Über Gebilde, die aus Tetraedern und Flächen zweiter Klasse zusammengesetzt sind.

Von W. Franz Meyer in Königsberg i. P.

In einer vorausgehenden Note hat Herr V. Eberhard einige bemerkenswerte Sätze über zwei Tetraeder aufgestellt und zum Teil bewiesen.

Im folgenden sollen diese Sätze und verwandte mit algebraischen Hilfsmitteln behandelt werden, wodurch, wie ich meine, nicht nur der gegenseitige Zusammenhang der Sätze schärfer hervortritt, sondern auch eine große Reihe von Verallgemeinerungen sich fast von selbst aufdrängt.

Als Kern des Ganzen erscheint eine Identität, die die Geraden (Kanten) zweier beliebiger Tetraeder miteinander verknüpft, d. h., es gibt eine Simultaninvariante beider Tetraeder, deren identisches Verschwinden aussagt, daß, wenn sich fünf Paare entsprechender Kanten beider Tetraeder treffen, dies auch für das sechste Paar stattfindet. Diese Simultaninvariante nimmt die einfachste Gestalt an, wenn die beiden Tetraeder als dualistisch einander gegenüberstehend aufgefaßt werden, und ist auch einer metrischen Deutung fähig.

Die gemeinte Identität bleibt gültig, wenn eines der Tetraeder oder auch beide in ebene Vierecke ausarten, und es wird erst dann notwendig, sie durch eine wesentlich andere Identität zu ersetzen, wenn auch die Ebenen beider ebener Vierecke so zusammenfallen, daß ihre Schnittachse unbestimmt wird.

§ 1. Über das aus einer Fläche zweiter Klasse, einem Tetraeder und einem Punkte zusammengesetzte Gebilde.

Das Tetraeder T mit den Ecken A_i und den Ebenen α_i (wo der Index i die Werte 1, 2, 3, 4 oder auch i, k, l, m durchläuft) werde als Koordinatentetraeder gewählt. Ferner sei gegeben eine vorderhand ganz beliebige Fläche zweiter Klasse (oder ein Ebenen-Polarsystem) Γ :

$$(1) \quad \Gamma = \sum \sum c_{ik} u_i u_k = 0, \quad (c_{ik} = c_{ki})$$

sowie ein beliebiger Punkt $P(y)$ mit den Koordinaten y_i .

Durch den Punkt P lege man jeweils die Gerade p_i , die zur Ebene α_i bezüglich Γ^1) konjugiert ist: die Spur dieser Geraden p_i in der Ebene α_i sei der Punkt Y_i mit den Koordinaten Y_{ir} ($r = i, k, l, m$).

Der Pol der Ebene α_i , der die Koordinaten c_{ir} (i, k, l, m) besitzt, werde C_i genannt, dann ist die Gerade p_i eben die, welche P mit C_i verbindet.

Die Koordinaten der Punkte Y_i , deren Tetraeder mit H bezeichnet sei, sind dargestellt durch das folgende Schema²⁾, wobei der in den Hauptdiagonalgliedern auftretende Wert Null zweckmäßiger durch $c_{ii} y_i - c_{ii} y_i$ ($i = i, k, l, m$) ersetzt werde:

$$(2) \quad \begin{array}{cccc} Y_i & Y_k & Y_l & Y_m \\ \left\{ \begin{array}{llll} c_{ii} y_i - c_{ii} y_i, & c_{kk} y_i - c_{ki} y_k, & c_{ll} y_i - c_{li} y_l, & c_{mm} y_i - c_{mi} y_m \\ c_{ii} y_k - c_{ik} y_i, & c_{kk} y_k - c_{kk} y_k, & c_{ll} y_k - c_{lk} y_l, & c_{mm} y_k - c_{mk} y_m \\ c_{ii} y_l - c_{il} y_i, & c_{kk} y_l - c_{kl} y_k, & c_{ll} y_l - c_{ll} y_l, & c_{mm} y_l - c_{ml} y_m \\ c_{ii} y_m - c_{im} y_i, & c_{kk} y_m - c_{km} y_k, & c_{ll} y_m - c_{lm} y_l, & c_{mm} y_m - c_{mm} y_m \end{array} \right. \end{array}$$

oder auch, in eine einzige Formel zusammengezogen:

$$(2) \quad Y_{rs} = c_{rr} y_s - c_{rs} y_r \quad (r, s = i, k, l, m).$$

Man lege jetzt etwa durch die Ecke A_m von T die zur Ecke (Y_i, Y_k, Y_l) konjugierte Gerade g_m . Die Koordinaten der Ebene (Y_i, Y_k, Y_l) oder kürzer v_m seien mit v_{mr} ($r = i, k, l, m$), der Pol dieser Ebene mit V_m bezeichnet. Dann besitzen die Koordinaten V_{mr} ($r = i, k, l, m$) von V_m die Werte:

$$(3) \quad V_{mr} = c_{ri} v_{mi} + c_{rk} v_{mk} + c_{rl} v_{ml} + c_{rm} v_{mm} = \sum_{s=i}^m c_{rs} v_{ms}.$$

