherungswerthe nicht benöthigt. Von der Wahl des Anfangswerthes hängt es in beiden Fällen ab, welche Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ man finden wird; im Uebrigen erscheint er als eine innerhalb gewisser Gebiete beliebige Constante, deren Einfluss auf das Endresultat um so mehr verschwindet, je weiter die Rechnung fortgesetzt wird. Auflösungsmethoden der einen und der andern Art bilden den Gegenstand der nachfolgenden Untersuchungen.

§ 2.

Methoden der ersten Art (Algorithmen).

Ohne dass über die Natur der Function f sogleich irgend etwas vorausgesetzt werde, soll nun die Gleichung (1) zunächst durch einen Algorithmus aufgelöst werden, durch dessen wiederholte Anwendung man von einem innerhalb gewisser Schranken beliebig angenommenen oder errathenen nullten Näherungswerth z ausgehend successive zu genaueren und genaueren Nährungswerthen für die Wurzel z_1 geführt werde. Es handelt sich dann darum, eine solche Function F aufzufinden, dass die Gleichung:

$$z' = F(z) \tag{7}$$

stets einen Punkt z' liefert, welcher der Wurzel z_1 näher liegt als der anfänglich angenommene Punkt z.

Stellen wir uns nämlich eine solche Function F als bereits bekannt vor, so wird die Berechnung von:

$$z'' = F(z')$$

einen neuen Punkt liefern, welcher von der gesuchten Wurzel z_1 noch weniger weit entfernt ist, als die beiden vorhergehenden z und z'; und definiren wir überhaupt:

$$z^{(r)} = F(z^{(r-1)}) , \tag{8}$$

so wird die Distanz des letzten Punktes $z^{(r)}$ von der Wurzel z_1 nach der über F gemachten Annahme kleiner sein, als die eines jeden der vorhergehenden Punkte:

$$z^{(0)} = z , \; z^{(1)} = z' , \; z^{(2)} = z'' , \; . \; . \; . \; , \; z^{(r-1)}$$

von der nämlichen Wurzel; mit andern Worten die Moduln der Differenzen:

$$z - z_1\,,\ z' - z_1\,,\ z'' - z_1\,,\ \ldots,\ z^{(r-1)} - z_1\,,\ z^{(r)} - z_1,$$

welche man als die *Fehler* der verschiedenen Näherungswerthe bezeichnen kann, werden eine abnehmende Reihe bilden.

Eine fernere Forderung, die an die Function F gestellt werden muss, ist aber noch die, dass erstere Distanz bei wachsendem r nicht allein stets abnehme, sondern auch wirklich bis zu 0 abnehme, sodass:

$$\lim_{r=\infty} z^{(r)} = z_1 \tag{9}$$

werde.

Wenn diese Forderung, nebst der vorigen, die analytisch ausgedrückt lautet:

$$\text{mod.}\left\{z^{(r)} - z_1\right\} < \text{mod.}\left\{z^{(r-1)} - z_1\right\}, \tag{10}$$

für alle Werthe von r, wenigstens von einem bestimmten an bis $r = \infty$, erfüllt ist, so giebt die Gleichung (7) in der That einen *Algorithmus* von der verlangten Art an, durch dessen successive Anwendung man die Wurzel z_1 der Gleichung (1) beliebig genau zu ermitteln im Stande ist, und von welchem wir einfach sagen wollen, dass er von dem Anfangswerthe z an gegen die Wurzel z_1 *convergire.*

Die Auflösung der Gleichung $f(z) = 0$ kann alsdann symbolisch wie folgt dargestellt werden:

$$z_1 = \lim_{r=\infty} F^r(z), \tag{11}$$

wenn wir nämlich, wie künftig geschehen soll, die $r$fach wiederholte oder *iterirte* Function:

$$\underset{1}{F}\,(\underset{2}{F}\{\ldots \underset{r-1}{F}[\underset{r}{F}\,(z)]\ldots\}) = F^r(z) \tag{12}$$

bezeichnen.

Die Bedingungen (9) und (10), welche also durch die Function F erfüllt werden sollen, lassen sich aber in vortheilbringender Weise umgestalten.

Der Anfangswerth z soll nämlich innerhalb eines den Wurzelpunkt z_1 umschliessenden Gebietes U, welches füglich das *Convergenzgebiet* des Algorithmus für die Wurzel z_1 genannt werden kann, ein beliebiger sein. Stellt also $z = z_1 + \varepsilon$ einen hinreichend nahe an z_1 innerhalb dieses Convergenzgebietes gewählten Anfangswerth vor, und rechnet man den folgenden Näherungswerth z' oder:

$$F(z_1 + \varepsilon) = z_1 + \varepsilon'$$

aus, so muss nach (10) stets mod. $\varepsilon' <$ mod. ε sein; es muss folglich, wenn ε irgendwie der 0 zustrebt, um so mehr auch ε' der 0 zustreben, oder es muss:

$$\lim_{\varepsilon=0} F(z_1 + \varepsilon) = z_1$$

sein. Diese Gleichung lehrt, dass die Function F erstens in dem Punkte z_1 stetig sein, und zweitens die Bedingung:

$$(13) \qquad F(z_1) = z_1$$

erfüllen muss.

Nun könnte zwar von dem Punkte z_1 noch eine Unstetigkeitslinie der Function F ausgehen, oder ein Verzweigungsschnitt, wenn diese Function in mehrere Blätter fortgesetzt würde; wir wollen uns aber auf die Aufsuchung solcher Functionen F beschränken, welche innerhalb U, oder wenigstens innerhalb eines den Punkt z_1 umschliessenden Theils dieses Convergenzgebietes, einwerthig sind.

Alsdann lässt sich $F(z)$ oder $F(z_1 + \varepsilon)$ innerhalb eines den Mittelpunkt z_1 umschliessenden Kreises, oder für ein ε von hinreichend kleinem Modul, in eine Taylor'sche Reihe entwickeln:

$$F(z_1 + \varepsilon) = F(z_1) + \varepsilon F^{(1)}(z_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} F^{(2)}(z_1) + \cdots,$$

oder wegen (7) und (13):

$$(14) \qquad z' = z_1 + \varepsilon F^{(1)}(z_1) + \frac{\varepsilon^2}{2} F^{(2)}(z_1) + \cdots.$$

Vorausgesetzt, dass zunächst $F^{(1)}(z_1)$ von 0 verschieden sei, wird für ein hinreichend kleines ε das Glied $\varepsilon F^{(1)}(z_1)$ alle rechts nachfolgenden Glieder überwiegen, und man wird für ein unendlich kleines ε setzen können:

$$z' - z_1 = \varepsilon F^{(1)}(z_1).$$

Soll der Modul dieser Differenz gemäss der Forderung (10) kleiner sein, als derjenige von $z - z_1 = \varepsilon$, so erhalten wir als zweite Bedingung, welcher die Function F unterworfen sein muss:

$$(15) \qquad \text{mod. } F^{(1)}(z_1) < 1.$$

Wäre $F^{(1)}(z_1) = 0$, so würde diese Bedingung ohnehin erfüllt sein.

Wenn nun aber die Bedingung (15) überhaupt erfüllt ist, so wird der Fehler des ersten Näherungswerthes, d. i. $z' - z_1$, seinem Modul nach geschätzt, nur ein Bruchtheil des ursprünglichen Fehlers der Annahme, d. i. $z - z_1 = \varepsilon$ sein, und da man durch wiederholtes Multipliciren mit einem constanten echten Bruche jede Zahl der 0 so nahe bringen kann als man will, so ist es unschwer nachzuweisen, dass dieser Fehler des Näherungswerthes, bei fortgesetzter Anwendung des Algorithmus, der 0 in der That zustrebt, oder dass auch die Forderung (9) erfüllt ist.

Es lassen sich also, wenn wir uns auf eine einwerthige Function F beschränken, die beiden Bedingungen (9) und (10) durch die (13) und (15) ersetzen.

Ferner kann man beiläufig den Satz aussprechen:

Ist $F(z)$ eine um den Punkt z_1 herum einwerthige Function, welche den Bedingungen (13) *und* (15) *genügt, so kann man immer eine übrigens willkürliche Zahl z nahe genug an z_1 annehmen, damit die Gleichung* (11) *erfüllt werde; mit andern Worten, für alle Punkte z eines gewissen um den Punkt z_1 herum liegenden Gebietes strebt die ohne Ende fort iterirte Function $F(z)$ der Wurzel z_1 der Gleichung $F(z) = z$ als Grenze zu.*

Wir hatten gefunden, dass unter den Voraussetzungen (13) und (15) die Gleichung (7) einen Algorithmus von der verlangten Art angiebt.

Wird der Fall: $F^{(1)}(z_1) = 0$ ausgeschlossen, so möge die Convergenz des alsdann vorliegenden Algorithmus eine *lineare*, oder *von der ersten Ordnung* genannt werden, weil hier der Fehler des Näherungswerthes der *ersten* Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe um so genauer proportional ist, je kleiner der Modul des letzteren ist.

Einen viel brauchbareren Algorithmus erhält man jedoch, wenn die Function F so gewählt wird, dass zu den früheren Bedingungen noch die Gleichung:

$$F^{(1)}(z_1) = 0 \tag{16}$$

hinzutritt. Ist hier die nächst höhere Derivirte $F^{(2)}(z_1)$ von 0 verschieden, so wird für ein unendlich kleines ε der Fehler des Näherungswerthes:

$$z' - z_1 = \frac{\varepsilon^2}{2} F^{(2)}(z_1)$$

dem Quadrate des ursprünglichen Fehlers ε der Annahme proportional, er wird von der Ordnung dieses Quadrates, und kann die Annäherung füglich eine *quadratische* genannt werden.

Ebenso erhält man überhaupt einen Algorithmus, welcher eine Annäherung *von der ω^{ten} Ordnung* gewährt, wenn die Function F so bestimmt ist, dass gleichzeitig

$$F^{(1)}(z_1) = 0 \quad , \quad F^{(2)}(z_1) = 0 \quad , \quad \ldots \; F^{(\omega-1)}(z_1) = 0 \tag{17}$$

ist, während $F^{(\omega)}(z_1)$ von 0 verschieden ist, denn alsdann wird für ein unendlich kleines ε:

$$z' - z_1 = \frac{\varepsilon^\omega}{2 \,.\, 3 \ldots \omega} F^{(\omega)}(z_1)\,,$$

also der Fehler bei dem Näherungswerthe proportional der ω^{ten} Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe.

Ist in der That der nullte Näherungswerth oder Anfangswerth — seinem Modul nach geschätzt — auf s Decimalstellen hinter dem Komma genau, so wird der folgende oder erste Näherungswerth bei dem quadratisch convergirenden Algorithmus schon auf $2s$, bei dem Algorithmus der ω^{ten} Ordnung schon auf ungefähr ωs Decimalen nach dem Komma richtig sein, das heisst, genauer gesprochen: die Zahl s

kann so gross gedacht werden, dass für sie und für jede noch grössere Zahl s die Behauptung in aller Strenge richtig ist.

Es möge nun das Resultat recapitulirt werden:

Ist z_1 eine Wurzel einer Gleichung $f(z) = 0$, ist ferner $F(z)$ eine Function, welche innerhalb eines den Punkt z_1 umschliessenden Gebietes einwerthig ist und dortselbst den Werth z_1 annimmt, so dass die Gleichung (13)*:*

$$F(z_1) = z_1$$

erfüllt ist, so stellt die Gleichung (7):

$$z' = F(z)$$

einen Algorithmus vor, welcher ebenfalls innerhalb eines, jenen Punkt umschliessenden Gebietes, gegen die Wurzel z_1 convergirt, wenn (15)*:*

$$\text{mod. } F^{(1)}(z_1) < 1$$

ist, und zwar nur linear, wenn dieser Werth von 0 *verschieden, hingegen von der ω^{ten} Ordnung, wenn* (17)*:*

$$F^{(1)}(z_1) = 0 \;,\; F^{(2)}(z_1) = 0 \;,\; \ldots \; F^{(\omega-1)}(z_1) = 0 \;,\; \text{mod. } F^{(\omega)}(z_1) > 0$$

ist.

§ 3.

Beispiele von Algorithmen.

Wir lassen jetzt die im § 1 erwähnte Voraussetzung über die Einwerthigkeit der Function $f(z)$ eintreten.

I. Der bekannteste Algorithmus der gedachten Art um eine Gleichung $f(z) = 0$ aufzulösen, ist der Newton'sche; derselbe ist dargestellt durch die Formel:

$$z' = z - \frac{f(z)}{f^{(1)}(z)},$$

und ist also für ihn $F(z)$ oder:

$$F = z - \frac{f}{f^{(1)}},$$

wenn jetzt Kürze halber die Argumente z weggelassen werden.

Ist nämlich die Wurzel z_1 eine $p$fache, und bezeichnen wir

$$z - z_1 = \varepsilon,$$

sodass gemäss § 1:

$$f = \varepsilon^p \psi \quad , \quad f^{(1)} = \varepsilon^{p-1}(p\psi + \varepsilon\psi^{(1)})$$

und:

$$F = z - \frac{\varepsilon\psi}{p\psi + \varepsilon\psi^{(1)}}, \text{ mithin: } F^{(1)} = 1 - \frac{\psi}{p\psi + \varepsilon\psi^{(1)}} - \varepsilon\,\partial_z \frac{\psi}{p\psi + \varepsilon\psi^{(1)}}$$

wird, so erkennt man in der That sofort, dass für $z = z_1$ oder $\varepsilon = 0$:

$$F = z_1 \text{ sowie } F^{(1)} = 1 - \frac{1}{p}\,, \quad \text{folglich mod. } F^{(1)} < 1 \text{ ist,}$$

dass also die gefundenen Grundbedingungen eines Algorithmus durch den Newton'schen erfüllt werden.

Falls $p > 1$, ist $F^{(1)}$ von 0 verschieden; der Algorithmus convergirt also nur linear, wenn eine vielfache Wurzel durch denselben gefunden werden soll, und zwar um so schlechter, je vielfacher die gesuchte Wurzel ist. Ist aber $p = 1$, die Wurzel eine einfache, so ist der Newton'sche Algorithmus von quadratischer Convergenz, da alsdann $F^{(1)}(z_1) = 0$ wird, während $F^{(2)}(z_1)$ im Allgemeinen von 0 verschieden bleibt.

Will man auch für den ersten Fall einen quadratisch convergirenden Algorithmus erhalten, während der Grad p der Vielfachheit der Wurzel bekannt ist, so braucht man nur zu setzen:

$$F = z - p\,\frac{f}{f^{(1)}};$$

desselben Algorithmus könnte man sich mit Vortheil bedienen, wenn p nahezu gleiche Wurzeln vorhanden wären.

In dem besondern Falle, wo $f(z) = (z - z_1)^p$ selbst, also $\psi(z) = 1$ ist, liefert der letztere Algorithmus für jeden Anfangswerth z sofort die richtige Wurzel der Gleichung, indem $z' = z - \varepsilon = z_1$ wird.

II. Bezeichnet man eine beliebige um den Punkt z_1 herum einwerthige Function, welche in diesem Punkte selbst nicht etwa unendlich ist, durch

$$\frac{\varphi^{(1)}(z)}{\varphi(z)},$$

so liefert die Gleichung:

$$z' = z - \frac{f(z)\,\varphi(z)}{\varphi(z)\,f^{(1)}(z) - f(z)\,\varphi^{(1)}(z)} \qquad \text{oder} \qquad F = z - \frac{1}{\frac{f^{(1)}}{f} - \frac{\varphi^{(1)}}{\varphi}}$$

einen Algorithmus zur Auffindung der Wurzel z_1, welcher im Allgemeinen nur linear convergirt, wenn diese Wurzel eine vielfache, hingegen quadratisch, wenn sie eine einfache ist.

Derselbe ergiebt sich, wenn man den Newton'schen Algorithmus zur Auflösung der Gleichung

$$\frac{f(z)}{\varphi(z)} = 0$$

bildet, resp. in den Formeln sub I. überall $\frac{f}{\varphi}$ statt f setzt. Auch die letztere Gleichung besitzt nämlich die Wurzel z_1, und kann an Stelle der Gleichung $f(z) = 0$ aufgelöst werden, wenn nur, wie dies in der obigen Voraussetzung implicirt ist, die Function φ nicht zugleich mit f verschwindet.

Auch ohne den letzteren Algorithmus aus dem Newton'schen abzuleiten, kann man die Zulässigkeit desselben direct darthun, indem man durch Einsetzung von $f = \varepsilon^p \psi$ bildet:

$$F = z - \frac{\varepsilon}{p + \varepsilon \frac{\psi^{(1)}}{\psi} - \varepsilon \frac{\varphi^{(1)}}{\varphi}},$$

und diesen Ausdruck nach z differenzirt.

Wegen der Willkürlichkeit der Function φ umfasst aber der gegenwärtige allgemeine Algorithmus unendlich viele specielle Algorithmen, z. B. der Newton'sche selbst geht durch die Annahme

$$\varphi(z) = \text{Const.}$$

wieder aus ihm hervor.

III. Die Function φ lässt sich jedoch so wählen, dass der Algorithmus sogar für eine vielfache Wurzel quadratische Convergenz behält — und dies giebt den bemerkenswerthesten Specialfall des allgemeinen Algorithmus; zufolge der an Gleichung (6) geknüpften Bemerkung wird derselbe erhalten, indem man $\varphi = f^{(1)}$ annimmt. Hier findet man nach einer leichten Reduction:

$$F = z - \varepsilon \frac{p + \varepsilon \frac{\psi^{(1)}}{\psi}}{p + \varepsilon^2 \left(\frac{\psi^{(1)}}{\psi}\right)^2 - \varepsilon^2 \frac{\psi^{(2)}}{\psi}},$$

und da für $\varepsilon = 0$ sofort auch $F^{(1)} = 0$ folgt, so ist also:

$$z' = z - \frac{f(z) f^{(1)}(z)}{f^{(1)}(z)^2 - f(z) f^{(2)}(z)}$$

ein stets mit quadratischer Schnelligkeit convergirender Algorithmus.