Die Gerade g_m verbindet A_m mit V_m und trifft die Ebene α_m in einem Punkte G_m mit den Koordinaten:

$$(4) \quad V_{mi}, V_{mk}, V_{ml}, 0.$$

Gemäß (2) sind dann die drei ersten Werte (4) dargestellt durch die Determinanten ($s = i, k, l$):

$$(5) \quad V_{ms} = \begin{vmatrix} c_{ii} y_i - c_{ii} y_i, & c_{kk} y_i - c_{ki} y_k, & c_{ll} y_i - c_{li} y_l, & c_{si} \\ c_{ii} y_k - c_{ik} y_i, & c_{kk} y_k - c_{kk} y_k, & c_{ll} y_k - c_{lk} y_l, & c_{sk} \\ c_{ii} y_l - c_{il} y_i, & c_{kk} y_l - c_{kl} y_k, & c_{ll} y_l - c_{ll} y_l, & c_{sl} \\ c_{ii} y_m - c_{im} y_i, & c_{kk} y_m - c_{km} y_k, & c_{ll} y_m - c_{lm} y_l, & c_{sm} \end{vmatrix}.$$

¹⁾ Der Zusatz „bezüglich Γ “ werde im folgenden als selbstverständlich zumeist weggelassen.

²⁾ S. auch meine demnächst erscheinende Abhandlung im Archiv für Math. und Phys. (3), Bd. XI. Die den homogenen Koordinaten (2) der Punkte Y_i zugehörigen Proportionalitätsfaktoren werden, da sie nicht weiter in Betracht kommen, unterdrückt.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(6) \quad \gamma_m = |y \ C_i \ C_k \ C_l|,$$

d. h. gleich der aus den Koordinaten der Punkte (y) , C_i , C_k , C_l gebildeten Determinante, so reduzieren sich die drei Werte (5) nach einfachen Determinantensätzen auf die folgenden:

$$(7) \quad V_{mi} = c_{ii} y_k y_l \gamma_m, \quad V_{mk} = c_{kk} y_i y_l \gamma_m, \quad V_{ml} = c_{ll} y_i y_k \gamma_m.$$

Demnach lassen sich die Koordinaten (4) des Punktes G_m , der Geraden g_m in der Ebene α_m , auch in der Gestalt schreiben:

$$(8) \quad c_{ii} y_k y_l y_m, \quad c_{kk} y_i y_l y_m, \quad c_{ll} y_i y_k y_m, \quad 0.$$

Wiederholt man nunmehr den für die Ecke A_m ausgeführten Prozeß für die drei anderen Ecken A_i , A_k , A_l von T , so geht aus (8) hervor, daß sich die vier Geraden g_i in einem Punkte treffen, nämlich in einem Punkte $Q(z)$ mit den Koordinaten:

$$(I) \quad z_i : z_k : z_l : z_m = c_{ii} y_k y_l y_m : c_{kk} y_i y_l y_m : c_{ll} y_i y_k y_m : c_{mm} y_i y_k y_l \\ = \frac{c_{ii}}{y_i} : \frac{c_{kk}}{y_k} : \frac{c_{ll}}{y_l} : \frac{c_{mm}}{y_m}.$$

Dieses Ergebnis umfaßt zwei Sätze, von denen der eine nur die Tatsache im Auge hat, daß sich die vier Geraden g_i überhaupt in einem Punkte treffen, während der andere die genauere Abhängigkeit dieses Treffpunktes $Q(z)$ von dem Ausgangspunkte $P(y)$ verfolgt.

Der erste Satz lautet:

I. „Legt man durch einen Punkt P die vier Geraden p_i ($i=i, k, l, m$), die resp. zu den Ebenen α_i eines Tetraeders T mit den Ecken A_i konjugiert sind in bezug auf eine beliebige Fläche zweiter Klasse Γ , bezeichnet die Spuren der Geraden p_i in den Ebenen α_i mit Y_i , die vier Ebenen $(Y_k Y_l Y_m)$ mit v_i und legt wiederum durch die Ecken A_i von T die vier Geraden g_i , die zu den Ebenen v_i konjugiert sind in bezug auf Γ , so schneiden sich die vier Geraden g_i in einem und demselben Punkte Q .

Die Beziehung der beiden Punkte P , Q ist eine gegenseitige, so daß man vermöge der nämlichen Konstruktion von Q wieder zu P gelangt.“

Hieraus geht der erste Satz des Herrn Eberhard hervor, wenn $\Gamma=0$ (1) im besonderen die Gleichung des Kugelkreises ist; die Geraden p_i stehen dann senkrecht auf den Ebenen α_i und die Geraden g_i senkrecht auf den Ebenen v_i .

Variiert man nunmehr den Punkt $P(y)$ im Raume, so entspricht ihm jeweils ein Punkt $Q(z)$ vermöge der Transformation (I).

Von dieser eindeutigen, involutorischen, kubischen Transformation — die kurz mit T bezeichnet sei — mögen zunächst die wesentlichsten bekannten Eigenschaften ¹⁾ zusammengestellt werden.

Durch T werden je zwei Punkte P, Q einander zugeordnet, die konjugiert sind in bezug auf alle Flächen zweiter Ordnung desjenigen Netzes N , dessen acht Grundpunkte die Koordinaten $\pm \sqrt{c_{ii}}, \pm \sqrt{c_{kk}}, \pm \sqrt{c_{ll}}, \pm \sqrt{c_{mm}}$ (bei allen Kombinationen der Wurzelvorzeichen) besitzen; diese Punkte sind zugleich die „Einheitspunkte“, das sind die sich selbst entsprechenden Punkte der Transformation T .

Das Bild einer Ebene ist eine Fläche dritter Ordnung mit vier Knotenpunkten in den Ecken A_i von T und umgekehrt; das Bild einer Geraden ist eine, durch die Ecken A_i gehende kubische Raumkurve und umgekehrt.

Übt man auf einen Punkt (y) zunächst die spezielle Kollineation K aus:

$$(9) \quad K) \quad y'_i = \frac{y_i}{c_{ii}},$$

sodann auf den Punkt y' die spezielle Transformation T' :

$$(10) \quad T') \quad z_i = \frac{1}{y'_i},$$

so entsteht die Transformation T' ; man sagt, T entsteht durch Zusammensetzung von K und T' :

$$(11) \quad T = K T' = T' K,$$

wobei die Reihenfolge der Zusammensetzung gleichgültig ist. K ist diejenige Kollineation, die die Ebenen (und damit zugleich die Ecken) von T fest läßt, und zugleich den Punkt C mit den Koordinaten $c_{ii}, c_{kk}, c_{ll}, c_{mm}$, als Punkt y aufgefaßt, in den „Einheitspunkt“ $(1, 1, 1, 1)$, als Punkt y' aufgefaßt, überführt.

T' ist diejenige Transformation (I), die entsteht, wenn die vier Koeffizienten c_{ii} in der Gleichung (1) $\Gamma = 0$ der Fläche zweiter Klasse Γ der Einheit proportional werden; dies tritt u. a. ein, wenn $\Gamma = 0$ die Gleichung des Kugelkreises ist.

Die Einheitspunkte von T' sind dann die acht „Einheitspunkte“ des Koordinatentetraeders T (deren Koordinaten ± 1 oder -1 sind), oder geometrisch, die Mittelpunkte der acht dem Tetraeder T einbeschriebenen Kugeln. Vermöge T' entspricht der unendlich fernen Ebene diejenige Fläche dritter Ordnung, die zugleich als Ort eines Punktes P entsteht, für den die Fußpunkte der von ihm auf die Ebenen α_i von T gefällten Lote in einer Ebene liegen.

¹⁾ Siehe meine Arbeiten im Archiv für Math. u. Phys. (3), Bd. V, p. 168, Bd. VIII, p. 135, Bd. XI.

Wir fassen alles dies kurz zusammen in dem Satze:

II. „Die Punkte $P(y)$, $Q(z)$ des Satzes I entsprechen einander vermöge der eindeutigen, involutorischen, kubischen Transformation $T(I)$ mit den soeben aufgezählten Eigenschaften.“

Hieraus geht der dritte Satz des Herrn Eberhard hervor, wenn man von vornherein $\Gamma = 0(1)$ als Gleichung des Kugelschnittes zu Grunde legt; T reduziert sich dann auf T' und K auf die identische Kollineation.

Als die einfachste geometrische Charakterisierung der Transformation $T(I)$ dürfen wir gerade die durch den Satz I angegebene Eigenschaft von T ansprechen. Von dieser aus gelangt man aber sofort zu weiteren Eigenschaften, die, mit anderen, früher ¹⁾ von mir aufgestellten, kombiniert, ein einigermaßen vollständiges Bild von dieser wichtigen Transformation zu entwerfen gestatten.

Die Vergleichung von (I) mit (1) lehrt sofort, daß bei festgehaltenem Punkte $P(y)$, der Punkt $Q(z)$ (I) unverändert bleibt, wenn auch in (1) die Koeffizienten c_{ik} mit zwei ungleichen Indices willkürlich gelassen werden. An die Stelle der ursprünglichen Fläche zweiter Klasse Γ tritt also eine ganze ∞^6 lineare Schar Σ solcher, die sich dadurch charakterisieren läßt, daß ihr einmal die spezielle Fläche

$$(12) \quad \Gamma' \equiv \sum c_{ii} u_i^2 = 0,$$

die T als Poltetraeder besitzt, angehört, anderseits die Gesamtheit der T einbeschriebenen Flächen zweiter Klasse.

Indessen läßt sich diese Schar Σ von Flächen zweiter Klasse noch einfacher festlegen. Das Netz N von Flächen zweiter Ordnung, durch das oben die Transformation T charakterisiert wurde, ist, wenn $\lambda_k, \lambda_l, \lambda_m$ drei homogene Parameter bedeuten, dargestellt durch:

$$(13) \quad N \equiv \lambda_k (x_i^2 c_{kk} - x_k^2 c_{ii}) + \lambda_l (x_i^2 c_{ll} - x_l^2 c_{ii}) + \lambda_m (x_i^2 c_{mm} - x_m^2 c_{ii}) = 0.$$

Demnach ist die ∞^6 lineare Schar Σ von Flächen zweiter Klasse $\Gamma(1)$ bei willkürlichen c_{ik} ($i \neq k$), vermöge deren einem Punkte $P(y)$ stets ein und derselbe Punkt $Q(z)$ zugeordnet wird, gerade die zum Netze N (13) apolare ²⁾ Schar.“

Insbesondere gehören also der Schar Σ die acht doppelt zu zählenden Einheitspunkte der Transformation T an, und umgekehrt

¹⁾ S. die Fußnote auf p. 4.