§ 4.

Die allgemeinsten Algorithmen von gegebener Convergenzgeschwindigkeit.

Ich gehe jetzt dazu über, in der allgemeinsten Weise zu zeigen, wie sich leicht Algorithmen $z' = F(z)$ construiren lassen, welche gegen eine Wurzel z_1 der Gleichung $f(z) = 0$ mit beliebig gegebener Schnelligkeit convergiren.

Die Function f sei jedoch der im § 1. erwähnten Bedingung der Einwerthigkeit unterworfen, ebenso die Function F gemäss § 2.

Der beliebige, nur hinreichend nahe an z_1 zu wählende Anfangswerth z werde Kürze halber weggelassen, wo er als Argument einer Function auftritt; ist aber in einer Formel statt des allgemeinen Argumentes z das specielle z_1 zu denken, so werde die Gleichung $z = z_1$ oder die für unsern Zweck äquivalente: $f(z) = 0$ zur Unterscheidung daneben geschrieben. Die besonders häufig auftretenden Derivirten der Function f:

$$\partial_z{}^a f(z) = f^{(a)}(z)$$

mögen ferner mit f_a bezeichnet, jede andere Differentiation nach z

aber mittelst der Symbole ∂_z, resp. ∂_z^a, kürzer ∂, resp. ∂^a angedeutet werden, und erstrecke sich der Einfluss eines solchen Symbols stets auf alles Folgende bis zum nächsten $+$ oder $-$ Zeichen.

Mit φ, φ_1, φ_2, ... werde ich arbiträre Functionen von z bezeichnen, die nur in der Umgebung des Punktes z_1 einwerthig sind und in diesem Punkte selbst nicht unendlich werden.

Unbeschadet der Allgemeinheit können wir uns endlich auf die Voraussetzung beschränken, dass jede Wurzel z_1 der aufzulösenden Gleichung $f = 0$ eine einfache sei; denn enthält diese Gleichung vielfache Wurzeln, so besitzt die Gleichung $\frac{f}{f_1} = 0$, wie schon erwähnt, die nämlichen Wurzeln, eine jede nur einfach; man braucht also nur in den für den ersteren Fall erhaltenen Resultaten die Function f durchweg durch $\frac{f}{f_1}$ zu ersetzen, um das Entsprechende für den letzteren Fall zu erhalten.

Die erste an die Function F zu stellende Forderung war nun die, dass $F = z_1$ sei für $z = z_1$ oder $f = 0$; und diese Forderung wird auf die allgemeinste Weise erfüllt, wenn man setzt:

$$F = z - \varphi,$$

wo die arbiträre Function φ ausser der schon erwähnten Eigenschaft auch noch die besitzt, für $f = 0$ zu verschwinden. Da diese letztere Bedingung erfüllt wird, wenn man setzt:

$$\varphi = f \cdot \varphi_1,$$

und zwar wiederum auf die allgemeinste Weise, so lange φ_1 unbestimmt gelassen wird, so ist:

$$F = z - f\varphi_1$$

die allgemeinste Form einer Function, welche die erste Forderung erfüllt.

Soll nun dieser Algorithmus zum mindesten von quadratischer Convergenz sein — (für diejenigen von linearer Convergenz, für welche nur noch eine Ungleichung erfüllt werden, nämlich mod. $\partial F < 1$ sein muss für $f = 0$, lässt sich nicht wohl eine allgemeine Formel aufstellen; überdies sind dieselben in der Praxis viel weniger brauchbar) — so tritt als zweite Forderung hinzu: $\partial F = 0$ für $f = 0$. Dies liefert:

$$f_1 \varphi_1 + f \partial \varphi_1 = 1 \text{ für } f = 0,$$

oder, weil $\partial \varphi_1$ so wenig als φ_1 unendlich sein kann im Punkte z_1:

$$f_1 \varphi_1 = 1 \text{ für } f = 0,$$

und weil endlich, nach der Voraussetzung einer einfachen Wurzel, f_1 nicht zugleich mit f verschwinden kann:

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1} \text{ für } f = 0.$$

Lässt man diese Gleichung, welche nur für $z = z_1$ zu gelten brauchte, sogleich für ein beliebiges z gelten, und fügt noch ein arbiträres mit f zugleich verschwindendes Glied hinzu, setzt man also überhaupt:

$$\varphi_1 = \frac{1}{f_1} + f\varphi_2,$$

so erfüllt sich auch die zweite Forderung in der allgemeinsten Weise, und es umfasst also die Gleichung:

$$F = z - \frac{f}{f_1} - f^2\varphi_2$$

bei unbestimmt gelassener Function φ_2 alle möglichen Algorithmen zweiter Ordnung oder von quadratischer Convergenz.

[In der That ist die Function φ_2 leicht so zu bestimmen, dass der Algorithmus beispielsweise in den sub II. im vorigen Paragraphen angegebenen ebenso allgemeinen Algorithmus übergeht; zu dem Ende braucht man nur die beiden Ausdrücke von F einander gleichzusetzen und φ_2 mittelst dieser Gleichung durch die dortige Function φ auszudrücken.]

Soll weiter der Algorithmus cubisch convergiren, so muss die Function F die fernere Forderung: $\partial^2 F = 0$ für $f = 0$ erfüllen. Bildet man aber die Gleichung $\partial^2 F = 0$, und setzt darin $f = 0$, ohne im Uebrigen auch das Argument z in z_1 zu verwandeln, so lässt sich daraus die Function φ_2 in der allgemeinsten Weise der Forderung entsprechend bestimmen, wenn man noch ein arbiträres, mit f gleichzeitig verschwindendes Glied hinzufügt. So ergiebt sich nach leichter Rechnung:

$$\varphi_2 = \frac{f_2}{2f_1^3} + f\varphi_3,$$

und liefert folglich die Function:

$$F = z - \frac{f}{f_1} - \frac{f^2 f_2}{2f_1^3} - f^3\varphi_3$$

den allgemeinen Algorithmus von cubischer Convergenz.

Fährt man fort, in dieser Weise zu schliessen, so gelangt man zu folgendem Resultate:

Der allgemeinste Algorithmus $z' = F(z)$, dessen Convergenz von der ω^{ten} Ordnung ist, wird erhalten, indem man:

$$F = z - \frac{f}{1!}\cdot\frac{1}{f_1} + \frac{f^2}{2!}\cdot\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1} - \frac{f^3}{3!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^2\frac{1}{f_1} + \cdots$$
$$\cdots + (-1)^{\omega-1}\frac{f^{\omega-1}}{(\omega-1)!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{\omega-2}\frac{1}{f_1} - f^\omega\varphi_\omega,$$

oder in kürzerer Bezeichnung:

$$F = z + \sum_{a=1}^{a=\omega-1}(-1)^a\frac{f^a}{a!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} - f^\omega\cdot\varphi_\omega \tag{18}$$

annimmt, wo φ_ω eine arbiträre Function ist.

Zur Erklärung muss ich bemerken, dass ich mich für die Facultäten $1.2.3\ldots(a-1).a$ hier, sowie im Folgenden, Kürze halber der von Schlömilch eingeführten Bezeichnung $a!$ bediene, ferner dass der Ausdruck:

$$\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}$$

kein Quantitätssymbol, sondern ein Operationssymbol vorstellen soll, welches fordert, dass das darauf folgende Operationssubject $\frac{1}{f_1}$ nach einander $a-1$ mal erst differenzirt und dann mit $\frac{1}{f_1}$ multiplicirt werde, sodass z. B.:

$$\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^4 \frac{1}{f_1}$$

den Sinn hat:

$$\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}\partial\frac{1}{f_1}.$$

Um nun die Richtigkeit des obigen Satzes zu beweisen, muss man nur noch darthun, dass die sämmtlichen Derivirten der Function F, bis zur $\omega-1^{\text{ten}}$ einschliesslich, für $f=0$ verschwinden. Zu diesem Zwecke hat man aber nicht nöthig, die genannten Derivirten sämmtlich zu bilden; es genügt, die Gleichung (18) ein einziges Mal zu differenziren. Thut man dies in allen Gliedern zuerst nach dem Factor vor, dann nach dem Factor hinter dem $\cdot$ Zeichen, ohne die letztere Operation mehr als nur anzudeuten, so kommt:

$$\partial F = 1 + \sum_{a=1}^{a=\omega-1}(-1)^a\frac{af^{a-1}f_1}{a!}\cdot\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} - \omega f^{\omega-1}f_1\cdot\varphi_\omega +$$
$$+\sum_{a=1}^{a=\omega-1}(-1)^a\frac{f^a}{a!}\cdot\partial\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-1}\frac{1}{f_1} - f^\omega\cdot\partial\varphi_\omega.$$

In der ersten Summe rechts vereinfacht sich aber das allgemeine Glied zu:

$$(-1)^a\frac{f^{a-1}}{(a-1)!}\cdot\partial\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{a-2}\frac{1}{f_1},$$

und man sieht sogleich, dass sich das erste Glied dieser Summe gegen den Term 1 weghebt; ebenso heben sich alle folgenden Glieder dieser Summe gegen die $\omega-2$ ersten Glieder der zweiten Summe, sodass nur das letzte Glied dieser letzteren stehen bleibt, nebst den zwei noch ausserhalb befindlichen Termen.

Man hat also:

$$\partial F = f^{\omega-1}\left\{\frac{(-1)^{\omega-1}}{(\omega-1)!}\partial\left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{\omega-2}\frac{1}{f_1} - \omega f_1\varphi_\omega - f\partial\varphi_\omega\right\},$$

und da diese Function den Factor $f^{\omega-1}$ enthält, also mit f zugleich $\omega-1$ fach verschwindet, so müssen auch die höheren Derivirten derselben bis zur $\omega-2^{\text{ten}}$ inclus. für $f=0$ verschwinden, wie gezeigt werden sollte.

§ 5.

Auflösungsmethode der zweiten Art als Grenzfall der Algorithmen.

Nachdem wir nun zu einem allgemeinen Ausdruck (18) für den Algorithmus von der Ordnung ω gelangt sind, liegt der Gedanke nahe, auch einmal $\omega = \infty$ anzunehmen.

Es erscheint dann die Function F in Gestalt einer unendlichen Reihe, nämlich:

$$(19) \qquad F = z + \sum_{\alpha=1}^{\alpha=\infty} (-1)^\alpha \frac{f^\alpha}{\alpha!} \left(\frac{1}{f_1}\partial\right)^{\alpha-1} \frac{1}{f_1},$$

wenn wir noch das niemals erscheinende Glied $- f^\omega \varphi_\omega$ durch die Annahme $\varphi_\omega = 0$ zum Wegfall bringen, und hat die Function selbstverständlich nur insofern einen Sinn, als die genannte Reihe convergent ist. In einer grossen Classe von Fällen wird die Reihe in der That für ein gewisses Bereich von z convergiren, da sie sich für $f = 0$ auf das Anfangsglied $z = z_1$ reducirt, und da die Grösse f, nach deren Potenzen die Reihe ansteigt, so klein gemacht werden kann, als man will, wenn man nur z hinreichend nahe an z_1 annimmt. [Sollte sich aber dieses Bereich in den Punkt z_1 zusammenziehen, so dürfte es durch passende Annahme von φ_ω in Gleichung (18) nicht selten gelingen, die divergente Reihe durch einen Grenzwerth zu ersetzen, welcher endlich bleibt.]

Im Convergenzfalle nun stellt die Reihe (19) eine Function dar, deren sämmtliche Derivirte für $f = 0$ verschwinden. Der Werth dieser Function für einen hinreichend nahe an z_1 gewählten Anfangswerth z liefert also einen Näherungswerth z' für die Wurzel z_1, dessen Fehler einer unendlich hohen Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe proportional, das ist 0 sein muss. In der That giebt die Gleichung (14) für diesen Fall: F oder

$$(20) \qquad z' = z_1 .$$

Der Algorithmus von unendlich rascher Convergenz giebt daher als ersten Näherungswerth sofort die richtige Wurzel der Gleichung; derselbe besitzt den Charakter eines eigentlichen Algorithmus oder *wiederholt* anzuwendenden Rechenverfahrens nicht mehr, sondern er bildet eine Auflösungsmethode von der zweiten in § 1 erwähnten Art, bei der man der Vermittelung von Näherungswerthen behufs Auflösung der Gleichung nicht bedarf.

Es mögen nun die angedeuteten Differentiationen in den ersten Gliedern der Reihe wirklich ausgeführt werden. Die Reihe lautet dann:

$$z_1 = F = z - \frac{f}{1!} \cdot \frac{1}{f_1} - \frac{f^2}{2!} \cdot \frac{f_2}{f_1^3} - \frac{f^3}{3!} \cdot \frac{3 f_2^2 - f_1 f_3}{f_1^5} -$$

$$(21) \qquad - \frac{f^4}{4!} \cdot \frac{15 f_2^3 - 10 f_1 f_2 f_3 + f_1^2 f_4}{f_1^7} -$$

$$- \frac{f^5}{5!} \cdot \frac{105 f_2^4 - 105 f_1 f_2^2 f_3 + 10 f_1^2 f_3^2 + 15 f_1^2 f_2 f_4 - f_1^3 f_5}{f_1^9} - \ldots$$

und ist in dieser Form auf einem andern Wege und ohne Beziehung zu den von uns betrachteten Algorithmen schon von Theremin*) abgeleitet worden.

Bezeichnet man das allgemeine Glied mit:

$$- \frac{f^a}{a!} \cdot \frac{\chi_a}{f_1^{2a-1}},$$

so lassen sich die Zähler χ_a leicht recurrent nach dem Schema bilden:

$$(22) \qquad \chi_{a+1} = (2a - 1) f_2 \chi_a - f_1 \partial \chi_a .$$

In conciser Weise lässt sich die Reihe auch noch folgendermassen darstellen:

$$(23) \quad z_1 = F(z) = z + \sum_{a=1}^{a=\infty} \frac{(-1)^a f(z)^a}{a!} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^{a-1} \left\{ \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} \right\}^{-a},$$

oder aber:

$$(24) \qquad z_1 = \sum_{a=0}^{a=\infty} \frac{(-1)^a f(z)^a}{a!} \partial_{f(z)}^a z ;$$

indem die Identität besteht:

$$(25) \quad \left(\frac{1}{f_1} \partial\right)^{a-1} \frac{1}{f_1} = \frac{(-1)^{a-1} \chi_a}{f_1^{2a-1}} = \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^{a-1} \left\{ \frac{f(z+\varepsilon) - f(z)}{\varepsilon} \right\}^{-a} = \partial_{f(z)}^a z ,$$

welche nach den bekannten Sätzen für die Vertauschung der unabhängigen Variabeln leicht erwiesen werden kann.

§ 6.

Beispiel der quadratischen Gleichung.

Um zu den letzten Ergebnissen auch ein Beispiel anzuführen, will ich dieselben auf die quadratische Gleichung anwenden, welche zwar schon von Theremin (l. c.) jedoch nicht mit befriedigender Strenge und Vollständigkeit behandelt worden ist.

Sei also:

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2) = z^2 - z(z_1 + z_2) + z_1 z_2 = 0$$

die auf dem angegebenen Wege aufzulösende Gleichung; dann ist:

---

*) Crelle's Journal, Bd. 49, pag. 187—243: Recherches sur la résolution des équations de tous les dégrés.

$$\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}=\varepsilon+2z-z_1-z_2,$$

und:

$$\partial_\varepsilon^{a-1}\cdot\frac{1}{(\varepsilon+2z-z_1-z_2)^a}=\frac{(-1)^{a-1}(2a-2)!}{(a-1)!\,(\varepsilon+2z-z_1-z_2)^{2a-1}}.$$

Setzt man den hieraus für $\varepsilon=0$ sich ergebenden Werth nebst demjenigen von $f(z)$ in die Gleichung (23) ein, so folgt:

$$z'=z-\sum_{a=1}^{a=\infty}\frac{(2a-2)!}{(a-1)!\,a!}\cdot\frac{(z-z_1)^a(z-z_2)^a}{(2z-z_1-z_2)^{2a-1}},$$

oder weil

$$\frac{(2a-2)!}{(a-1)!\,a!}=(-1)^{a-1}2^{2a-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)_a$$

ist, falls der Binomialcoefficient

$$\frac{s!}{a!\,(s-a)!}$$

stets mit $(s)_a$ bezeichnet wird,

$$z'=z+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)\sum_{a=1}^{a=\infty}(-1)^a\left(\tfrac{1}{2}\right)_a\left\{\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2}\right\}^a.$$

Als untere Grenze der Summe rechter Hand kann man auch 0 nehmen, wenn man dafür von dieser Summe 1 abzieht; dann aber stellt die Summe die nach Potenzen der Grösse:

$$t=-\frac{(z-z_1)(z-z_2)}{\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)^2}$$

fortschreitende Binomialreihe für den Exponent $\frac{1}{2}$ vor.

Nun hat Abel*) nachgewiesen, dass die Binomialreihe

$$\sum_{a=0}^{a=\infty}(s)_a\,t^a$$

convergirt und einen der Werthe von $(1+t)^s$ vorstellt, wenn überhaupt mod. $t<1$ ist, und auch noch für mod. $t=1$ falls der reelle Theil von $s>-1$ ist, mit Ausnahme endlich des Specialwerthes $t=-1$ wenn real. $s\gtreqless 0$. Da gegenwärtig $s=\frac{1}{2}$ ist, convergirt unsere Reihe also für mod. $t\leq 1$, und ist dann:

$$z'=z+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)\left\{\pm\sqrt{1+t}-1\right\}=z+\left(z-\frac{z_1+z_2}{2}\right)\left\{\frac{\pm\frac{z_1-z_2}{2}}{z-\frac{z_1+z_2}{2}}-1\right\},$$

also:

$$z'=\frac{z_1+z_2}{2}\pm\frac{z_1-z_2}{2},$$

das heisst $z'=z_1$ wenn das obere, und $z'=z_2$ wenn das untere Zeichen gilt. Welcher von diesen beiden Fällen vorliegt, muss aber

*) Oeuvres complètes, T. I. No. VII, Christiania 1839, pag. 66.

noch discutirt werden; desgleichen wollen wir uns von der Beschaffenheit des Convergenzgebietes Rechenschaft geben.