²⁾ Eine Fläche zweiter Ordnung und eine Fläche zweiter Klasse heißen apolar, wenn ihre bilineare Invariante verschwindet.

ist durch jene acht Einheitspunkte die Schar Σ bestimmt,¹⁾ wie auch analytisch leicht zu bestätigen ist.

Der ∞^6 Schar Σ gehört eine ∞^5 — nicht lineare — Schar von in einen Klassenkegelschnitt K_2 ausgearteten Flächen an. In jeder Ebene E liegt noch eine ∞^2 — wieder lineare — Schar solcher K_2 ; zu dieser ist in E eine ∞^2 lineare Schar von Ordnungskegelschnitten C_2 apolar, und diese Schar von C_2 wird aus E durch das Flächennetz N (13) ausgeschnitten.

Die in bezug auf eine solche ∞^3 Schar von C_2 (in der Ebene E gelegenen) konjugierten Punktepaare (P, Q) erfüllen eine Kurve dritter Ordnung C_3 , und diese wird aus E gerade durch diejenige Fläche dritter Ordnung ausgeschnitten, die der Ebene E vermöge der Transformation T entspricht.²⁾

Es gibt im ganzen acht Flächen zweiter Ordnung, die einen solchen Kegelschnitt C_2 enthalten und zugleich dem Tetraeder T einbeschrieben sind; die acht Pole dieser Flächen bezüglich der Ebene E sind stets die acht Einheitspunkte der Transformation T .

Die bisher betrachtete Figur des Tetraeders T , der Fläche zweiter Klasse Γ , und des — variierend gedachten — Punktes $P(y)$, sowie des jeweils dadurch bestimmten, dem Tetraeder T einbeschriebenen Tetraeders H , der Punkte Y_i und des Punktes $Q(z)$, läßt sich indessen noch auf andere Weise variieren.

Es werde jetzt außer T noch der Punkt $P(y)$ und das Tetraeder H der Punkte Y_i festgehalten, so zwar, daß die vier Punkte Y_i willkürlich auf den Ebenen α_i von T gewählt seien; hingegen werde eine zugehörige Fläche zweiter Klasse Γ (1) gesucht.

Aus dem Schema (2) geht hervor, daß dann den neun Koeffizientenverhältnissen der c in (1) acht lineare — ersichtlich linear unabhängige — Bedingungsgleichungen auferlegt werden; geometrisch sagen dieselben aus, daß die vier Pole C_i der Ebenen α_i von T bezüglich Γ stets auf vier gegebenen Geraden liegen müssen.

Es gibt also noch eine ∞^1 lineare Schar von Flächen zweiter Klasse Γ , die der Aufgabe genügen. Die Formeln (I) zeigen also dann, daß der einem beliebig gegebenen Punkte $P(y)$ zugeordnete Punkt $Q(z)$ eine Gerade g beschreibt.³⁾ Seien c_{ik}, c'_{ik} die Koeff-

¹⁾ Zwischen den acht Quadraten der Linearformen (in den u_i), deren Verschwinden die acht Einheitspunkte darstellt, findet danach eine lineare Identität statt; das sagt aus, daß durch sieben derselben der achte eindeutig bestimmt ist. Dies ist ersichtlich nur ein besonderer Fall eines bekannten Satzes über die acht Grundpunkte eines beliebigen Flächennetzes zweiter Ordnung.

²⁾ S. meine Abhandlung, Archiv der Math. und Phys. (3), Bd. XI.

³⁾ In der ∞^1 Schar von Flächen Γ gibt es vier, von denen je eine Ebene α_i von T berührt. Diese vier Berührungspunkte sind gerade die vier Schnittpunkte von g mit den Ebenen α_i . Da es in einer linearen Schar von Flächen zweiter Klasse vier in Klassenkegelschnitte K_2 ausgeartete Flächen gibt, so existieren, wenn einer dieser K_2 im besonderen der Kugelskreis ist, wenn also die Y_i die Fußpunkte der von P auf die α_i gefällten Lote p_i sind, noch drei K_2 , in bezug auf welche die p_i ebenfalls zu den α_i konjugiert sind.

fizienten für irgend zwei Flächen der Schar, λ, λ' zwei homogene Parameter, so ist die Gerade g repräsentiert durch die Gleichungen

$$(11) \quad z_i = \frac{\lambda c_{ii} + \lambda' c'_{ii}}{y_i}.$$

Bezeichnet man mit p_{ik} die Strahlenkoordinaten von g , und setzt zur Abkürzung:

$$(12) \quad q_{ik} = \begin{vmatrix} c_{ii} & c'_{ii} \\ c_{kk} & c'_{kk} \end{vmatrix},$$

so sind die p_{ik} bestimmt durch:

$$(13) \quad p_{ik} y_i y_k = q_{ik}.$$

Demnach erfüllen die sämtlichen Punkte $P(y)$ des Raumes einen quadratischen Komplex, dessen Gleichung lautet:

$$(14) \quad \begin{vmatrix} p_{12} p_{34} & q_{12} q_{34} \\ p_{13} p_{42} & q_{13} q_{42} \end{vmatrix} = 0.$$

Dieser Komplex enthält alle Geraden der vier Ebenen α_i von T ; er ist eindeutig bestimmt, wenn man eine einzige Gerade g kennt, die ihm angehört.

Die obigen Entwicklungen — mit Ausnahme derer über die ∞^1 lineare Schar von Flächen zweiter Klasse Γ^1) — lassen sich auf den linearen Raum R_n von n Dimensionen übertragen; die Fundamentalformel (I) lautet dann:

$$(I) \quad z_i = \frac{c_{ii}}{y_i} (i = 1, 2 \dots n + 1).$$

Endlich bleibt die Ableitung, die zu der Formel (I) führte, unberührt, auch wenn das durch die Fläche Γ (1) bestimmte Ebenen-Polarsystem $\Sigma \Sigma u_i v_k c_{ik} = 0$ ($c_{ik} = c_{ki}$) ersetzt wird durch die umfassendere Ebenen-Korrelation ($c_{ik} \begin{smallmatrix} \geq \\ \leq \end{smallmatrix} c_{ki}$), wo die 15 Verhältnisse der c_{ik} beliebig gewählte Größen sein können. Und entsprechend wieder im R_n .

Die zu den bisher ausgesprochenen Sätzen dualistischen ver- stehen sich von selbst.

Die Übertragungen der bisherigen Sätze auf die nichteu- klidische Geometrie eines R_3 resp. R_n liegen auf der Hand, sobald man Γ (1) als absolute Fläche des betreffenden Raumes auffaßt. Die Geraden p_i, g_i werden dann die nichteuclidischen Senkrechten zu den Ebenen α_i resp. v_i . Endlich erkennt man auch die Er- weiterung auf eine „Übernichteuclidische Geometrie“,

¹⁾ In der Tat erkennt man schon im Falle des R_4 , daß bei beliebig ge- gebenen X_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) den 15 homogenen c_{ik} der entsprechenden Gleichung Γ (1) 15 lineare Bedingungen aufzuerlegen wären, daß also eine zugehörige Γ im allgemeinen nicht mehr existiert.

wenn man die absolute Fläche Γ (1) ersetzt durch eine Ebenenkorrelation ($c_{ik} \geq c_{ki}$), also auch den absoluten Kegelschnitt in irgend einer Ebene E , durch eine gewisse Geradenkorrelation.

Es scheint nicht viele Sätze der gewöhnlichen Geometrie zu geben, die einer derartigen Verallgemeinerung fähig sind.

§ 2. Über das aus einer Fläche zweiter Klasse und aus zwei Tetraedern bestehende Gebilde.

Die beiden in § 1 betrachteten Tetraeder T (A_i, α_i) und H (Y_i, v_i) stehen in der Beziehung, daß stets die Kante (α_i, α_k) von T konjugiert ist [bezüglich der Fläche zweiter Klasse Γ (1)] zur Kante (Y_i, Y_k) von H .

Denn da C_i, C_k die Pole von α_i, α_k sind, so ist (C_i, C_k) die reziproke Polare der Kante (α_i, α_k).

Nun ist die Gerade p_i konjugiert zur Ebene α_i , d. h. jede Ebene durch p_i geht durch den Pol C_i von α_i , und desgleichen geht jede Ebene durch p_k durch den Pol C_k von α_k . Mithin liegt die Gerade ($C_i C_k$) in der durch P gehenden Ebene (p_i, p_k), die andererseits die Gerade (Y_i, Y_k) enthält. Somit trifft die Gerade (Y_i, Y_k) die Gerade (C_i, C_k), die reziproke Polare von (α_i, α_k), d. h. die Geraden (α_i, α_k) und (Y_i, Y_k) sind konjugiert.

Allgemeiner mögen jetzt zwei Tetraeder — oder besser gesagt, zwei Vierecke im Raume — T (A_i) und Δ (D_i) in der Beziehung zu einander stehen, daß stets die Kante (A_i, A_k) des ersten zu der „entsprechenden“ Kante (D_i, D_m) des zweiten konjugiert ist in bezug auf irgend eine vorgelegte Fläche zweiter Klasse Γ (1).

Dabei werde auch die Möglichkeit¹⁾ zugelassen, daß das eine der beiden Vierecke, etwa Δ , ein ebenes ist. Es soll gezeigt werden, in Verallgemeinerung des zweiten Satzes von Herrn Eberhardt, der für Γ als Kugelkreis resultiert, daß dann auch die vier Geraden g_i , von denen je eine durch eine Ecke A_i von T geht und zu der „entsprechenden“ Ebene $\delta_i = (D_k, D_l, D_m)$ von Δ konjugiert ist, sich in einem Punkte Q treffen. Ist das der Fall, so treffen sich auch reziprok die vier Geraden p_i , von denen je eine durch eine Ecke D_i von Δ geht und zu der „entsprechenden“ Ebene α_i (A_k, A_l, A_m) von T konjugiert ist, in einem Punkte P , und das Punktepaar P, Q , sowie die Geraden p_i, g_i bilden dann ersichtlich eine Verallgemeinerung der in § 1 untersuchten.

Der in Rede stehende Satz, nebst seiner Umkehrung, ist geometrisch einfach zu beweisen.

Es sei wiederum C_i ($c_{ii}, c_{ik}, c_{il}, c_{im}$) der Pol der Ebene α_i von T , oder, was auf dasselbe hinauskommt, es sei das Viereck (C_i, C_k, C_l, C_m) das Polviereck von T . Das Konjugiertsein der Kanten

¹⁾ Die weitere Möglichkeit, daß auch das zweite Viereck ein ebenes ist, wird weiter unten besonders behandelt.