Setzen wir:

$$z - z_1 = \varrho_1 e^{i\vartheta_1}\,,\; z - z_2 = \varrho_2 e^{i\vartheta_2}\,,\; z - \frac{z_1 + z_2}{2} = \varrho\, e^{i\vartheta}\,,$$

so sind ϱ_1, ϱ_2, ϱ beziehungsweise die Abstände des Punktes z von den Punkten z_1, z_2 und $\frac{z_1+z_2}{2}$, welcher letztere zwischen den beiden ersten in der Mitte liegt, und die Convergenzbedingung für die Reihe lautet:

$$\varrho_1\, \varrho_2 \leqq \varrho^2.$$

Nennt man aber $2E$ den Abstand der beiden Wurzelpunkte z_1 und z_2 von einander, so ist nach einem bekannten Satze über die Mittellinie (Schwerlinie, Mediane) jedes Dreiecks:

$$\varrho^2 = \frac{\varrho_1^2 + \varrho_2^2}{2} - E^2,$$

und verwandelt sich die Convergenzbedingung in:

$$(\varrho_1 - \varrho_2)^2 \geqq 2E^2 \qquad \text{oder} \qquad \pm(\varrho_1 - \varrho_2) \geqq E\sqrt{2}.$$

Das Convergenzgebiet ist also von einer gleichseitigen Hyperbel begrenzt, deren Brennpunkte die Wurzeln z_1 und z_2 der quadratischen Gleichung sind, und zwar ist es derjenige Theil der Zahlenebene, in welchem diese Brennpunkte selbst liegen. Die Hyperbel selbst gehört noch zu dem Convergenzgebiete.

Abel hat auch (l. c.) gezeigt, welchen Werth der unendlich vieldeutigen Function $(1+t)^s$ die Binomialreihe ausdrückt, falls sie überhaupt convergirt. Zu dem Ergebnisse dieses Theiles der Abel'schen Untersuchung kann man aber, da für reelle Argumente jene Summe unzweideutig bekannt ist, leichter direct nach dem Satze der Functionentheorie gelangen, dass eine Potenzreihe eine einwerthige und stetige Function des Argumentes ist, und dass eine solche Function — wenigstens einem bestimmten Flächenstreifen entlang — nur auf *eine* Weise stetig in der Ebene fortgesetzt werden kann. Die Function $\log z$ möge, wie es bei vielen Untersuchungen zweckmässig erscheint, in der ganzen Zahlenebene eindeutig definirt werden durch die Festsetzung, dass sie für positive z reell genommen und von der Axe der positiven Zahlen stetig bis an die Axe der negativen Zahlen fortgesetzt werden soll, so, dass der imaginäre Theil von $\log z$ auf der negativen Axe selbst $+\pi i$, unendlich dicht unterhalb derselben aber $-\pi i$ ist, und die Function also längs der Axe der negativen Zahlen eine Unstetigkeitslinie besitzt. Die Summe der Binomialreihe ist dann unzweideutig dargestellt durch den Ausdruck: $e^{s \log(1+t)}$. Für unser Beispiel ist aber:

$$1+t=\left(\frac{E e^{i\vartheta_0}}{\varrho e^{i\vartheta}}\right)^2=\left(\frac{E}{\varrho}\right)^2 e^{2i(\vartheta_0-\vartheta)},$$

wenn wir noch mit ϑ_0 die Amplitude der Zahl

$$\frac{z_1-z_2}{2}=E e^{i\vartheta_0}$$

bezeichnen, also:

$$e^{\frac{1}{2}\log(1+t)}=\frac{E}{\varrho}\,e^{\frac{1}{2}\log e^{2i(\vartheta_0-\vartheta)}}.$$

Beachtet man, dass für eine reelle Zahl y:

$$\log e^{iy}=i(y+2h\pi)$$

ist, wo die positive oder negative ganze Zahl h so gewählt werden muss, dass $y+2h\pi$ zwischen $-\pi$ (excl.) und π (incl.) liegt, so ergiebt sich:

$$e^{\frac{1}{2}\log(1+t)}=\frac{E}{\varrho}\,e^{i(\vartheta_0-\vartheta+h\pi)}=\frac{\frac{z_1-z_2}{2}}{z-\frac{z_1+z_2}{2}}\cdot e^{h\pi i},$$

wo h so zu wählen ist, dass $\vartheta_0-\vartheta+h\pi$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ (exclus.) und $\frac{\pi}{2}$ (inclus.) liegt. Der Fahrstrahl ϱ des Punktes z schliesst nun mit der Verbindungslinie von z_1 und z_2 zwei supplementäre Winkel ein, von welchen der auf der Seite des Punktes z_1 liegende ω_1, der andere ω_2 heissen möge, und welche stets zwischen 0 und π genommen werden können. Wählt man noch die Amplituden ϑ_0, ϑ, etc. stets zwischen $-\pi$ und π, so ist es leicht, nach dem Satze vom Aussenwinkel des Dreiecks, die Differenz $\vartheta_0-\vartheta$ durch ω_1 oder ω_2 auszudrücken, und man findet, dass h eine gerade Zahl 0 oder 2, mithin $e^{h\pi i}=1$ sein muss, wenn $\omega_1<\frac{\pi}{2}$, hingegen eine ungerade Zahl ± 1, mithin $e^{h\pi i}=-1$, wenn $\omega_2<\frac{\pi}{2}$. Im ersten Falle gilt in der Formel für z' das obere Zeichen und wird $z'=z_1$, im zweiten Falle das untere und wird $z'=z_2$. Als Summe der Reihe ergiebt sich also stets diejenige Wurzel der quadratischen Gleichung, deren Zahlenort derjenige Hyperbelbrennpunkt ist, welcher auf der nämlichen Seite der kleinen Axe in der Ebene liegt, wie der Zahlenort des Punktes z, dem also z sich nähern kann ohne die Curve zu überschreiten.

§ 7.

Einführung der symmetrischen Functionen A, B der Wurzeln.

Nachdem die Auffindung der allgemeinsten Algorithmen zur Auflösung einer Gleichung $f(z)=0$ im Vorausgehenden erledigt ist, gehe ich zur Aufstellung der bemerkenswerthesten speciellen Algorithmen über. Da ich indess die Motive hierzu der Theorie der *algebraischen*

Gleichungen entlehne, werde ich mich von nun an auf diesen Fall beschränken — wo also $f(z)$ eine rationale Function ist — wenngleich die Endresultate grossentheils auch auf den Fall einer beliebigen einwerthigen Function ausgedehnt werden könnten.

Die von 0 und ∞ verschiedenen Wurzeln der Gleichung, um deren Aufsuchung es sich *allein* handelt, seien: $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n$.

Die gedachten Algorithmen beruhen nun auf den Eigenschaften gewisser symmetrischer Functionen dieser sämmtlichen Wurzeln, welche in der Form enthalten sind:

$$(26) \qquad C_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^\lambda \chi(z_a)}{(z-z_a)^{\omega+1}},$$

worin ω und λ beliebige, aber positive ganze Zahlen bedeuten sollen und χ eine den willkürlichen Anfangswerth z nicht enthaltende Function eines Argumentes ist, die für keine Wurzel z_a der Gleichung 0 oder ∞ wird.

Die Eigenschaften jener Function (26) bilden den nächsten Gegenstand unserer Betrachtung.

Setzt man:

$$(27) \qquad F(z) = \frac{C_\omega^{(\lambda+h)}(z)}{C_\omega^{(\lambda)}(z)},$$

wo h wieder eine natürliche Zahl bedeutet, so lässt sich zuerst der Satz aufstellen:

I. *Ist das Argument der Function F eine Wurzel der Gleichung $f=0$, so ist der Werth der Function die h^{te} Potenz dieser Wurzel, oder:*

$$(28) \qquad F(z_1) = z_1^h,$$

wobei z_1 oder das für die erste der Wurzeln eingeführte Zeichen selbstredend zugleich der Repräsentant einer beliebigen von diesen Wurzeln ist.

Um diesen Satz zu beweisen, multiplicire man Zähler und Nenner des Bruches (27) mit $(z-z_1)^{\omega+1}$, damit sie für $z=z_1$ nicht mehr ∞ werden; dadurch entsteht:

$$(29) \qquad F(z) = \frac{\sum\limits_{a=1}^{a=n} z_a^{\lambda+h}\chi(z_a)\left(\frac{z-z_1}{z-z_a}\right)^{\omega+1}}{\sum\limits_{a=1}^{a=n} z_a^{\lambda}\chi(z_a)\left(\frac{z-z_1}{z-z_a}\right)^{\omega+1}}.$$

Ist nun die Wurzel z_1 eine $p$fache (wo p auch $=1$ sein kann), ist z. B.:

$$(30) \qquad z_1 = z_2 = \cdots = z_p,$$

so verschwinden für $z=z_1$ im Zähler und Nenner alle Glieder, welche auf das p^{te} folgen, oder für welche die Summationsvariable $a > p$ ist;

in den Gliedern hingegen, für welche a einen der Werthe 1, 2, 3, ... p besitzt, nimmt der Factor

$$\left(\frac{z-z_1}{z-z_a}\right)^{\omega+1}$$

den Werth 1 an, und da alle diese Glieder einander gleich sind, beträgt ihre Summe das $p$fache des ersten Gliedes, oder es wird:

$$F(z_1) = \frac{p\, z_1^{\lambda+h}\, \chi(z_1)}{p\, z_1^{\lambda}\, \chi(z_1)},$$

was auf Gleichung (28) hinauskommt.

Unter der Annahme $h = 1$ erfüllt also die Function F die erste Grundbedingung: $F(z_1) = z_1$, welcher, wie wir gesehen haben, eine Function unterworfen sein muss, wenn sie einen Algorithmus liefern soll.

II. *Liegt der Punkt z dem Zahlenort der Wurzel z_1 näher, als allen übrigen Wurzelpunkten, ist also mod. $(z - z_1)$ der kleinste unter den Moduln der sämmtlichen von einander verschiedenen unter den Differenzen $z - z_1$, $z - z_2$, ..., $z - z_n$, sodass:*

(31) mod. $(z - z_1) <$ mod. $(z - z_a)$ für $a = p + 1$, $p + 2, \ldots n$,

so ist der Grenzwerth:

(32) $$\lim_{\omega=\infty} F(z) = z_1^{h}.$$

Denn, da

$$\text{mod. } \frac{z-z_1}{z-z_a}$$

ein echter Bruch ist für jedes $a > p$, so ist der Grenzwerth

$$\lim_{\omega=\infty} \left(\frac{z-z_1}{z-z_a}\right)^{\omega+1} \text{ gleich } 0 \text{ für } a > p;$$

hingegen ist derselbe gleich 1 für $a = 1, 2, 3, \ldots p$. In dem Zähler und Nenner von (29) verschwinden also für $\omega = \infty$ wieder alle auf das p^{te} folgenden Glieder, und ziehen sich die übrigen zusammen genau wie beim vorigen Satze, wo $z = z_1$ gesetzt wurde.

III. *Die Derivirte $\partial_z F(z)$ wird 0 in der Ordnung ω, wenn das Argument z in eine Wurzel z_1 übergeht, oder es kann:*

(33) $$\partial_z F(z) = (z - z_1)^{\omega} \cdot \Psi(z)$$

gesetzt werden, wo $\Psi(z)$ eine Function ist, die für $z = z_1$ nicht ∞ wird und im Allgemeinen, so lange nicht besondere Relationen zwischen den Wurzeln vorausgesetzt werden, auch nicht verschwindet.

Zum Zweck des Beweises setze man in die aus (27) durch Differentiation sich ergebende Gleichung:

$$\partial_z F(z) = \frac{C_{\omega}^{(\lambda)}(z)\, \partial_z C_{\omega}^{(\lambda+h)}(z) - C_{\omega}^{(\lambda+h)}(z)\, \partial_z C_{\omega}^{(\lambda)}(z)}{\left\{C_{\omega}^{(\lambda)}(z)\right\}^2}$$

die aus (26) hervorgehenden Ausdrücke der Functionen C ein, wobei aber in den zu differenzirenden Functionen C die Summationsvariable a zur Unterscheidung durch einen andern Buchstaben b ersetzt werden möge, und führe die rechts angedeuteten Differentiationen aus; dann erhält man nach einer leichten Zusammenziehung:

$$C_\omega^{(\lambda)}(z)^2 \cdot \partial_z F(z) = -(\omega+1) \sum_{a=1}^{a=n} \sum_{b=1}^{b=n} \frac{z_a^\lambda z_b^\lambda \, \chi(z_a) \, \chi(z_b)}{(z-z_a)^{\omega+1} \, (z-z_b)^{\omega+1}} \cdot \frac{z_b^h - z_a^h}{z-z_b} .$$

Die Ausdrücke unter den Doppelsummen rechter Hand sind unsymmetrisch in Bezug auf die Summationsvariabeln a und b wegen des Factors:

$$\frac{z_b^h - z_a^h}{z-z_b} ;$$

dieselben können aber symmetrisch gestaltet werden, wenn man bedenkt, dass wegen des Zählers $z_b^h - z_a^h$ zunächst alle diejenigen Glieder aus der Doppelsumme herausfallen, in welchen die Summationsindices a und b einander gleich sind. Bei den übrig bleibenden Termen findet sich zu jeder Combination a, b der beiden Indices die entsprechende b, a vor, und man ist deshalb berechtigt, anstatt jenes Factors unter der Doppelsumme zu schreiben:

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{z_b^h - z_a^h}{z-z_b} + \frac{z_a^h - z_b^h}{z-z_a}\right\} = \frac{1}{2} \frac{(z_a^h - z_b^h)(z_a - z_b)}{(z-z_a)\,(z-z_b)} .$$

Dadurch wird endlich:

$$(34)\ \partial_z F(z) = -\frac{\omega+1}{2} \cdot \frac{\displaystyle\sum_{a=1}^{a=n} \sum_{b=1}^{b=n} \frac{z_a^\lambda z_b^\lambda \,(z_a^h - z_b^h)\,(z_a - z_b)}{(z-z_a)^{\omega+2}\,(z-z_b)^{\omega+2}} \, \chi(z_a)\,\chi(z_b)}{\displaystyle\left\{\sum_{c=1}^{c=n} \frac{z_c^\lambda \, \chi(z_c)}{(z-z_c)^{\omega+1}}\right\}^2} ,$$

worin man also auch berechtigt ist, a und b als irgend zwei verschiedene unter den Zahlen $1, 2, 3, \ldots n$ anzusehen.

Wir wollen nun Zähler und Nenner in (34) mit einer solchen Potenz von $z - z_1$ multipliciren, dass dieselben für $z = z_1$ nicht mehr ∞ werden; es frägt sich, welche Potenz dieser Differenz hierzu erforderlich ist.

Ist zunächst die Wurzel z_1 eine einfache, so muss man den Bruch in (34) des Gesammtnenners wegen offenbar mit dem Factor

$$\{(z-z_1)^{\omega+1}\}^2 = (z-z_1)^{2\omega+2}$$

erweitern. Um aber im Zähler das genannte Resultat zu erzielen, würde schon die Multiplication mit $(z-z_1)^{\omega+2}$ genügen, da wegen der Verschiedenheit der Indices a und b eine höhere Potenz von $z - z_1$ in den Nennern der einzelnen Glieder nicht vorkommen kann. Es bleibt also noch der Factor:

$$(z-z_1)^{2\omega+2-(\omega+2)} = (z-z_1)^\omega$$

in eine für $z = z_1$ nicht mehr ∞ oder 0 werdende Function multiplicirt übrig.

Für den Fall einer vielfachen, nämlich $p$fachen Wurzel z_1 wird man leicht dieselbe Schlussweise anwendbar finden, nachdem man darauf Rücksicht genommen, dass alsdann mehrere Glieder im Zähler des Ausdrucks (34) sich fortheben, während andere im Zähler und auch im Nenner sich zusammenziehen.

Da also die Derivirte $\partial_z F(z)$ für $z = z_1$ in der That ωfach verschwindet, so müssen auch die höheren Differentialquotienten der Function $F(z)$ bis zum ω^{ten} einschliesslich für $z = z_1$ verschwinden, oder es erfüllt die Function $F(z)$ die zweite Grundbedingung, welcher eine Function unterworfen sein muss, wenn sie einen Algorithmus der $\omega + 1^{\text{ten}}$ Ordnung liefern soll.

IV. Es erübrigt noch als eine vierte Eigenschaft der Function C die Relation anzuführen:

$$(35) \qquad C_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=0}^{c=h} (-1)^c (h)_c z^{h-c} C_{\omega-c}^{(\lambda-h)}(z),$$

worin $(h)_c$ den Binomialcoefficienten $\frac{h!}{c!(h-c)!}$ bezeichnet.

Der Beweis ist leicht zu führen, denn setzt man die aus der Definition (26) sich ergebenden Ausdrücke ein, so kommt die Relation auf die nach dem Binomialtheorem identische Gleichung hinaus:

$$z_a^h = \sum_{c=0}^{c=h} (-1)^c (h)_c z^{h-c} (z - z_a)^c.$$

Als bemerkenswerther besonderer Fall dieser Relation (35) ist die für $h = \lambda$ sich ergebende Gleichung zu erwähnen:

$$(36) \qquad C_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=0}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} C_{\omega-c}^{(0)}(z),$$

vermöge welcher die Functionen C mit dem Exponenten λ einfach auf solche mit dem Exponenten 0 zurückgeführt werden können.