(A_i, A_k) und (D_l, D_m) ist gleichbedeutend mit dem Treffen der Kanten (C_l, C_m) und (D_l, D_m) und dieses wiederum gleichbedeutend dem Treffen der Transversalen (C_l, D_l) und (C_m, D_m) , und umgekehrt.

Die besondere Lage der beiden Vierecke T und Δ läßt sich daher auch dahin charakterisieren, daß sich die beiden Vierecke Δ und (C_i, C_k, C_l, C_m) in perspektiver Lage befinden. Denn da sich je zwei der vier Transversalen (C_r, D_r) ($r = i, k, l, m$) treffen, ohne daß irgend drei von ihnen einer Ebene angehören können, so gehen alle vier durch einen und denselben Punkt, und umgekehrt. Die Transversale (C_r, D_r) ist aber eben die Gerade, die durch die Ecke D_r des Viereckes Δ geht und zugleich zur Ebene α_r des Viereckes T konjugiert ist.

Es gelten ersichtlich wiederum die nämlichen Ausdehnungen des Satzes, wie in § 1.

Der Fall des gewöhnlichen Raumes R_3 mag zunächst weiter verfolgt werden.

Man zählt unmittelbar ab, daß die perspektive Lage zweier Vierecke Δ und (C_i, C_k, C_l, C_m) fünf Bedingungen involviert. Andererseits erfordert das Konjugiertsein je zweier Kanten (A_i, A_k) und D_l, D_m je eine Bedingung; von diesen sechs Bedingungen muß daher eine Folge der fünf übrigen sein, oder, was dasselbe ist, jene sechs Bedingungen müssen an eine gewisse Identität geknüpft sein.

Um diese Identität aufzustellen, empfiehlt es sich, die Pole der Ebenen δ_i des Viereckes Δ einzuführen. Man bezeichne den Pol der Ebene $\delta_i = (D_k, D_l, D_m)$ mit E_i und seine Koordinaten mit $e_{ii}, e_{ik}, e_{il}, e_{im}$. Dann ist wiederum das Konjugiertsein der Kanten (A_i, A_k) und (D_l, D_m) äquivalent mit dem Treffen der Kanten (A_i, A_k) und (E_i, E_k) , also mit der durch A_{ik} (oder A_{ki}) angegebenen Bedingung:

$$(15) \quad A_{ik} \equiv A_{ki} \equiv \begin{vmatrix} e_{il} & e_{im} \\ e_{kl} & e_{km} \end{vmatrix} \equiv e_{il} e_{km} - e_{im} e_{kl} = 0.$$

Von der vierreihigen Determinante der e_{ik} verschwinden somit, bei perspektiver Lage der Vierecke Δ und (C_i, C_k, C_l, C_m) , gerade diejenigen sechs zweiten Minoren, von deren Elementen keines zwei gleiche Indices trägt; zwischen diesen Minoren selbst, bei beliebig gegebenen e_{ik} , muß die fragliche Identität stattfinden.

Eliminiert man, unter Bevorzugung der Index i , einmal aus den drei Gleichungen $A_{ik} = 0$, $A_{il} = 0$, $A_{im} = 0$ die Größen e_{ik} , e_{il} , e_{im} , so erscheint als Resultantengleichung:

$$(16) \quad e_{kl} e_{lm} e_{mk} - e_{lk} e_{ml} e_{km} = 0.$$

Dieselbe Gleichung (16) erhält man aber auch durch Elimination der Größen e_{ki} , e_{li} , e_{mi} aus den drei übrigen Gleichungen $A_{ki} = 0$, $A_{li} = 0$, $A_{mi} = 0$.

Nunmehr operiere man mit den linken Seiten¹⁾ A_{ik} , A_{il} , A_{im} ; A_{kl} , A_{lm} , A_{mk} der Gleichungen selbst, geordnet nach den e_{ik} , e_{il} , e_{im} resp. e_{ki} , e_{li} , e_{mi} :

$$(17a) \quad \begin{cases} A_{ik} \equiv A_{ki} \equiv & + e_{il} e_{km} - e_{im} e_{kl} \\ A_{il} \equiv A_{li} \equiv - e_{lk} e_{lm} & + e_{im} e_{lk} \\ A_{im} \equiv A_{mi} \equiv + e_{ik} e_{ml} - e_{il} e_{mk} \end{cases}$$

$$(17b) \quad \begin{cases} A_{lm} \equiv A_{ml} \equiv & + e_{li} e_{mk} - e_{mi} e_{lk} \\ A_{km} \equiv A_{mk} \equiv - e_{ki} e_{ml} & + e_{mi} e_{kl} \\ A_{kl} \equiv A_{lk} \equiv + e_{ki} e_{lm} - e_{li} e_{km} \end{cases}$$

wo jeweils zwei Ausdrücke A_{ik} und A_{lm} durch Vertauschung beider Indices in jedem Faktor e aus einander hervorgehen. Setzt man zur Abkürzung:²⁾