Setzt man endlich in (35) $\lambda + h$ statt λ, so nimmt die Relation eine Gestalt an, in der wir sie für den in der Folge besonders wichtigen Fall $h = 1$ hier anschreiben wollen; es wird nämlich:

$$(37) \qquad C_\omega^{(\lambda+1)}(z) = z\, C_\omega^{(\lambda)}(z) - C_{\omega-1}^{(\lambda)}(z).$$

Was die willkührliche Function χ betrifft, die in den Ausdruck (26) der symmetrischen Function $C_\omega^{(\lambda)}(z)$ eingeht, so werden sich zwei specielle Annahmen derselben in der Folge als besonders lohnend herausstellen. Die eine Annahme ist:

$$\chi(z) = \frac{1}{f^{(1)}(z)},$$

die andere:

$$\chi(z) = 1.$$

Wählt man für χ diese beiden Ausdrücke, so erhält man aus (26) zwei Functionen, die wir zur Unterscheidung von der allgemeinen Function C mit A und B bezeichnen wollen, sodass:

$$(38) \qquad A_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^\lambda}{(z-z_a)^{\omega+1} f^{(1)}(z_a)};$$

$$(39) \qquad B_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^\lambda}{(z-z_a)^{\omega+1}}.$$

Bei der Function A muss selbstredend der Fall vielfacher Wurzeln ausgeschlossen werden, indem sonst einige Glieder der Summe wegen des Verschwindens der Derivirten von f unendlich werden; bei der Function B bleibe dieser Fall stets zugelassen. Im Uebrigen zeigen die Eigenschaften dieser beiden Functionen eine so durchgreifende Analogie, dass es sich meist empfehlen wird, sie gleichzeitig zu untersuchen.

In der That geht auch die Function A in die Function B über, wenn man $f(z)$ ersetzt durch $\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)}$. Die Gleichung $\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = 0$ hat nämlich nach § 1. mit der Gleichung $f(z) = 0$ sämmtliche endlichen Wurzeln gemein, und besitzt eine jede derselben nur einfach; es ist demnach gestattet, für die erstere Gleichung die Function $A_\omega^{(\lambda)}(z)$ zu bilden, wobei man nur statt $\frac{1}{\partial_z f(z)}$ zu nehmen hat:

$$\frac{1}{\partial_z \frac{f(z)}{f^{(1)}(z)}} = \frac{f^{(1)}(z)^2}{f^{(1)}(z)^2 - f(z)\, f^{(2)}(z)}.$$

Da dieser Ausdruck, wie leicht nachzuweisen, für $z = z_1$ den Werth p annimmt, wenn z_1 eine $p$fache Wurzel ist, so geht die über sämmtliche endliche Wurzeln der Gleichung $\frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = 0$, d. h. über die von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ ausgedehnte Summe (38) über in die auf sämmtliche endliche Wurzeln dieser Gleichung überhaupt erstreckte Summe (39).

Verstehen wir jetzt unter $f(z)$ eine nicht allein rationale, sondern auch ganze Function, etwa:

$$(40) \qquad f(z) = \gamma_0 z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \gamma_2 z^{n-2} + \dots + \gamma_{n-1} z + \gamma_n = \\ = \gamma_0 (z-z_1)(z-z_2)\dots(z-z_n),$$

so kann man bekanntlich jede symmetrische Function der sämmtlichen hier als endlich vorausgesetzten Wurzeln, folglich auch die oben eingeführten Functionen A und B durch die Coefficienten dieser Gleichung oder die Derivirten des Polynoms $f(z)$ für $z = 0$ ausdrücken. Es ist unsre nächste Aufgabe, diese Ausdrücke zu bilden. Um dieselben methodisch abzuleiten, stünden zwei Wege zu Gebote. Von den Definitionen (38) und (39) ausgehend, könnte man nämlich einerseits Recursionen (etwa die Gleichungen (47) und (48) des nachfolgenden Paragraphen) gewinnen, dadurch die gesuchten Ausdrücke als die Coefficienten einer *recurrenten* Reihe erkennen, und letztere summiren. Andererseits könnte man auch die symmetrischen Functionen in homogene (ganze rationale) Theile zergliedern, und die letzteren nach den Methoden von Waring, Gauss, Cauchy bestimmen, oder noch besser so, wie Borchardt und Betti angeben*), die erzeugenden Functionen derselben aufsuchen.

Wegen der Umständlichkeit dieser Herleitungen begnüge ich mich indessen, die Resultate einfach anzugeben und zu verificiren.

§ 8.

Herleitung verwandter Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ aus einer erzeugenden Function.

Wir definiren jetzt auf's Neue zwei Functionen von z durch folgende Gleichungen:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \left[\frac{(z-\varepsilon)^\lambda}{f(z-\varepsilon)}\right]_{\varepsilon^\omega}, \tag{41}$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \left[\frac{(z-\varepsilon)^\lambda f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)}\right]_{\varepsilon^\omega}, \tag{42}$$

wobei (nach Jacobi) das Symbol $[\Phi(\varepsilon)]_{\varepsilon^\omega}$ nichts Anderes, als den Coefficienten von ε^ω in der für hinreichend kleine ε zulässig vorausgesetzten Entwickelung der eingeklammerten Function $\Phi(\varepsilon)$ nach steigenden Potenzen von ε vorstellen soll, so dass also diese in der Parenthese stehende Function nach Laplace die erzeugende Function (fonction génératrice) des dergestalt definirten Entwickelungscoefficienten zu nennen wäre. Die beiden obigen Gleichungen sind — mit anderen Worten — äquivalent mit den nachstehenden:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^\omega \frac{(z-\varepsilon)^\lambda}{f(z-\varepsilon)}, \tag{43}$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^\omega \frac{(z-\varepsilon)^\lambda f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)}, \tag{44}$$

und wenn anders die Definitionen einen Sinn besitzen sollen, müssen für hinreichend kleine ε die Taylor'schen Reihen convergiren:

$$\frac{(z-\varepsilon)^\lambda}{f(z-\varepsilon)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \mathfrak{A}_\alpha^{(\lambda)}(z) \,.\, \varepsilon^\alpha, \tag{45}$$

$$\frac{(z-\varepsilon)^\lambda f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)} = \sum_{\alpha=0}^{\alpha=\infty} \mathfrak{B}_\alpha^{(\lambda)}(z) \,.\, \varepsilon^\alpha. \tag{46}$$

---

*) Crelle's Journal, Bd. 53, p. 193 und Bd. 54, p. 98 sq.

In der That sieht man leicht, dass diese Entwickelungen für hinreichend kleine ε stets zulässig sind, wenn nur z nicht gerade gleich einer Wurzel z_1 der Gleichung $f(z) = 0$ ist.

Wir wollen uns nun in diesem Paragraphen mit der recurrenten sowie der independenten Darstellung der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ mittelst der Function $f(z)$ und ihrer Derivirten beschäftigen. Dabei mögen Kürze halber wieder alle Argumente z weggelassen und die Derivirten von $f(z)$ wie in § 4. bezeichnet werden.

Multipliciren wir die Gleichungen (45) und (46) mit der stets zulässigen Entwickelung der ganzen rationalen Function $f(z-\varepsilon)$ nach steigenden Potenzen von ε und ordnen beiderseits nach Potenzen dieser Grösse an, so ergeben sich durch Gleichsetzung der Coefficienten von $(-\varepsilon)^\omega$ rechter und linker Hand die Formeln:

$$(47)\qquad (\lambda)_\omega\, z^{\lambda-\omega} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f_{\omega-a}}{(\omega-a)!}\,\mathfrak{A}_a^{(\lambda)},$$

$$(48)\qquad \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(\lambda)_a\, z^{\lambda-a} f_{\omega-a+1}}{(\omega-a)!} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f_{\omega-a}}{(\omega-a)!}\,\mathfrak{B}_a^{(\lambda)},$$

mittelst welcher die gesuchten Functionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ recurrirend berechnet werden können.

Ehe hierzu geschritten wird, mögen noch independente Darstellungen der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ angegeben werden. Solche erhält man leicht in Determinantenform, wenn man das System der Gleichungen hinschreibt, welche sich durch die Annahme $\omega = 0, 1, 2, 3, \ldots$ aus (47) oder (48) ergeben, und wenn man dieses System nach der Unbekannten $(-1)^\omega \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ oder $(-1)^\omega \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}$ auflöst.

Die Determinante des Systems erhält dabei den Werth $f^{\omega+1}$, indem sie gleich dem Product der Elemente ihrer Diagonalreihe wird, weil alle darüber stehenden Elemente 0 sind. Schreibt man diesen Nenner als Factor auf die andere Seite, so folgen die nachstehenden Formeln

$$(49)\quad f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)} = \left\| (\lambda)_c\, z^{\lambda-c},\ \frac{f_c}{c!},\ \frac{f_{c-1}}{(c-1)!},\ \ldots \frac{f_1}{1!},\ f,\ 0,\ 0,\ \ldots 0 \right\|,$$

$$(50)\quad f^{\omega+1}\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \left\| \sum_{a=0}^{a=c} \frac{(\lambda)_a z^{\lambda-a} f_{c-a+1}}{(c-a)!},\ \frac{f_c}{c!},\ \frac{f_{c-1}}{(c-1)!},\ \ldots \frac{f_1}{1!},\ f,\ 0,\ 0,\ \ldots 0 \right\|.$$

Von jeder Determinante, welche von der $\omega+1^{\text{ten}}$ Ordnung ist, habe ich hier nur die $c+1^{\text{te}}$ Zeile angeschrieben; alle Zeilen gehen daraus hervor, indem man $c = 0, 1, 2, \ldots \omega$ setzt, wobei selbstverständlich von den nebeneinander geschriebenen Elementen je nur die $\omega+1$ ersten zu nehmen sind.

Für den besonders wichtigen Fall $\lambda = 0$ vereinfacht sich in der zweiten Gleichung das erste Element der angeschriebenen Zeile zu: $\frac{f_{c+1}}{c!}$; in der ersten Gleichung jedoch lässt sich sogar die Ordnung der

Determinante um 1 erniedrigen, indem das Anfangselement $=1$ alle übrigen Elemente der ersten Colonne aber 0 werden, und in der so vereinfachten Determinante könnte man durch Multiplication der Zeilen nach der Reihe mit $1, f, f^2, f^3, \dots f^\omega$ und Division der Colonnen durch dieselben Grössen auch bewirken, dass an Stelle der Elemente f oberhalb der unverändert bleibenden Diagonalreihe jedesmal die Einheit tritt, während irgend ein andres Element $\frac{f_c}{c!}$ in $\frac{f^{c-1} f_c}{c!}$ überginge.

Es soll jetzt gezeigt werden, dass sich die Functionen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit dem Exponenten λ stets leicht durch diejenigen für $\lambda = 0$ ausdrücken lassen. Zu diesem Nachweis eignen sich am besten die bereits angegebenen Darstellungen (43) und (44) der genannten Functionen durch Differentialquotienten. Nach dem Leibnitz'schen Satze für die wiederholte Differentiation eines Productes folgt nämlich aus denselben:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)} = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{a=0}^{a=\omega} (\omega)_a \, \partial_\varepsilon^a \, (z-\varepsilon)^\lambda \times \partial_\varepsilon^{\omega-a} \frac{1}{f(z-\varepsilon)},$$

$$\mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{a=0}^{a=\omega} (\omega)_a \, \partial_\varepsilon^a \, (z-\varepsilon)^\lambda \times \partial_\varepsilon^{\omega-a} \frac{f^{(1)}(z-\varepsilon)}{f(z-\varepsilon)}.$$

Weil aber nach dem Binomialtheorem:

$$\lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^a \, (z-\varepsilon)^\lambda = (-1)^a \, a! \, (\lambda)_a \, z^{\lambda-a}$$

ist, so folgt hieraus unter Berücksichtigung jener für $\lambda = 0$ in Anspruch genommenen Gleichungen (43) und (44):

$$\text{(51)} \qquad \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} (-1)^a \, (\lambda)_a \, z^{\lambda-a} \, \mathfrak{A}_{\omega-a}^{(0)},$$

$$\text{(52)} \qquad \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} (-1)^a \, (\lambda)_a \, z^{\lambda-a} \, \mathfrak{B}_{\omega-a}^{(0)},$$

wie gefunden werden sollte.

Die Functionen $\mathfrak{B}^{(0)}$ lassen sich aber ebenfalls bequem durch die $\mathfrak{A}^{(0)}$ ausdrücken. Man hat nämlich in ähnlicher Weise:

$$\mathfrak{B}_\omega^{(0)} = \frac{1}{\omega!} \lim_{\varepsilon=0} \sum_{a=0}^{a=\omega} (\omega)_a \, \partial_\varepsilon^a \, f^{(1)}(z-\varepsilon) \times \partial_\varepsilon^{\omega-a} \frac{1}{f(z-\varepsilon)},$$

also, wegen:

$$\lim_{\varepsilon=0} \partial_\varepsilon^a \, f^{(1)}(z-\varepsilon) = (-1)^a f_{a+1}$$

wieder:

$$\text{(53)} \qquad \mathfrak{B}_\omega^{(0)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f_{a+1}}{a!} \, \mathfrak{A}_{\omega-a}^{(0)},$$

Ebenso könnte man noch allgemeiner die Formel aufstellen:

$$\text{(54)} \qquad \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)} = \sum_{c=0}^{c=\omega} (-1)^c \, \mathfrak{A}_{\omega-c}^{(0)} \sum_{a=0}^{a=c} \frac{(\lambda)_a \, z^{\lambda-a} f_{c-a+1}}{(c-a)!},$$

welche in einer Vereinigung von (52) und (53) besteht.

Es brauchen demnach nur die Functionen $\mathfrak{A}^{(0)}$ wirklich recurrirend berechnet zu werden, da alsdann die Functionen $\mathfrak{A}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{B}^{(\lambda)}$ mittelst der Gleichungen (51) und (54) leicht zu bilden sind.

Um diese Berechnung wirklich auszuführen, nehmen wir die Recursionsformel (47) für $\lambda = 0$ in Anspruch, wobei die linke Seite der Gleichung für $\omega > 0$ verschwindet, während sie für $\omega = 0$ den Werth 1 annimmt; die Gleichung zerfällt daher in zwei andere, welchen zur Vermeidung von Nennern die Gestalt zu geben ist:

$$(55)\qquad \begin{cases} f\mathfrak{A}_0^{(0)} = 1\,, \\ f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)} = \sum\limits_{a=1}^{a=\omega} \dfrac{(-1)^{a-1} f^{a-1} f_a}{a!} \cdot f^{\omega-a+1}\mathfrak{A}_{\omega-a}^{(0)}\,, \quad \text{für } \omega > 0\,, \end{cases}$$

in der sie nun für die Anwendung am bequemsten zurechtgelegt erscheinen.

Man wird sich jetzt eine Tabelle der Functionen $f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)}$ in folgender Weise anlegen.

Zuerst bildet man (für das Argument z) die Werthe von:

$$f,\ f_1,\ f_2,\ f_3,\ \ldots$$

welche zu der Kenntniss von:

$$f_1,\ -\tfrac{1}{2}ff_2,\ \tfrac{1}{6}f^2f_3,\ -\tfrac{1}{24}f^3f_4,\ \ldots$$

verhelfen. Hierauf verfährt man — stets horizontal ausmultiplicirend, dann vertical addirend — nach folgendem Schema, welches keiner weiteren Erklärung bedürftig ist:

$$\text{(I)}\qquad \begin{array}{r|l}
f\mathfrak{A}_0^{(0)} = 1 & \times f_1 \\ \hline
f^2\mathfrak{A}_1^{(0)} = f_1 & \times f_1 \\
1 & \times -\tfrac{1}{2}ff_2 \\ \hline
f^3\mathfrak{A}_2^{(0)} = f_1^2 - \tfrac{1}{2}ff_2 & \times f_1 \\
f_1 & \times -\tfrac{1}{2}ff_2 \\
1 & \times \tfrac{1}{6}f^2f_3 \\ \hline
f^4\mathfrak{A}_3^{(0)} = f_1^3 - ff_1f_2 + \tfrac{1}{6}f^2f_3 & \times f_1 \\
f_1^2 - \tfrac{1}{2}ff_2 & \times -\tfrac{1}{2}ff_2 \\
f_1 & \times \tfrac{1}{6}f^2f_3 \\
1 & \times -\tfrac{1}{24}f^3f_4 \\ \hline
\end{array}$$

$$f^5\mathfrak{A}_4^{(0)} = f_1^4 - \tfrac{3}{2}ff_1^2f_2 + \tfrac{1}{3}f^2f_1f_3 + \tfrac{1}{4}f^2f_2^2 - \tfrac{1}{24}f^3f_4$$

u. s. w.

Um ebenso die Functionen $\mathfrak{B}_\omega^{(0)}$ zu berechnen, bringen wir die Relation (53) ähnlich wie oben auf die bequemere Form:

$$(56)\qquad f^{\omega+1}\mathfrak{B}_\omega^{(0)} = \sum_{a=0}^{a=\omega} \frac{(-1)^a f^a f_{a+1}}{a!} \cdot f^{\omega-a+1}\mathfrak{A}_{\omega-a}^{(0)}\,.$$

Darnach haben wir also die eben gefundenen Ausdrücke der Functionen $f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)}$ nur mit den Multiplicatoren:

$$f_1\,,\quad -ff_2\,,\quad \tfrac{1}{2}f^2f_3\,,\quad -\tfrac{1}{6}f^3f_4\,,\ \dots$$

auf passende Art zu verbinden, und erhalten:

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} f\mathfrak{B}_0^{(0)} &= f_1\,,\\ f^2\mathfrak{B}_1^{(0)} &= f_1^2 - ff_2\,,\\ f^3\mathfrak{B}_2^{(0)} &= f_1^3 - \tfrac{3}{2}ff_1f_2 + \tfrac{1}{2}f^2f_3\,,\\ f^4\mathfrak{B}_3^{(0)} &= f_1^4 - 2ff_1^2f_2 + \tfrac{2}{3}f^2f_1f_3 + \tfrac{1}{2}f^2f_2^2 - \tfrac{1}{6}f^3f_4 \end{aligned}$$

u. s. w.