$$(18) \quad R \equiv e_{ml} e_{lk} e_{km} - e_{lm} e_{mk} e_{kl},$$

und multipliziert die drei Ausdrücke (17a) resp. mit $e_{mk} e_{lk}$, $e_{mk} e_{kl}$, $e_{km} e_{lk}$, andererseits die drei Ausdrücke (17b) resp. mit $e_{km} e_{kl}$, $e_{km} e_{lk}$, $e_{mk} e_{kl}$, und addiert beidemale, so kommt

$$(19) \quad \begin{cases} A_{ik} e_{mk} e_{lk} + A_{il} e_{mk} e_{kl} + A_{im} e_{km} e_{lk} = e_{lk} R, \\ A_{lm} e_{km} e_{kl} + A_{km} e_{km} e_{lk} + A_{kl} e_{mk} e_{kl} = - e_{ki} R, \end{cases}$$

und damit, durch Elimination von R , die gewünschte Identität, zunächst in der Gestalt:

$$[k, i] \equiv e_{ki} \{ A_{ik} e_{mk} e_{lk} + A_{il} e_{mk} e_{kl} + A_{im} e_{km} e_{lk} \} \\ + e_{ik} \{ A_{lm} e_{km} e_{kl} + A_{km} e_{km} e_{lk} + A_{kl} e_{mk} e_{kl} \} \equiv 0.$$

Diese läßt sich sofort, durch bloße Gliederumstellung, auch in die folgenden Gestalten bringen:

$$[k, l] \equiv e_{kl} \{ A_{li} e_{ki} e_{mk} + A_{lk} e_{ik} e_{mk} + A_{lm} e_{ik} e_{km} \} \\ + e_{lk} \{ A_{km} e_{ik} e_{km} + A_{im} e_{ki} e_{km} + A_{ik} e_{ki} e_{mk} \} \equiv 0,$$

$$[k, m] \equiv e_{km} \{ A_{mi} e_{ki} e_{lk} + A_{mk} e_{ik} e_{lk} + A_{ml} e_{ik} e_{kl} \} \\ + e_{mk} \{ A_{kl} e_{ik} e_{kl} + A_{il} e_{ki} e_{kl} + A_{ik} e_{ki} e_{lk} \} \equiv 0.$$

Das Bildungsgesetz der linken Seiten von $[k, i]$, $[k, l]$, $[k, m]$ liegt auf der Hand.

¹⁾ Haben beide Tetraeder eine entsprechende Ecke gemein, etwa die i te, so ist $e_{ik} = e_{il} = e_{im} = 0$ und es verschwinden A_{ik} , A_{il} , A_{im} ; in der Tat treffen sich ja je zwei entsprechende Kanten $(A_i A_k)$, $(E_i E_k)$; $(A_i A_l)$, $(E_i E_l)$; $(A_i A_m)$, $(E_i E_m)$ in $A_i = E_i$. Die erste Identität (19) verliert dann ihre Bedeutung, da ihre Glieder einzeln verschwinden. Zwischen A_{lm} , A_{km} , A_{kl} besteht keine lineare Identität; in der Tat hat man es mit zwei Dreiecken (A_k, A_l, A_m) , (E_k, E_l, E_m) im Raume zu tun, von denen sehr wohl zweimal entsprechende Kanten sich treffen können, ohne daß es mit dem dritten Paare der Fall ist.

²⁾ Die genauere Bezeichnung für R wäre $R^{(i)}$.

Zugleich erkennt man, daß bei geeigneter Modifikation der vorgenommenen Eliminationsoperationen noch drei weitere Typen der Identität entstehen: $[l, i] \equiv [l, k] \equiv [l, m] = 0$; $[m, i] \equiv [m, k] \equiv [m, l] = 0$; $[i, k] \equiv [i, l] \equiv [l, m] = 0$.

Die somit resultierenden vier formal verschiedenen Typen der in Rede stehenden Identität lassen sich etwa in folgender Anordnung zusammenstellen:

$$(II) \quad \left\{ \begin{array}{l} [i, k] \equiv e_{ik} \{ A_{ki} e_{li} e_{mi} + A_{kl} e_{il} e_{mi} + A_{km} e_{im} e_{li} \} \\ \quad + e_{ki} \{ A_{lm} e_{il} e_{im} + A_{im} e_{li} e_{im} + A_{il} e_{mi} e_{il} \} \equiv 0, \\ [k, i] \equiv e_{ki} \{ A_{ik} e_{lk} e_{mk} + A_{il} e_{kl} e_{mk} + A_{im} e_{km} e_{lk} \} \\ \quad + e_{ik} \{ A_{lm} e_{kl} e_{km} + A_{km} e_{lk} e_{km} + A_{kl} e_{mk} e_{kl} \} \equiv 0, \\ [l, m] \equiv e_{lm} \{ A_{mi} e_{li} e_{kl} + A_{mk} e_{il} e_{il} + A_{il} e_{ul} e_{kl} \} \\ \quad + e_{ml} \{ A_{kl} e_{il} e_{lk} + A_{il} e_{kl} e_{li} + A_{ik} e_{li} e_{lk} \} \equiv 0, \\ [m, l] \equiv e_{ml} \{ A_{li} e_{mi} e_{km} + A_{lk} e_{mk} e_{im} + A_{lm} e_{im} e_{km} \} \\ \quad + e_{im} \{ A_{km} e_{im} e_{mk} + A_{im} e_{km} e_{mi} + A_{ik} e_{mi} e_{mk} \} \equiv 0. \end{array} \right.$$

Aus diesem Schema heraus, in Verbindung mit den Werten (17) der Ausdrücke A_{ik} etc. lassen sich auch leicht die besonderen Fälle diskutieren, wenn einige der e verschwinden. Es ist ohne Schwierigkeit zu ersehen, daß, vorausgesetzt, daß alle A verschwinden, mit irgend einem der e immer zugleich mehrere derselben verschwinden.