Ausser den bereits angeführten independenten Darstellungen der Functionen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in Determinantenform lassen sich auch noch folgende Ausdrücke ableiten, die ich mich aber begnügen will, hier nur kurz zu erwähnen. Es ist:

$$(57)\qquad f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)} = S\,\frac{(-1)^a(\omega-a)!}{a_1!\,a_2!\dots a_\omega!}\left(\frac{f}{0!}\right)^a\left(\frac{f_1}{1!}\right)^{a_1}\left(\frac{f_2}{2!}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{f_\omega}{\omega!}\right)^{a_\omega},$$

wo die Summe S ausgedehnt werden muss über alle positiven ganzen Wurzeln — die 0 mit zugelassen — der beiden coexistirenden Gleichungen:

$$(58)\qquad \begin{cases} a + a_1 + a_2 + \dots + a_\omega = \omega\,,\\ 0\,.\,a + 1\,.\,a_1 + 2\,.\,a_2 + \dots + \omega\,.\,a_\omega = \omega\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man das allgemeine Glied obiger Summe (57) mit $\frac{\omega}{\omega-a}$, so stellt dieselbe den Werth von $f^\omega\,\mathfrak{B}_{\omega-1}^{(0)}$ vor, also:

$$(59)\qquad f^\omega\,\mathfrak{B}_{\omega-1}^{(0)} = \omega\,S\,\frac{(-1)^a(\omega-a-1)!}{a_1!\,a_2!\dots a_\omega!}\left(\frac{f}{0!}\right)^a\left(\frac{f_1}{1!}\right)^{a_1}\left(\frac{f_2}{2!}\right)^{a_2}\cdots\left(\frac{f_\omega}{\omega!}\right)^{a_\omega}.$$

Es gelten auch die Gleichungen:

$$(60)\qquad \left\{\begin{aligned} f^{\omega+1}\mathfrak{A}_\omega^{(0)} &= \sum_{a=0}^{a=\omega}\frac{(-1)^a f^a}{a!}\lim_{\varepsilon=0}\partial_\varepsilon^{\omega-a}\left\{\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\right\}^a,\\ f^\omega\,\mathfrak{B}_{\omega-1}^{(0)} &= \omega\sum_{a=0}^{a=\omega}\frac{(-1)^a f^a}{a!\,(\omega-a)}\lim_{\varepsilon=0}\partial_\varepsilon^{\omega-a}\left\{\frac{f(z+\varepsilon)-f(z)}{\varepsilon}\right\}^a. \end{aligned}\right.$$

§ 9.

Zusammenhang zwischen den Functionen A und $\mathfrak{A}$.

Ich gehe jetzt dazu über nachzuweisen, dass die Functionen $A_\omega^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ der beiden vorigen Paragraphen für jedes Argument z einander gleich sind, wenn nur die Zahlen ω und λ eine gewisse Ungleichheitsbedingung erfüllen.

Bekanntlich hat man, wenn die Gleichung $f(z)=0$ keine vielfachen Wurzeln besitzt, die Partialbruchzerlegung:

$$(61)\qquad \frac{1}{f(z)} = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{(z-z_a)\, f^{(1)}(z_a)}\,.$$

Setzt man hierin $z - \varepsilon$ für z, so lässt sich das allgemeine Glied der Summe rechts für hinreichend kleine ε in eine Mac-Laurin'sche Reihe nach steigenden Potenzen dieser Grösse entwickeln, falls nur z nicht gerade einer Wurzel z_a gleich ist. Um links die erzeugende Function der $\mathfrak{A}$ zu bilden, multiplicire man hierauf die Gleichung mit der Entwicklung von $(z - \varepsilon)^\lambda$ in eine (unendliche) Reihe nach dem binomischen Satze, und ordne rechts nach Potenzen von ε an. Wird das Ergebniss alsdann mit Gleichung (45) verglichen, so folgt durch Gleichsetzung der Coefficienten von ε^ω:

$$(62)\qquad \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{(z-z_a)^{\omega+1} f^{(1)}(z_a)} \sum_{c=0}^{c=\omega} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} (z-z_a)^c\,,$$

womit die Function $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ ähnlich $A_\omega^{(\lambda)}$ als eine symmetrische Function der Wurzeln z_a der Gleichung $f(z) = 0$ dargestellt ist.

Wenn nun zuerst $\omega \geqq \lambda$ ist, so darf man offenbar in der letzten Summe rechter Hand anstatt der oberen Grenze ω auch λ schreiben, weil alsdann der Binomialcoefficient $(\lambda)_c$ für alle zwischen λ (exclus.) und ω (inclus.) liegenden Werthe von c verschwindet. Dann ist aber diese Summe nach dem Binomialtheorem $= \{z - (z - z_a)\}^\lambda = z_a^\lambda$, folglich wird mit Rücksicht auf die Definition (38) der Function A:

$$\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = A_\omega^{(\lambda)}(z)\,, \qquad \text{für } \omega \geqq \lambda\,,$$

was wir zunächst zu beweisen suchten.

Aber auch für $\omega < \lambda$ findet diese Beziehung noch statt, falls nur $\lambda < \omega + n$ ist. Für $\omega < \lambda$ können wir nämlich in dem Ausdrucke (62) von $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ die Summe:

$$\sum_{c=0}^{c=\omega}$$

zerlegen in:

$$\sum_{c=0}^{c=\lambda} - \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda}\,,$$

und liefert die Summe aller von dem ersten Theil dieser Zerlegung herrührenden Terme wie vorhin die Function $A_\omega^{(\lambda)}$, sodass:

$$A_\omega^{(\lambda)}(z) - \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} \sum_{a=1}^{a=n} \frac{(z-z_a)^{c-\omega-1}}{f^{(1)}(z_a)}\,.$$

Bekanntlich ist aber:

$$\sum_{a=1}^{a=n} \frac{\chi(z_a)}{f^{(1)}(z_a)} = 0\,,$$

wenn $\chi(z_a)$ eine ganze rationale Function von z_a vorstellt, deren Grad $n - 2$ nicht übersteigt. Als eine solche Function χ lässt sich aber in der obigen Doppelsumme der Zähler $(z - z_a)^{c-\omega-1}$ betrachten, wenn für jeden dort in Anspruch genommenen Werth von c:

$$0 \gtreqless c - \omega - 1 \leq n - 2$$

ist. Da der erste Theil dieser Ungleichung von selbst erfüllt und λ der grösste Werth ist, den c annimmt, so bleibt für das vollständige Verschwinden der ganzen Doppelsumme nur noch die Bedingung $\lambda - \omega \leq n - 1$, oder $\lambda - \omega < n$ übrig.

Unter der Voraussetzung, dass entweder $\omega \geq \lambda$, oder $\omega < \lambda < \omega + n$, stimmen also die beiden Functionen $\mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}$ und $A_\omega^{(\lambda)}$ vollständig überein, und da diese beiden Bedingungen auf eine einzige hinauslaufen, haben wir den Satz:

$$(63) \qquad A_\omega^{(\lambda)}(z) = \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z), \qquad \text{für } \lambda - \omega < n.$$

Wenn die beigeschriebene Bedingung nicht erfüllt ist, so tritt an Stelle dieses Theorems der obige Ausdruck für den Unterschied der beiden Functionen, welcher indess noch die folgende Vereinfachung zulässt:

$$(64) \qquad A_\omega^{(\lambda)}(z) - \mathfrak{A}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=\omega+n}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} \sum_{a=1}^{a=n} \frac{(z-z_a)^{c-\omega-1}}{f^{(1)}(z_a)},$$
$$\text{für } \lambda - \omega \gtreqless n,$$

indem alle Glieder der früheren Doppelsumme, bei welchen c zwischen $\omega + 1$ (inclus.) und $\omega + n$ (exclus.) liegt, aus dem schon erwähnten Grunde verschwinden.

Es wäre eine nicht uninteressante Aufgabe, auch die letztere symmetrische Function der Wurzeln noch durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ auszudrücken, wie dies im vorhergehenden Falle mit Rücksicht auf § 8. für die symmetrische Function $A_\omega^{(\lambda)}(z)$ nun erledigt ist.

§ 10.

Zusammenhang zwischen den Functionen B und $\mathfrak{B}$.

Leichter noch als bei den Functionen A und $\mathfrak{A}$ ist die Identität bei den Functionen B und $\mathfrak{B}$ zu erkennen unter der Bedingung, unter welcher sie stattfindet.

Zu dem Ende suchen wir wieder die erzeugende Function (der $\mathfrak{B}$) zu entwickeln in eine Reihe nach steigenden Potenzen von ε, deren Coefficienten ausgedrückt seien durch die Wurzeln und nicht durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$. Dazu verhilft abermals eine Partialbruchzerlegung. Es ist nämlich:

$$(65) \qquad \frac{f^{(1)}(z)}{f(z)} = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{z - z_a},$$

einerlei, ob die Gleichung $f(z) = 0$ vielfache Wurzeln habe, oder nicht.

Wird hierin $z - \varepsilon$ für z gesetzt, hierauf rechts nach steigenden Potenzen von ε entwickelt und die Gleichnng mit der Binomialentwicklung von $(z-\varepsilon)^\lambda$ multiplicirt, so ergiebt sich durch Coefficientenvergleichung mit (46) wie oben:

$$(66)\qquad \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{a=1}^{a=n} \frac{1}{(z-z_a)^{\omega+1}} \sum_{c=0}^{c=\omega} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} (z-z_a)^c \cdot$$

Ist nun $\omega \geqq \lambda$, so wird die letzte Summe $= z_a^\lambda$, indem sich λ statt ω als ihre obere Grenze schreiben lässt, und es wird also:

$$(67)\qquad B_\omega^{(\lambda)}(z) = \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z), \qquad \text{für } \lambda - \omega \leqq 0,$$

wie zunächst gezeigt werden sollte. Ist aber $\omega < \lambda$, so kann man in der vorausgehenden Gleichung die Zerlegung vornehmen:

$$\sum_{c=0}^{c=\omega} = \sum_{c=0}^{c=\lambda} - \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda},$$

und erweist sich die Summe aller vom ersten Theile herrührenden Glieder einerlei mit $B_\omega^{(\lambda)}(z)$, sodass man hat:

$$(68)\qquad B_\omega^{(\lambda)}(z) - \mathfrak{B}_\omega^{(\lambda)}(z) = \sum_{c=\omega+1}^{c=\lambda} (-1)^c (\lambda)_c z^{\lambda-c} \sum_{a=1}^{a=n} (z-z_a)^{c-\omega-1}, \qquad \text{für } \lambda - \omega > 0,$$

eine Doppelsumme, die im Allgemeinen von 0 verschieden ist, und leicht, statt durch die Wurzeln, durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ ausgedrückt werden könnte.

Die symmetrischen Functionen A und B, welche wir in § 7. als die bemerkenswerthesten Fälle der allgemeineren Function C hervorhoben und zum Gegenstand des Studiums machten, sind nun also durch die Coefficienten der Gleichung $f(z) = 0$ ausgedrückt, nämlich in Gestalt einfach gebauter Determinanten dargestellt, als deren Elemente das Polynom $f(z)$ und dessen Derivirte auftreten — allerdings nur unter der Voraussetzung, dass ω und λ den angegebenen Ungleichungen genügen, was beiläufig gesagt für $\omega = \infty$ stets der Fall ist. Unter jener Beschränkung also darf überall A für $\mathfrak{A}$ und B für $\mathfrak{B}$ geschrieben werden, [wie es auch von früher her gestattet ist, in allen Formeln des § 7., A oder B für C zu schreiben]. Noch verdient hervorgehoben zu werden, dass mehrere der für $\mathfrak{A}$ und A (wie für $\mathfrak{B}$ und B) nun auf 2 Wegen gewonnenen Relationen, z. B. die Relationen (36) des § 7. und (51), (52) des § 8. bei sonstiger Uebereinstimmung im Bau der Ausdrücke sich doch durch die obere Grenze am Summenzeichen unterscheiden, welche einmal λ, das andere Mal ω ist; selbstverständlich kann man von diesen beiden Zahlen eine jede, z. B. die kleinere, wählen, da die Glieder, um welche die eine Summe von der andern übertroffen wird, sich sämmtlich wegheben, sofern überhaupt die lateinischen Functionen mit den gothischen übereinstimmen.

§ 11.

Hieraus sich ergebende Auflösungsmethoden der zweiten Art.

Ich gehe jetzt zur Betrachtung der Auflösungsmethoden selbst über, welche sich für die höheren Gleichungen aus den Untersuchungen der §§ 7. bis 10. deduciren lassen, und deren wir, wie schon in § 1. hervorgehoben wurde, zwei Arten zu unterscheiden haben.

Eine Auflösungsmethode von der zweiten in § 1. charakterisirten Art fliesst zunächst aus dem Theorem (II) des § 7. Jenes Theorem sagt aus, dass, wenn:

$$F(z) = \frac{A_\omega^{(\lambda+h)}(z)}{A_\omega^{(\lambda)}(z)} \quad \text{oder aber } F(z) = \frac{B_\omega^{(\lambda+h)}(z)}{B_\omega^{(\lambda)}(z)}$$

gesetzt wird, stets:

$$\lim_{\omega=\infty} . \, F(z) = z_1{}^h$$

sein muss, falls z_1 eine Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ ist, welche dem willkührlich angenommenen Punkt z näher liegt als irgend eine andere der Wurzeln. Da in § 8. die Mittel angegeben sind, die Functionen A und B recurrirend für immer grössere ω zu berechnen, sowie auch, aus dem Polynom $f(z)$ und den Zahlen z, λ, h, ω sie independent zu bilden, so lässt sich in der That auf diesem Wege die h^{te} Potenz der Wurzel z_1 (oder wenn man will, unter der Annahme $h = 1$, diese Wurzel selbst) so genau man wünschen mag, ermitteln; und zwar ist diese Methode — eine doppelte, je nachdem man die Functionen A oder B wählt — wegen der Willkührlichkeit der genannten Zahlen unendlich vielfacher Anwendung fähig.

Als ganz speciellen Fall, nämlich wenn bei der Function A die Zahl $\lambda = 0$ und $h = 1$ gesetzt und der willkührliche Anfangswerth z gleich 0 oder gleich ∞ genommen wird, begreift die gegenwärtige Methode ein unlängst von Fürstenau*) veröffentlichtes und von ihm aus ganz andern Gesichtspunkten gewonnenes Auflösungsverfahren unter sich. Ebenso bildet dieselbe einerseits eine Erweiterung, andrerseits eine Specialisirung der Daniel Bernoulli'schen Methode.

Was den Anfangswerth z betrifft, so darf dieser, wenn man überhaupt nur eine — und nicht eine bestimmte — Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ nach den angegebenen Methoden finden will, in der ganzen Zahlenebene beliebig gewählt werden mit Ausnahme einer gewissen Linie, der *Ausnahmelinie*, welche aus lauter stetig unter einander verbundenen Strecken, Strahlen und Geraden besteht. Wird mit m die Anzahl der von einander verschiedenen Wurzeln bezeichnet, welche

---

*) Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten, Marburg 1860.

natürlich bei Anwendung der Functionen A gleich n gedacht werden muss, da vielfache Wurzeln dann ausgeschlossen bleiben, so zerlegt die Ausnahmelinie die ganze Ebene in m verschiedene Gebiete, deren jedes nur eine einzige einfache oder vielfache Wurzel in sich enthält. Jedes dieser Gebiete ist so beschaffen, dass für alle innerhalb desselben angenommenen Punkte z unsre Auflösungsmethode eben die eine innerhalb desselben liegende Wurzel liefert; es kann daher das zu der Wurzel gehörige *Convergenzgebiet* der Auflösungsmethode genannt werden. Die m verschiedenen Convergenzgebiete also grenzt die Ausnahmelinie von einander ab. Die Begrenzung jedes Convergenzgebietes ist eine polygonale, und zwar ein nach dem Unendlichen hin offenes Polygon, wenn die betreffende Wurzel, nachdem sämmtliche Wurzelpunkte durch gerade Linien mit einander verbunden sind, eine Ecke des umschliessenden Vielecks bildet; im andern Fall ist sie ein endliches geschlossenes Polygon. Die Seiten dieser Polygone gehen stets senkrecht durch die Mitte der Verbindungslinie zweier Wurzelpunkte hindurch, und die Ecken derselben, in welchen stets mindestens 3 Polygone aneinanderstossen, also die Ausnahmelinie sich verknotet, sind die Mittelpunkte derjenigen durch mindestens 3 Wurzelpunkte gelegten Kreise, welche keinen andern Wurzelpunkt einschliessen. Alles dieses folgt leicht aus der Forderung, dass der Punkt z, wenn er nicht ein Ausnahmepunkt sein soll, nur nicht etwa gerade von den zunächst liegenden Wurzelpunkten gleich weit abstehen darf. Es ist demnach keiner Schwierigkeit unterworfen, die Ausnahmelinie zu construiren, wenn die Wurzelpunkte gegeben sind:

Man construirt zuerst die $\frac{m(m-1)}{2}$ Geraden, welche senkrecht durch die Mitte der Verbindungslinie zweier Wurzelpunkte hindurchgehen und allein Ausnahmepunkte enthalten können, jedoch bei weitem nicht alle und in ihrer ganzen Erstreckung zur Ausnahmelinie gehören. Ein Punkt auf einer solchen Normalen, zu welcher zwei Wurzelpunkte symmetrisch liegen, ist nämlich nur so lange Ausnahmepunkt, als er keinem dritten Wurzelpunkt näher liegt, als jenen beiden. Diese Geraden schneiden sich zu drei und drei in $\frac{m(m-1)(m-2)}{6}$ Punkten, den Mittelpunkten der durch je 3 Wurzelpunkte gelegten Kreise. Von den genannten Mittelpunkten sind nun alle diejenigen auszuscheiden, deren zugehöriger Kreis noch Wurzelpunkte einschliesst; die übrigen Mittelpunkte sind längs der $\frac{m(m-1)}{2}$ Geraden mit einander zu verbinden; endlich sind von den äussersten dieser Mittelpunkte aus senkrecht zu den Seiten des umschliessenden Vielecks der Wurzelpunkte (also ebenfalls längs der gedachten Geraden) noch Strahlen nach dem Unendlichen hin zu ziehen. Die erwähnten Verbindungslinien und Strahlen bilden die Ausnahmelinie.

Sind die Wurzelpunkte nicht gegeben, so bleibt auch die Ausnahmelinie unbekannt; nimmt man aber in diesem Falle den Anfangswerth z auf's Geradewohl an, so ist die Wahrscheinlichkeit auf einen Ausnahmepunkt zu verfallen gleich 0. Hat allerdings die Gleichung $f(z) = 0$ lauter reelle Coefficienten, also conjugirt imaginäre Wurzeln, so darf man selbstverständlich z nicht etwa auf der Linie der reellen Zahlen wählen, wenn man eine der complexen Wurzeln finden will; in der That ist in diesem Falle a priori ersichtlich, dass man durch fortgesetzte rationale Verbindung von lauter reellen Zahlen unter sich niemals zu einem imaginären Ergebniss gelangen könnte.

Nimmt man für z einen Punkt auf der Ausnahmelinie, so nähert sich $F(z)$ bei wachsendem ω im Allgemeinen keiner bestimmten Grenze, obwohl es endlich bleibt.

§ 12.

Hieraus hervorgehende Algorithmen.

Auflösungsmethoden von der ersten in § 1. charakterisirten Art, nämlich Algorithmen, gehen aus den Theoremen (I) und (III) des § 7. hervor, wenn man dort $h = 1$ annimmt.

Setzt man nämlich:

$$(69) \qquad F(z) = \frac{A_\omega^{(\lambda+1)}(z)}{A_\omega^{(\lambda)}(z)}, \quad \text{oder aber } F(z) = \frac{B_\omega^{(\lambda+1)}(z)}{B_\omega^{(\lambda)}(z)},$$

so wurde dort gezeigt, dass die Function F die Eigenschaft besitzt, dass erstens $F(z_1) = z_1$ und zweitens die Derivirten:

$$\partial_z F(z), \quad \partial_z^2 F(z), \ldots \partial_z^\omega F(z)$$

für $z = z_1$ gleich 0 werden. Auf Grund dieser Eigenschaften muss also, wenn $\omega > 0$ ist, nach den Ergebnissen des § 2. die Gleichung:

$$z' = F(z)$$

einen *Algorithmus der* $\omega + 1^{\text{ten}}$ *Ordnung* vorstellen, durch welchen es möglich ist, aus einem beliebig, nur hinreichend nahe an z_1 gewählten Anfangswerthe z jede Wurzel z_1 der Gleichung $f(z) = 0$ so genau man will zu finden; und zwar in der Weise, dass der Modul jedes Näherungswerthes schliesslich stets auf $\omega + 1$ mal so viel Decimalstellen genau gefunden wird als auf wie viele genau der Modul des vorhergehenden Näherungswerthes bekannt war.

Wegen der Unbestimmtheit der natürlichen Zahlen ω und λ, sowie der Willkührlichkeit des Anfangswerthes z schliesst auch diese Methode unendlich viele Algorithmen in sich, und es verlohnt der Mühe, dieselben für die einfachsten Werthe von ω und λ wirklich anzuschreiben.

Jeden dieser Algorithmen will ich nach dem die Function F charakterisirenden Nenner in (69) mit (A_ω^λ) resp. (B_ω^λ) bezeichnen.

In Erinnerung werde noch gebracht, dass bei den Algorithmen (A_ω^λ) vielfache Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ ausgeschlossen sein müssen, wofern sie wirklich von $\omega + 1$facher Convergenz sein sollen; bei den Algorithmen (B_ω^λ) hingegen wird durch die Vielfachheit der Wurzeln kein Unterschied hinsichtlich des Grades der Convergenzgeschwindigkeit begründet.

Endlich muss bei den Functionen A, wofern sie wirklich durch die anzugebenden Ausdrücke darstellbar sein sollen, die Ungleichung $\lambda - \omega < n$, bei den Functionen B hingegen die Ungleichung $\lambda - \omega \overline{\gtrless} 0$ erfüllt sein.

Mit Rücksicht auf die Gleichung (37) in dem Theorem (IV) des § 7. lassen sich unsre Algorithmen nun so darstellen:

$$\left.\begin{array}{ll}(A_\omega^\lambda) & z' = z - \dfrac{A_{\omega-1}^{(\lambda)}(z)}{A_\omega^{(\lambda)}(z)} = z - f \cdot \dfrac{f^\omega A_{\omega-1}^{(\lambda)}}{f^{\omega+1} A_\omega^{(\lambda)}} \\ (B_\omega^\lambda) & z' = z - \dfrac{B_{\omega-1}^{(\lambda)}(z)}{B_\omega^{(\lambda)}(z)} = z - f \cdot \dfrac{f^\omega B_{\omega-1}^{(\lambda)}}{f^{\omega+1} B_\omega^{(\lambda)}}\end{array}\right\} \text{für } \omega > 0,$$

worin das zweite Glied rechter Hand als die *Correction* aufgefasst werden kann, welche nach dem Algorithmus zu dem Anfangswerthe hinzugefügt werden muss, um den nächsten Näherungswerth zu bilden (und welche mit dem in § 2. erwähnten *Fehler* des Anfangs- oder Näherungswerthes nicht zu verwechseln ist).

In diese Gleichungen sind nun die Werthe der Functionen A und B einzusetzen, welche in (36) des § 7. und (51), (52) des § 8. zunächst durch die Functionen $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ ausgedrückt werden. Zu dem Ende schreiben wir mit Vermeidung der Brüche jene Relationen in folgender Gestalt an:

$$(70) \qquad \left\{\begin{array}{l} f^{\omega+1} A_\omega^{(\lambda)} = \sum\limits_{a=0}^{\lambda,\,\omega} (-1)^a (\lambda)_a z^{\lambda-a} f^a \,.\, f^{\omega-a+1} A_{\omega-a}^{(0)}, \\ f^{\omega+1} B_\omega^{(\lambda)} = \sum\limits_{a=0}^{\lambda,\,\omega} (-1)^a (\lambda)_a z^{\lambda-a} f^a \,.\, f^{\omega-a+1} B_{\omega-a}^{(0)}, \end{array}\right.$$

worin von den beiden angegebenen oberen Summengrenzen λ, ω stets die kleinere gewählt werden darf. Demnach hat man nun für $\omega = 0$, $1, 2, \ldots$:

$$f\, A_0^{(\lambda)} = z^\lambda \,.\, f\, A_0^{(0)},$$

$$f^2 A_1^{(\lambda)} = z^\lambda \,.\, f^2 A_1^{(0)} - \lambda z^{\lambda-1} f \,.\, f\, A_0^{(0)},$$

$$f^3 A_2^{(\lambda)} = z^\lambda \,.\, f^3 A_2^{(0)} - \lambda z^{\lambda-1} f \,.\, f^2 A_1^{(0)} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} z^{\lambda-2} f^2 \,.\, f A_0^{(0)},$$

u. s. w.,

und, da für $\lambda = 0$ nur eine Identität herauskommt, für $\lambda = 1, 2, \ldots$:

$$f^{\omega+1} A_\omega^{(1)} = z \cdot f^{\omega+1} A_\omega^{(0)} - f \,.\, f^\omega A_{\omega-1}^{(0)},$$
$$f^{\omega+1} A_\omega^{(2)} = z^2 \cdot f^{\omega+1} A_\omega^{(0)} - 2 z f \,.\, f^\omega A_{\omega-1}^{(0)} + f^2 \,.\, f^{\omega-1} A_{\omega-2}^{(0)},$$

u. s. w.; die entsprechenden Gleichungen für die Functionen B lauten ebenso; man erhält sie einfach, indem man hier B statt A schreibt.

Da wir $A_\omega^{(0)}$ resp. $B_\omega^{(0)}$ allgemein nicht in einfacher Weise auszurechnen vermögen, so erhalten wir nur aus den ersteren Gleichungen, in welchen λ willkührlich gelassen ist, durch Einsetzung der Functionen $A^{(0)}$ und $B^{(0)}$ aus (I) und (II) des § 8., einfache Formeln von allgemeinem Charakter und hinreichend leichter Berechenbarkeit, und zwar:

$$f\ A_0^{(\lambda)} = z^\lambda,$$
$$f^2\, A_1^{(\lambda)} = z^\lambda f_1 - \lambda z^{\lambda-1} f,$$
$$f^3\, A_2^{(\lambda)} = z^\lambda (f_1^2 - \tfrac{1}{2} f f_2) - \lambda z^{\lambda-1} f f_1 + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} z^{\lambda-2} f^2,$$

u. s. w. ferner:

$$f\ B_0^{(\lambda)} = z^\lambda f_1,$$
$$f^2\, B_1^{(\lambda)} = z^\lambda (f_1^2 - f f_2) - \lambda z^{\lambda-1} f f_1,$$

u. s. w., wonach es leicht wäre, eine Tabelle der Functionen $A_\omega^{(\lambda)}$ oder $B_\omega^{(\lambda)}$ mit doppeltem Eingange anzulegen.

Nun endlich können wir mit der grössten Bequemlichkeit zu der Aufstellung der einfachsten Algorithmen selbst schreiten.

Wollte man zuerst $\omega = 0$ annehmen, so würde sich, wenn hier nicht ein Degenerationsfall vorläge, als Algorithmus von linearer Convergenz ergeben:

(A_0^λ) desgl. (B_0^λ) $\qquad z' = z.$

Da hier die Correction gleich 0, der Fehler des Näherungswerthes also der ersten Potenz des Fehlers beim Anfangswerthe nicht allein proportional, sondern sogar gleich ist, so würde das Attribut „linear" wohl noch passen, allein die Benennung „Algorithmus" trifft nicht mehr zu, weil $\partial_z F(z)$ nicht < 1 sondern $= 1$ ist.

Für $\omega = 1$ erhalten wir den allgemeinsten Algorithmus zweiter Ordnung oder von quadratischer Convergenz, welcher überhaupt aus dieser Quelle fliessen kann, nämlich:

(A_1^λ) $$z' = z - \frac{z f}{z f_1 - \lambda f},$$

(B_1^λ) $$z' = z - \frac{z f f_1}{z(f_1^2 - f f_2) - \lambda f f_1},$$

und als einfachsten Fall für $\lambda = 0$ einerseits den Newton'schen Algorithmus:

(A_1^0) $$z' = z - \frac{f}{f_1},$$

andrerseits den ihm ebenbürtigen, meines Wissens noch nicht beachteten Algorithmus:

(B_1^0) $$z' = z - \frac{ff_1}{f_1^2 - ff_2},$$

welcher bei fast gleicher Einfachheit den Vorzug besitzt auch für vielfache Wurzeln noch quadratisch zu convergiren, und dessen wir schon in § 3. Erwähnung gethan haben.

Für $\omega = 2$ ergeben sich die allgemeinen Algorithmen dritter Ordnung oder von cubischer Convergenz, z. B.:

(A_2^λ) $$z' = z - zf\frac{zf_1 - \lambda f}{z^2(f_1^2 - \frac{1}{2}ff_2) - \lambda zff_1 + \frac{\lambda(\lambda - 1)}{2}f^2},$$

und als einfachste Fälle für $\lambda = 0$:

(A_2^0) $$z' = z - \frac{ff_1}{f_1^2 - \frac{1}{2}ff_2},$$

(B_2^0) $$z' = z - f\frac{f_1^2 - ff_2}{f_1^3 - \frac{3}{2}ff_1f_2 + \frac{1}{2}f^2f_3},$$

wovon der erstere (A_2^0) auffallend ist durch seine Aehnlichkeit mit (B_1^0), von welchem er sich nur durch den Factor $\frac{1}{2}$ im Nenner unterscheidet.

In dieser Weise nun könnte man leicht fortfahren, und auch die Algorithmen von biquadratischer und höherer Convergenz aufstellen; jedoch empfiehlt sich dieses darum nicht weiter, weil für praktische Zwecke der Vortheil der rascheren Convergenz durch den Nachtheil einer viel grösseren Complication der zu berechnenden Ausdrücke mehr als aufgewogen wird.

Beispielsweise ergeben sich für die binomische oder reine Gleichung n^{ten} Grades:

$$f(z) = z^n - \gamma = 0$$

die zur Ausziehung einer Quadrat-, Cubik- oder n^{ten} Wurzel aus einer Zahl γ sehr brauchbaren Algorithmen:

(A_1^λ) $$z' = z \cdot \frac{(n - \lambda - 1)z^n + (\lambda + 1)\gamma}{(n - \lambda)z^n + \lambda\gamma}, \qquad \lambda < n + 1,$$

(B_1^λ) $$z' = z \cdot \frac{(n + \lambda)\gamma - \lambda z^n}{(n + \lambda - 1)\gamma - (\lambda - 1)z^n}, \qquad \lambda < 2;$$

hier sind die beiden Algorithmen B unter den $n + 1$ Algorithmen A mit enthalten, nämlich (B_1^0) identisch mit (A_1^{n-1}) und (B_1^1) identisch mit (A_1^n).

Will man etwa eine Quadratwurzel aus einer reellen Zahl auf sehr viele Decimalen, z. B. 24 Stellen, ermitteln, so empfiehlt es sich in der That, nachdem man durch die Methode des gewöhnlichen Wurzelausziehens mit abgekürzter Division einen sehr guten Näherungswerth (auf 12 Decimalen genau) gefunden, den nächstfolgenden sogleich auf 24 Decimalen genauen Werth mittelst eines dieser Algorithmen aufzusuchen. Ein Vorzug dieses Verfahrens besteht noch darin, dass man bei demselben eine endliche Anzahl beliebiger Rechenfehler machen darf (wenn man nur durch dieselben nicht aus dem Convergenzgebiet hinausgeräth), und dabei doch früher oder später den richtigen Endwerth findet; auch hat man stets einen zuverlässigen Maassstab für die bereits erzielte Genauigkeit; sie ist auf doppelt so viele Decimalen erreicht, als auf wie viele der letzte Näherungswerth mit dem vorletzten übereinstimmt.

Interessant wäre noch die Beantwortung der Frage, welcher Werth von λ sich für eine bestimmte Wurzelausziehung am vorzüglichsten eignet, d. h. die rascheste Convergenz gewährt.

Man könnte auch verschiedene Algorithmen vielleicht vortheilhaft combiniren, z. B. den aus dem Algorithmus $(A_1{}^0)$ sich ergebenden ersten Näherungswerth in den Ausdruck von $(A_1{}^1)$ für z substituiren, um den zweiten Näherungswerth zu finden; alsdann diesen in den Ausdruck von $(A_1{}^2)$ und den so sich ergebenden dritten Näherungswerth in denjenigen von $(A_1{}^3)$, u. s. f., sodass man anstatt einer Iteration oder wiederholten Ausführung gleichartiger Substitutionen nun eine gesetzmässige Reihe verschiedenartiger Substitutionen zu vollziehen hätte, um sich der gesuchten Wurzel zu nähern.

Endlich wäre es der Mühe werth zu untersuchen, welcher Grenze die Algorithmen zustreben, wenn λ eine andere als eine ganze positive Zahl ist.

§ 13.

Einiges über das Convergenzgebiet dieser Algorithmen.

Es bleibt die Aufgabe übrig, die Convergenzgebiete der zuletzt angegebenen Auflösungsmethoden zu ermitteln, d. h. ihre Grenzlinien, wenigstens wenn die Wurzeln der Gleichung $f(z) = 0$ gegeben sind, zu bestimmen. So leicht diese Aufgabe für die Auflösungsmethoden der zweiten Art in § 11. gelöst werden konnte, so schwierig erscheint dies bei den Auflösungsmethoden der ersten Art oder den im vorigen Paragraphen aufgestellten Algorithmen. Die Beantwortung dieser Frage nach den Contouren der Convergenzbezirke ist mir nur bei den beiden einfachsten Algorithmen in den einfachsten Fällen, nämlich für die linearen oder überhaupt einwurzeligen und für die quadratischen Gleichungen bis jetzt gelungen.

In dem Falle $\lambda = 0$ kann das nachstehende Theorem zur Erleichterung der Aufgabe dienen.

Die Contouren der Convergenzbezirke der Algorithmen $(A_\omega{}^0)$ *oder* $(B_\omega{}^0)$

hängen lediglich ab von der gegenseitigen (relativen) Lage der m von einander verschiedenen Wurzelpunkte $z_1, z_2, \ldots, z_m$, keineswegs aber von der Lage dieses Punktesystems gegen die Punkte 0 *und* 1, *überhaupt gegen die Axen der reellen und der imaginären Zahlen.* Mit andern Worten: *Ersetzt man das System der Wurzelpunkte durch ein anderes, ihm ähnliches von beliebiger Lage, so werden auch die neuen Convergenzbezirkcontouren den alten ähnlich und sind zu den neuen Wurzelpunkten ähnlich gelegen.*

Beweis. Man denke sich zwei Zahlenebenen, in der ersten die Wurzeln $z_1, z_2, \ldots z_m$ der Gleichung $f(z) = 0$ als Punkte verzeichnet, in der zweiten die in der nämlichen Anzahl vorhandenen Wurzeln $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_m$ einer andern Gleichung $\varphi(\zeta) = 0$. Sei ausserdem z in der ersten, ebenso ζ in der zweiten Ebene ein beliebiger Anfangswerth, und:

$$z' = z - \frac{C^{(0)}_{\omega-1}(z)}{C^{(0)}_{\omega}(z)},$$

wo C gebildet ist für die Function f, desgleichen:

$$\zeta' = \zeta - \frac{C^{(0)}_{\omega-1}(\zeta)}{C^{(0)}_{\omega}(\zeta)},$$

wo C gebildet ist für die Function φ, der zugehörige erste Näherungswerth, welchen unser Algorithmus liefert, wenn unter C wie früher entweder die Function A oder die B verstanden wird. Setzen wir dann zwischen z und ζ die Relation fest:

$$\zeta = \mu z + \nu,$$

und nehmen auch an, dass:

$$\zeta_a = \mu z_a + \nu \quad \text{für } a = 1, 2, 3, \ldots m$$

sei, so ist leicht einzusehen, dass das System der Punkte ζ, ζ_a in der zweiten Ebene, wenn μ und ν beliebige complexe Zahlen bedeuten, *ähnlich* ist dem System der Punkte z, z_a in der ersten Ebene, dass jedoch das erstgenannte System gegen die Axen der reellen und der imaginären Zahlen eine beliebig geänderte Lage besitzt. Denn ist $\mu = \varrho e^{i\vartheta}$, so bewirkt die Multiplication der Zahlen z mit ϱ eine Verwandlung des betreffenden Punktesystems in ein anderes ihm ähnliches und ähnlich zu den Axen liegendes, dessen homologe Dimensionen alle ϱmal so gross sind als im ersteren; die Multiplication mit $e^{i\vartheta}$ bewirkt eine gemeinsame Drehung des Punktesystems über den beliebigen Winkel ϑ; und endlich die Addition von ν zu dem Product $\mu z = \varrho e^{i\vartheta} z$ entspricht einer parallelen Verschiebung des ganzen Systems in der Richtung und über die Länge des Moduls der Zahl ν.

Der Beweis unseres Satzes ist nun geführt, wenn gezeigt ist, dass auch die Näherungswerthe z' und ζ' als homologe Punkte den beiden ähnlichen Punktesystemen angehören, da sich dieser Schluss alsdann leicht auf alle folgenden und vorausgehenden Näherungswerthe bis an die Grenzen der Convergenzgebiete hin ausdehnen lässt.

Nun ist aber diejenige Gleichung, deren Wurzeln $\zeta_a = \mu z_a + \nu$ sind, offenbar:

$$\varphi(\zeta) = f\left(\frac{\zeta - \nu}{\mu}\right) = 0,$$

und muss demnach:

$$\varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{\mu} f^{(1)}\left(\frac{\zeta - \nu}{\mu}\right), \text{ überhaupt } \varphi^{(c)}(\zeta) = \frac{1}{\mu^c} f^{(c)}\left(\frac{\zeta - \nu}{\mu}\right)$$

für jede natürliche Zahl c sein, oder wegen $\frac{\zeta - \nu}{\mu} = z$:

$$\varphi(\zeta) = f(z), \quad \varphi^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{\mu} f^{(1)}(z), \ldots \varphi^{(c)}(\zeta) = \frac{1}{\mu^c} f^{(c)}(z).$$

Da ferner nach Gleichung (57) des § 8. in allen Gliedern der Function $f^{\omega+1} A_\omega^{(0)}$ desgleichen der Function $f^\omega B_{\omega-1}^{(0)}$ die Summe der mit den Exponenten multiplicirten Derivationsindices von f die nämliche und zwar $= \omega$ ist, so erweisen sich die beiden genannten durchweg für die Function φ gebildeten Ausdrücke:

$$\varphi(\zeta)^{\omega+1} A_\omega^{(0)}(\zeta) \text{ resp. } \varphi(\zeta)^\omega B_{\omega-1}^{(0)}(\zeta)$$

gleich den entsprechenden für die Function f gebildeten Ausdrücken:

$$f(z)^{\omega+1} A_\omega^{(0)}(z) \text{ resp. } f(z)^\omega B_{\omega-1}^{(0)}(z)$$

behaftet mit dem Factor $\frac{1}{\mu^\omega}$. Aus der letzten der beiden Gleichungen:

$$z' = z - f(z) \cdot \frac{f(z)^\omega\, C_{\omega-1}^{(0)}(z)}{f(z)^{\omega+1}\, C_\omega^{(0)}(z)}, \quad [\text{wo } C \text{ gebildet für } f],$$

$$\zeta' = \zeta - \varphi(\zeta) \cdot \frac{\varphi(\zeta)^\omega\, C_{\omega-1}^{(0)}(\zeta)}{\varphi(\zeta)^{\omega+1}\, C_\omega^{(0)}(\zeta)}, \quad [\text{wo } C \text{ gebildet für } \varphi],$$

folgt daher:

$$\zeta' = \mu z + \nu - \mu \cdot f(z) \cdot \frac{f(z)^\omega\, C_{\omega-1}^{(0)}(z)}{f(z)^{\omega+1}\, C_\omega^{(0)}(z)}, \quad [\text{wo } C \text{ gebildet für } f],$$

also mit Rücksicht auf die erste Gleichung:

$$\zeta' = \mu z' + \nu,$$

wie gezeigt werden sollte.

Da also die Contouren der Convergenzbezirke in den ähnlichen Systemen der z und der ζ in der That ähnliche Curven mit der gleichen Verhältnisszahl ϱ für die homologen Dimensionen sein müssen, welche gegen das Punktesystem eine ähnliche Lage haben, so wird man, wenn es sich um das Studium jener Contouren handelt, dasselbe ebenso gut in dem System der ζ als in dem der z vornehmen können. Darnach kann man beispielsweise unbeschadet der Allgemeinheit zwei Wurzeln der zu discutirenden Gleichung ganz beliebig, etwa die eine

$= 0$ und die andere $= 1$ annehmen, indem es ja nur auf die relative Lage der Wurzeln ankommt; man kann auch sämmtliche Wurzeln untereinander und dem Nullpunkte beliebig nahe annehmen, da sich die Verhältnisszahl ϱ beliebig klein denken lässt, u. s. w.

Hieraus fliesst noch beiläufig die wichtige Folgerung, dass die Ausschliessung einer Wurzel 0 der Gleichung $f(z) = 0$, welche bei vielen unserer Sätze erforderlich war, doch für die Endresultate bei den Algorithmen (A^0_ω) und (B^0_ω) irrelevant ist.

Für die Algorithmen (A^λ_ω) oder (B^λ_ω), für die $\lambda > 0$ ist, gilt das obige Theorem nicht; versucht man hier dieselbe Betrachtung durchzuführen, wie sie zum Beweise des Theorems nöthig war, so zeigt sich leicht, dass man die Zahl ν gleich 0 nehmen muss, wenn der neue Näherungswerth ein homologer Punkt des dem alten System ähnlichen Punktesystems sein soll. Man darf also wieder die zu Grunde gelegte Masseinheit verändern, d. h. das System der Wurzelpunkte durch ein anderes ihm ähnliches und ähnlich gegen die Axen gelegenes ersetzen, man darf das System auch um den Nullpunkt herum über einen beliebigen Winkel drehen — nur darf man es nicht parallel mit sich verschieben, das heisst es gilt der Satz:

Bei den Algorithmen (A^λ_ω) und (B^λ_ω) ist die relative Lage der Convergenzbezirkcontouren gegen die Wurzelpunkte nur abhängig von der Distanz des Schwerpunktes sämmtlicher Wurzelpunkte (des Mittelpunktes ihrer mittleren Entfernungen) und des Nullpunktes, in ihrem Verhältniss zu den gegenseitigen Distanzen dieser Wurzelpunkte; im Uebrigen aber unabhängig von der absoluten Lage dieser Wurzelpunkte und von der zu Grunde gelegten Einheit.

Soviel über die Convergenzgebiete im Allgemeinen.

§ 14.
Einfachste Beispiele zu den Haupt-Algorithmen.

Um in die Natur der Algorithmen einen näheren Einblick zu gewinnen, wollen wir jetzt die beiden vorzüglichsten:

$$(A_1{}^0) \quad z' = z - \frac{f}{f_1}, \text{ und } (B_1{}^0) \quad z' = z - \frac{ff_1}{f_1{}^2 - ff_2}$$

für ein einfaches Beispiel hinschreiben und für den praktischen Gebrauch zurecht legen.

Der allereinfachste Fall, nämlich der, wo die Gleichung $f(z) = 0$ nur *eine* Wurzel hat, also entweder vom ersten Grade ist oder als Polynom eine Potenz eines Binoms besitzt, wird sofort durch die Bemerkung erledigt, dass man nach dem Vorausgehenden ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit diese Wurzel $z_1 = 0$ setzen, also

$$f(z) = z^n$$

annehmen kann; dann wird:

$$(A_1{}^0) \qquad z' = \left(1 - \frac{1}{n}\right) z, \qquad \text{und} \qquad (B_1{}^0) \quad z' = 0.$$

Der Algorithmus $(B_1{}^0)$ liefert also sofort die richtige Wurzel (0) der Gleichung. Für den Algorithmus $(A_1{}^0)$ aber ergiebt sich leicht:

$$z'' = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 z \quad , \quad \ldots \quad z^{(r)} = \left(\quad - \frac{1}{n}\right)^r z,$$

woraus folgt:

$$\lim_{r = \infty} . \, z^{(r)} = 0,$$

welches auch der Anfangswerth z gewesen sein möge. Es gilt also der Satz: *Für eine einwurzelige Gleichung ist das Convergenzgebiet der beiden Algorithmen $(A_1{}^0)$ und $(B_1{}^0)$ die ganze Zahlenebene;* es giebt gar keine im Endlichen liegende Ausnahmepunkte.

Der nächst einfache Fall ist der einer quadratischen Gleichung. Sind die beiden Wurzeln derselben einander gleich, so ist der Fall im vorigen schon enthalten und bereits absolvirt; wir können also diese Wurzeln als von einander verschieden annehmen, und zwar empfiehlt es sich der dadurch zu erzielenden Symmetrie wegen, die eine Wurzel $z_1 = +1$, die andere $z_2 = -1$ zu wählen, was man, wie schon erwähnt, thun kann, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen. Alsdann ist:

$$f(z) = (z - 1)(z + 1) = z^2 - 1,$$

und lauten die Algorithmen:

$$(A_1{}^0) \quad z' = \frac{1 + z^2}{2z} = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}, \quad (B_1{}^0) \quad z' = \frac{2z}{1 + z^2} = \frac{2}{z + \frac{1}{z}},$$

sodass, wie man sieht, der Näherungswerth bei dem einen Algorithmus stets der reciproke Werth von demjenigen bei dem andern Algorithmus für denselben Anfangswerth ist.

Will man nun aber für irgend einen complexen Anfangswerth $z = x + iy$ den Näherungswerth $z' = x' + iy'$ wirklich berechnen, so muss man den *complexen* Algorithmus in *zwei combinirte reelle* Algorithmen zerfällen. Dieses hat überhaupt bei jedem Algorithmus $z' = F(z)$ zu geschehen, wenn man denselben wirklich anwenden will, und nicht etwa gerade die Coefficienten und die Wurzeln der Gleichung nebst dem Anfangswerth sämmtlich reell sind. Die gedachte Zerlegung des Algorithmus, welche sich durch Sonderung und Vergleichung der reellen und der imaginären Theile auf beiden Seiten der Gleichung $z' = F(z)$ ergiebt, wäre leicht für jeden unserer Algorithmen allgemein ausgeführt hinzuzuschreiben, nachdem man die Coefficienten $\gamma_0, \gamma_1, \ldots \gamma_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ in der Form

$$\gamma_\alpha = \alpha_\alpha + i\beta_\alpha \quad (\text{für } \alpha = 0, 1, 2, \ldots n)$$

angenommen hätte.

Für unser Beispiel nun wird:

$$(A_1^0) \qquad x' = \frac{x}{2} \cdot \frac{1 + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, \quad y' = -\frac{y}{2} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

$$(B_1^0) \quad x' = 2x \cdot \frac{1 + x^2 + y^2}{[x^2 + (y+1)^2]\,[x^2 + (y-1)^2]}, \; y' = 2y \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{[x^2 + (y+1)^2]\,[x^2 + (y-1)^2]},$$

wonach zu jedem Anfangswerthe der erste Näherungswerth bequem zu berechnen ist. Will man den darauf folgenden Näherungswerth erhalten, so braucht man nur für x, y in den nebeneinanderstehenden Gleichungen x', y' einzusetzen, und erhält x'' und y'' oder die Elemente von $z'' = x'' + iy''$, u. s. w.

Aus diesen Gleichungen lassen sich schon viele Schlüsse ziehen, zu deren Ausdruck es bequem ist, den Uebergang vom Anfangswerthe zum Näherungswerthe als einen *Sprung* des Argumentes z aus der Lage des Anfangswerthes in die des Näherungswerthes auf der Zahlenebene aufzufassen. Da zum Beispiel für $x^2 + y^2 = 1$ stets $y' = 0$ wird, so gilt der Satz: Von der Peripherie eines mit der Einheit um den Nullpunkt beschriebenen Kreises springt das Argument stets auf die Axe der reellen Zahlen.

Da ferner für $y = 0$ auch $y' = 0$ ist, so sind für einen reellen Anfangswerth auch alle Näherungswerthe reell; das Argument springt niemals aus der Axe der reellen Zahlen heraus. — Desgleichen bleiben für einen rein imaginären Anfangswerth auch alle Näherungswerthe rein imaginär; das Argument springt daher auch niemals aus der Axe der imaginären Zahlen heraus, und kann also der Algorithmus für einen solchen Anfangswerth unmöglich gegen die Punkte ± 1 convergiren; die y Axe muss in ihrer ganzen Erstreckung zu dem Divergenzgebiet des Algorithmus gehören oder lauter Ausnahmepunkte enthalten. Auch bei einem beliebigen Algorithmus lassen sich stets einzelne Ausnahmepunkte finden, indem man nämlich die Werthe von z aufsucht, für welche die Correction verschwindet oder fortwährend ∞ wird, ferner diejenigen Werthe von z für die bei

$$r = 1, 2, 3, \ldots$$

der r^{te} Näherungswerth $z^{(r)}$ wieder dem Anfangswerthe z gleich wird, also der Algorithmus in sich selbst zurückläuft oder periodisch ist; es würde sogar nicht schwer sein, auch allgemein Ausnahmelinien zu entdecken — wohl aber, zu untersuchen, ob diese wirklich die sämmtlichen Ausnahmepunkte enthalten und letztere nicht vielleicht ein Flächengebiet ausfüllen.

Aendern x und y einzeln oder gleichzeitig ihr Vorzeichen, so findet das Entsprechende auch bei x' und y' statt; der Algorithmus verläuft also symmetrisch in den vier Quadranten der Zahlenebene. Die Achse der imaginären Zahlen wird niemals von dem Argument übersprungen, da x' und x stets gleiches Zeichen haben, wohl aber die

Axe der reellen Zahlen; diese wird bei dem Algorithmus $(A_1{}^0)$ von dem Argument übersprungen, wenn dasselbe innerhalb des vorhin erwähnten Kreises lag, da alsdann y' und y von entgegengesetztem Zeichen sind; wenn das Argument ausserhalb jenes Kreises lag, bleibt es bei seinem Sprunge auf der nämlichen Seite der x Axe. Bei dem Algorithmus $(B_1{}^0)$ verhält sich letzteres gerade umgekehrt.

Lehrreich ist es auch, den Algorithmus auf Polarcoordinaten zu transformiren, sodass aus Radiusvector und Polarwinkel des Anfangswerthes auch für den Näherungswerth diese Elemente berechnet werden können. Setzt man:

$$x + iy = \varrho e^{i\vartheta} \quad \text{und entsprechend} \quad x' + iy' = \varrho' e^{i\vartheta'},$$

so folgen aus den Gleichungen:

$$(A_1{}^0) \quad x'^2 + y'^2 = \frac{[x^2 + (y+1)^2]\,[x^2 + (y-1)^2]}{4\,(x^2 + y^2)}, \quad \frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x} \cdot \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2},$$

die combinirten Algorithmen:

$$(A_1{}^0) \qquad \varrho' = \frac{1}{2\varrho}\sqrt{1 + 2\varrho^2 \cos 2\vartheta + \varrho^4}\;, \qquad \operatorname{tg}\vartheta' = -\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}\operatorname{tg}\vartheta,$$

Bei $(B_1{}^0)$ hat man für ϱ' den umgekehrten, für $\operatorname{tg}\vartheta'$ den entgegengesetzten Werth zu nehmen.

Da der Factor $\frac{1-\varrho^2}{1+\varrho^2}$ stets ein echter Bruch ist, so ist der numerische Werth von $\operatorname{tg}\vartheta'$ stets kleiner als der von $\operatorname{tg}\vartheta$, die Fälle $\operatorname{tg}\vartheta = 0$ oder ∞ allein ausgenommen; mithin ist auch, da man sich auf spitze Winkel beschränken kann, der Winkel ϑ' selbst kleiner als ϑ, das heisst: Bei jedem Sprunge schwingt sich der Leitstrahl gegen die Polaraxe zu, er pendelt gleichsam bei Fortsetzung der Sprünge gegen diese Gleichgewichtslage.

Man kann sich auch fragen, welche Curve die Gebiete derjenigen Punkte von einander scheidet, welche sich beim Sprunge dem Nullpunkte oder Schwerpunkt der beiden Wurzeln nähern oder aber von ihm entfernen. Es ist die Curve, deren Gleichung sich aus der Forderung $\varrho'^2 = \varrho^2$ ergiebt und z. B. bei $(B_1{}^0)$ lautet:

$$[x^2 + (y+1)^2]\,[x^2 + (y-1)^2] = 4\;, \quad \text{oder}\ (x^2 + y^2 + 1)^2 = 4\,(1 + y^2),$$

also:

$$x = \pm\sqrt{2\sqrt{1+y^2} - (1+y^2)} \ \text{und}\ y = \pm\sqrt{1 - x^2 + 2\sqrt{1-x^2}}\,,$$

oder auch in Polarcoordinaten:

$$\varrho^4 + 2\varrho^2 \cos 2\vartheta = 3.$$

Noch interessanter als die Frage nach den Polarcoordinaten ist die nach den Abständen ϱ_1, ϱ_2, bezw. ϱ_1', ϱ_2' der Punkte z und z' von den Punkten $+1$ und -1, welche Distanzen auch als die beiden Fahrstrahlen des betreffenden Punktes in einem Bipolarcoordinatensystem aufgefasst werden können, dessen Pole die beiden Wurzeln ± 1

sind. Man wird nämlich aus den hier zu suchenden Ausdrücken erfahren, ob sich das Argument bei seinem Sprunge einem Wurzelwerthe genähert habe, oder nicht.

Nun bestehen die Gleichungen:

$$\varrho_1^2 = y^2 + (x-1)^2 \quad , \quad \varrho_2^2 = y^2 + (x+1)^2,$$

(desgleichen für die mit einem Strich versehenen Grössen ϱ, x, y), folglich umgekehrt:

$$x = \frac{\varrho_2^2 - \varrho_1^2}{4}, \; y^2 = \tfrac{1}{16}(2+\varrho_1+\varrho_2)(\varrho_1+\varrho_2-2)(\varrho_2+2-\varrho_1)(2+\varrho_1-\varrho_2),$$

und setzt man diese Werthe ein in die Gleichungen:

$$(A_1^0) \qquad y'^2 + (x'-1)^2 = \frac{[y^2+(x-1)^2]^2}{4(x^2+y^2)},$$

(desgleichen $+1$ statt -1 gesetzt),

$$(B_1^0) \qquad y'^2 + (x'-1)^2 = \frac{[y^2+(x-1)^2]^2}{[x^2+(y+1)^2][x^2+(y-1)^2]},$$

(desgleichen $+1$ statt -1 gesetzt),

so ergeben sich die combinirten Algorithmen:

$$(A_1^0) \qquad \varrho_1'^2 = \frac{\varrho_1^4}{2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-2)} \quad , \quad \varrho_2'^2 = \frac{\varrho_2^4}{2(\varrho_1^2+\varrho_2^2-2)},$$

$$(B_1^0) \qquad \varrho_1'^2 = \frac{2\varrho_1^4}{(\varrho_1^2-2)^2+(\varrho_2^2-2)^2}, \quad \varrho_2'^2 = \frac{2\varrho_2^4}{(\varrho_1^2-2)^2+(\varrho_2^2-2)^2}.$$

Die Gleichung der Curve, welche das Gebiet der Punkte, die sich bei dem Sprunge von dem Wurzelpunkte $+1$ entfernen, von dem Gebiet der Punkte scheidet, welche sich ihm nähern, ist nun bestimmt durch die Forderung $\varrho_1'^2 = \varrho_1^2$; also ist sie bei dem Algorithmus (A_1^0) in Bipolarcoordinaten: $\varrho_1^2 + 2\varrho_2^2 - 4 = 0$, oder in rechtwinkligen Coordinaten: $3y^2 + 3x^2 + 2x - 1 = 0$, d. h. die Curve ist der mit dem Radius $\frac{2}{3}$ um den Mittelpunkt $-\frac{1}{3}$ beschriebene Kreis. Bei dem Algorithmus (B_1^0) ist die Gleichung der entsprechenden Curve vom 4ten Grade und leicht nach y aufzulösen. Diese Curven enthalten alle Punkte, welche bei dem Sprunge nur eine *Drehung* um den Wurzelpunkt 1 erleiden.

Um schliesslich aus dem Näherungswerthe auch umgekehrt den Anfangswerth, also überhaupt aus einem beliebigen Näherungswerthe den vorausgehenden zu berechnen, hat man nur nach z die Gleichung aufzulösen:

$$\text{ad } (A_1^0) \quad z^2 - 2zz' + 1 = 0 \qquad , \qquad \text{ad } (B_1^0) \quad z^2 - \frac{2z}{z'} + 1 = 0.$$

Da dieselbe vom zweiten Grade ist, so führen also zu jedem Näherungswerth z' zwei Anfangswerthe $[z]_1$ und $[z]_2$ hin, welche bei dem Sprunge in ihm zusammentreffen und bei allen weiteren Sprüngen in ihm vereinigt bleiben. Die Punkte des Convergenzgebietes bilden so eine unendliche Schaar von Punkten, welche alle, früher oder später dem Wurzelpunkte zuspringend, sich unendlich dicht um diesen sammeln, und es ist leicht die Formeln aufzustellen, nach welchen diese Operationen auch rückwärts ausgeführt und fortgesetzt werden können.

In einer folgenden Abhandlung *über iterirte Functionen* werde ich den Nachweis liefern, dass bei den zwei betrachteten Algorithmen für die vorliegende Gleichung die ganze Zahlenebene in zwei Convergenzgebiete zerfällt, welche nur durch die Axe der imaginären Zahlen als einzige Ausnahmelinie von einander geschieden werden; ich hege überhaupt die Vermuthung, dass für diese Algorithmen bei jeder algebraischen Gleichung das Gebiet der Ausnahmepunkte nur von *einer* Dimension ist, oder sich auf die Grenzlinien der Convergenzbezirke reducirt.

An der genannten Stelle werden auch alle anderen Fragen über das betrachtete Beispiel der beiden Algorithmen zur Beantwortung kommen; dennoch werden sich die Betrachtungen dieses Paragraphen nicht als überflüssig erweisen.

§ 15.

Anhang:

Theorem über die Functionen A.

Anhangsweise will ich noch ein Theorem mittheilen, welches ursprünglich den Ausgangspunkt für die Aufstellung der Algorithmen des § 12. gebildet hat, und dadurch von Interesse erscheint, dass die Functionen $A_\omega^\lambda(z)$ darin eine Rolle spielen.

Sei wie früher:

$$(71)\qquad f(z) = \sum_{a=0}^{a=n} \gamma_a z^{n-a} = \gamma_0 (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n),$$

und seien die Wurzeln $z_1, z_2, \dots z_n$ der Gleichung $f(z) = 0$ sämmtlich von einander verschieden, mithin einfache Wurzeln.

Die Function $f(z)$ lässt sich nun durch die Differenz $z - z_a$ ohne Rest theilen, und man findet nach dem gemeinen Divisionsverfahren ein Resultat von der Form:

$$(72)\qquad \frac{f(z)}{z - z_a} = \sum_{b=0}^{b=n-1} z^{n-b-1}\, \mathfrak{F}_b(z_a).$$

Hierdurch sind gewisse ganze rationale Functionen $\mathfrak{F}_b(z_a)$ definirt, zu deren Berechung sich durch Multiplication mit $z - z_a$ und Coefficientenvergleichung leicht die Recursionen ergeben:

$$(73)\qquad \begin{cases} \mathfrak{F}_0(z_a) = \gamma_0, \\ \mathfrak{F}_b(z_a) = z_a\, \mathfrak{F}_{b-1}(z_a) + \gamma_b \text{ für } b = 1, 2, 3, \dots n-1, \\ \quad 0 \quad = z_a\, \mathfrak{F}_{n-1}(z_a) + \gamma_n; \end{cases}$$

die vorletzte dieser Recursionen wird auch noch für $b = n$ gültig, wenn man: $\mathfrak{F}_n(z) = f(z)$ definirt, und man erhält mit Hülfe derselben die bekannte Darstellung:

$$(74) \qquad \mathfrak{F}_b(z_a) = \sum_{c=0}^{c=b} \gamma_c\, z_a^{b-c} \text{ für } b = 0, 1, 2, \dots n,$$

welche wir auch für ein beliebiges Argument z an Stelle von z_a gelten lassen wollen, desgleichen auch noch eventuell für $b > n$, indem wir die Coefficienten $\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}, \dots$ alsdann willkürlich lassen.

Setzt man in der Gleichung (72) einmal z_c für z, wo c eine von a verschiedene unter den Zahlen $1, 2, \dots n$ bedeutet, ein anderes Mal z_a für z, so ergeben sich wegen:

$$f(z_c) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{z=z_a} \frac{f(z)}{z - z_a} = f^{(1)}(z_a)$$

die für das Folgende wichtigen Relationen:

$$(75) \quad \begin{cases} \sum\limits_{b=0}^{b=n-1} z_c^{n-b-1}\, \mathfrak{F}_b(z_a) = 0, \text{ wenn } c \gtrless a, \\ \sum\limits_{b=0}^{b=n-1} z_a^{n-b-1}\, \mathfrak{F}_b(z_a) = f^{(1)}(z_a). \end{cases}$$

Auf diese Relationen gestützt, kann man zunächst den Satz aufstellen:

Von den beiden Systemen linearer Gleichungen:

$$(76) \quad \begin{cases} \sum\limits_{c=0}^{c=n-1} z_a^{n-c-1}\, X_c = Y_a f^{(1)}(z_a), \text{ für } a = 1, 2, \dots n, \\ X_c = \sum\limits_{a=1}^{a=n} \mathfrak{F}_c(z_a)\, Y_a, \text{ für } c = 0, 1, \dots n-1, \end{cases}$$

desgleichen von den beiden Systemen:

$$(77) \quad \begin{cases} \sum\limits_{c=0}^{c=n-1} \mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a)\, \mathfrak{Y}_c = \mathfrak{X}_a f^{(1)}(z_a), \text{ für } a = 1, 2, \dots n, \\ \mathfrak{Y}_c = \sum\limits_{a=1}^{a=n} z_a^c\, \mathfrak{X}_a, \text{ für } c = 0, 1, \dots n-1, \end{cases}$$

ist immer das eine die Auflösung des andern.

Denn, setzt man je aus der zweiten von diesen Gleichungen den Werth in die erste ein, wobei selbstverständlich die Summationsvariable a durch einen andern Buchstaben, z. B. b ersetzt werden muss, so entsteht mit Rücksicht auf (75) eine identische Gleichung.

Würde man umgekehrt den Ausdruck aus der ersten Gleichung jedes Paares in die zweite substituiren, so wäre die Richtigkeit des Satzes nach dem Bisherigen nicht unmittelbar ersichtlich; man wird vielmehr auf diese Weise zu der neuen Relation geführt:

$$(78) \qquad \sum_{a=1}^{a=n} \frac{z_a^b\, \mathfrak{F}_c(z_a)}{f^{(1)}(z_a)} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } b + c \gtrless n - 1, \\ 1, \text{ wenn } b + c = n - 1, \end{cases}$$

welche übrigens leicht aus einer von Cauchy gegebenen abgeleitet werden könnte *). Die Auflösung der Systeme (76) und (77) ist auch von Baltzer**) mittelst Betrachtung von Determinanten ausgeführt.

Es gilt nun ferner der Satz:

Jede positive ganze Potenz einer linearen Function der Grössen

$$\mathfrak{F}_0(z_a)\ ,\ \mathfrak{F}_1(z_a)\ ,\ \ldots\ \mathfrak{F}_{n-1}(z_a),$$

nämlich:

$$P = \sum_{c=0}^{c=n-1} \mathfrak{Y}_c'\ \mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a),$$

in welcher die Coefficienten $\mathfrak{Y}_c'$ *irgend welche Constante sind, lässt sich ebenfalls als lineare Function jener n Grössen darstellen, deren Coefficienten symmetrische Functionen sämmtlicher Wurzeln sind, also nur die früheren Coefficienten* $\mathfrak{Y}'$ *nebst denjenigen* γ *des Polynoms* $f(z)$, *nicht aber die Wurzel* z_a *enthalten.*

Am einfachsten lässt sich dies in folgender Weise einsehen. Denkt man sich die Ausdrücke der Functionen $\mathfrak{F}$, nach dem Schema der Gleichung (74) gebildet, in den Ausdruck von $P^{\omega+1}$ eingesetzt, so ist klar, dass sich dieser nach den Potenzen der Wurzel z_a anordnen lässt. Diejenigen Potenzen von z_a, deren Exponent grösser als $n-1$ ist, lassen sich aber mittelst der Gleichung $f(z_a) = 0$ durch die niedrigeren ausdrücken, wonach $P^{\omega+1}$ als lineare Function der Grössen

$$z_a^0\ ,\ z_a^1\ ,\ \ldots\ z_a^{n-1}$$

erscheint. Die letzteren Grössen lassen sich hierauf, indem man das System Gleichungen (74) auflöst, durch die erstgenannten

$$\mathfrak{F}_0(z_a)\ ,\ \mathfrak{F}_1(z_a)\ ,\ \ldots\ \mathfrak{F}_{n-1}(z_a)$$

darstellen, und wenn die gedachten Werthe eingesetzt werden, erhält man $P^{\omega+1}$ in der That als lineare Function dieser Grössen $\mathfrak{F}$.

Bemerkenswerth dürfte jedoch auch nachstehender Beweis des Satzes sein.

Denkt man sich die $\omega+1^{\text{te}}$ Potenz der Summe P nach dem polynomischen Satze entwickelt, so erhält man ein Aggregat von Gliedern, deren jedes ein Product von Potenzen einiger der Functionen $\mathfrak{F}_0(z_a)$, $\mathfrak{F}_1(z_a)$, ... $\mathfrak{F}_{n-1}(z_a)$ zum Factor hat. Ein solches Product, und damit auch das ganze Aggregat, lässt sich jedenfalls linear durch diese Functionen $\mathfrak{F}$ ausdrücken, wenn es gelingt, für ein Product von irgend zweien dieser Functionen dieselbe Aufgabe zu lösen.

Wir wollen uns deshalb allgemein die Aufgabe stellen, wenn a und b irgend zwei natürliche Zahlen bezeichnen, das Product

---

*) Cf. Baltzer, Determ. 2. Aufl., pag. 79.

**) Ibidem, pag. 81 sq.

$$\mathfrak{F}_a(z)\,\mathfrak{F}_b(z)$$

linear durch die Grössen $\mathfrak{F}_0(z)$, $\mathfrak{F}_1(z)$, ... auszudrücken. Dabei möge das sich stets gleichbleibende Argument z der Functionen $\mathfrak{F}$ weggelassen werden. Durch Multiplication der Gleichung (74) mit $\mathfrak{F}_a$ und Absonderung des in die nullte Potenz von z multiplicirten Termes rechter Hand ergiebt sich alsdann:

$$\mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b = \gamma_b\mathfrak{F}_a + z\,\mathfrak{F}_a \sum_{c=0}^{c=b-1} \gamma_c\, z^{b-c-1} \text{ oder } \mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b = \gamma_b\,\mathfrak{F}_a + z\,\mathfrak{F}_a\mathfrak{F}_{b-1}\,.$$

Da ferner nach (73):

$$z\,\mathfrak{F}_a = \mathfrak{F}_{a+1} - \gamma_{a+1}\,,$$

so folgt durch Einsetzung:

$$\mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b - \mathfrak{F}_{a+1}\,\mathfrak{F}_{b-1} = \gamma_b\,\mathfrak{F}_a - \gamma_{a+1}\,\mathfrak{F}_{b-1}\,.$$

Schreibt man hierin $a+c$ statt a und $b-c$ statt b, summirt hierauf nach c von 0 bis $b-1$ und berücksichtigt, dass $\mathfrak{F}_0 = \gamma_0$ ist, so ergiebt sich bei passender Anordnung der Glieder:

$$(79) \qquad \mathfrak{F}_a\,\mathfrak{F}_b = \gamma_b\,\mathfrak{F}_a + \sum_{c=1}^{c=b} \left(\gamma_{b-c}\,\mathfrak{F}_{a+c} - \gamma_{a+c}\,\mathfrak{F}_{b-c}\right),$$

was die gesuchte Darstellung ist.

Der also auf zwei Wegen erkannte Satz soll jetzt auf den Fall angewendet werden, wo P der Ausdruck (72) selbst, nämlich gleich:

$$\frac{f(z)}{z - z_a} = \sum_{c=0}^{c=n-1} z^c\,\mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a),$$

wo also $\mathfrak{Y}_c' = z^c$ ist. Die $\omega + 1^{\text{te}}$ Potenz dieses Ausdrucks lässt sich, wie gezeigt, linear durch die Functionen $\mathfrak{F}$ darstellen, und es handelt sich darum, diese Darstellung:

$$\left\{\frac{f(z)}{z - z_a}\right\}^{\omega+1} = \sum_{c=0}^{c=n-1} \mathfrak{Y}_c\,\mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a)$$

wirklich zu bilden. Dies lässt sich unmittelbar mit Hülfe des Theorems (77) erreichen. Denkt man sich nämlich die letzte Gleichung für $a = 1, 2, \ldots n$ hingeschrieben und versteht dort unter $\mathfrak{X}_a$ den Ausdruck

$$\frac{f(z)^{\omega+1}}{f^{(1)}(z_a)\,(z - z_a)^{\omega+1}}\,,$$

so erhält man als Auflösung des Systems Gleichungen mit Rücksicht auf die Definition (38) der Function A sofort:

$$\mathfrak{Y}_c = f(z)^{\omega+1}\,A_\omega^{(c)}(z)\,.$$

Nach Einsetzung dieses Werthes und Weglassung des gemeinsamen Factors $f(z)^{\omega+1}$ ist also die Identität gefunden:

$$(80) \qquad \frac{1}{(z-z_a)^{\omega+1}} = \sum_{c=0}^{c=n-1} A_\omega^{(c)}(z)\,\mathfrak{F}_{n-c-1}(z_a),$$

und man kann das Theorem aussprechen:

Drückt man die $\omega + 1^{\text{te}}$ *Potenz von*

$$\frac{f(z)}{z-z_a}$$

linear durch die Functionen $\mathfrak{F}_0(z_a), \ldots \mathfrak{F}_{n-1}(z_a)$ *aus, so nähert sich das Verhältniss der Coefficienten von irgend zwei aufeinanderfolgenden dieser Functionen bei unendlich wachsendem* ω *stets derjenigen Wurzel der Gleichung* $f(z) = 0$, *welche dem willkürlichen Werthe* z *am nächsten liegt.*

Zur Berechnung dieser Coefficienten $f^{\omega+1} A_\omega^{(c)}$ könnte man sich auch des polynomischen Satzes in Verbindung mit der Relation (79) bedienen.

Pforzheim, im Januar 1869.