Dabei würde das Verschwinden von e_{ik} z. B. geometrisch aussagen, daß der Punkt E_i auf der Ebene α_k von T liegt, oder auch, für die ursprünglichen Tetraeder T und Δ , daß die Ebenen α_k und δ_k (D_i , D_l , D_m) konjugiert sind. Indem wir solche besonderen Fälle beiseite lassen, sprechen wir den Inhalt der Identität (II) in dem Satze aus:

III. „Werden die Eckpunkte und damit die Kanten zweier Vierecke im Raume einander zugeordnet (von denen das eine auch einebenes sein kann) und treffen sich fünf entsprechende Kanten, so treffen sich auch die sechsten. Desgleichen, sind fünf entsprechende Kanten konjugiert in bezug auf irgend eine gegebene Fläche zweiter Klasse, so auch die sechsten.“

Aber auch die beiden Relationen (19) erlauben eine einfache geometrische Bedeutung.

Denkt man sich die Ecken E_k , E_l , E_m von A_i aus auf die Ebene α_i projiziert und die Projektionen mit $E_k^{(i)}$, $E_l^{(i)}$, $E_m^{(i)}$ bezeichnet, so sind die Koordinaten x_k , x_l , x_m derselben resp. angegeben durch die Größen e_{kk} , e_{kl} , e_{km} ; e_{lk} , e_{ll} , e_{lm} ; e_{mk} , e_{ml} , e_{mm} . Verbindet man diese Punkte $E_k^{(i)}$, $E_l^{(i)}$, $E_m^{(i)}$ resp. mit den Punkten

A_k, A_l, A_m , so sind die Gleichungen der Verbindungsgeraden (in der Ebene α_i):

$$(20) \quad x_l e_{km} - x_m e_{kl} = 0, \quad x_m e_{lk} - x_k e_{lm} = 0, \quad x_k e_{ml} - x_l e_{mk} = 0.$$

Aber die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die drei Geraden (20) sich in einem Punkte treffen, wird eben durch das Verschwinden von R (18) geliefert.

Die beiden Dreiecke (A_k, A_l, A_m) und $(E_k^{(i)}, E_l^{(i)}, E_m^{(i)})$ befinden sich dann in perspektiver Lage; das nämliche¹⁾ gilt also von den beiden Dreikanten, die jene Dreiecke von der Ecke A_i aus projizieren, d. h. die drei Ebenen, die je zwei zugeordnete Kanten verbinden, schneiden sich in einer und derselben Geraden, und die drei Geraden, in denen sich je zwei zugeordnete Ebenen schneiden, liegen in einer und derselben Ebene.

Demnach sagt die zweite Relation (19) aus:²⁾

IV. „Treffen sich je zwei zugeordnete Kanten zweier Dreiecke im Raume (die nicht derselben Ebene angehören), so werden die beiden Dreiecke von jedem Raumpunkte aus durch zwei Dreikante in perspektiver Lage projiziert. Umgekehrt, werden zwei Dreiecke im Raume von irgend einem Raumpunkte aus durch zwei Dreikante in perspektiver Lage projiziert, und treffen sich zweimal zwei zugeordnete Kanten der Dreiecke, so auch die letzten, und die beiden Dreiecke werden von jedem Raumpunkte aus durch zwei Dreikante in perspektiver Lage projiziert.“

Der hiezu dualistische Satz entspricht genau der ersten Relation (19).

Bisher war das eine der beiden Vierecke T und (E_i, E_k, E_l, E_m) , nämlich dasjenige, T , dessen Ecken sicher nicht in einer Ebene liegen sollten, als Koordinatentetraeder gewählt worden. Nunmehr soll die (II) entsprechende Identität für zwei beliebige Vierecke $A (A_i, A_k, A_l, A_m)$ und $B (B_i, B_k, B_l, B_m)$, von denen das eine auch ein ebenes sein darf, aufgestellt werden.

Geometrisch ist klar, daß die frühere Bedingung $A_{ik} = 0$, da sie jetzt aussagt, daß sich die zugeordneten Kanten $(A_i, A_k), (B_i, B_k)$ treffen sollen, übergeht in:

$$(21) \quad \{i, k\} \equiv \{k, i\} \equiv \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ik} & a_{il} & a_{im} \\ a_{ki} & a_{kk} & a_{kl} & a_{km} \\ b_{ii} & b_{ik} & b_{il} & b_{im} \\ b_{ki} & b_{kk} & b_{kl} & b_{km} \end{vmatrix} = 0;$$

¹⁾ Der Ausdruck „Zwei Dreikante befinden sich in perspektiver Lage, wenn“ ist der Kürze halber von dem entsprechenden Verhalten zweier Dreiecke in einer Ebene übertragen worden, wenn er auch sprachlich Bedenken verursacht.

²⁾ Das Treffen zweier Kanten kann hier wiederum überall durch das Konjugiertsein derselben in bezug auf eine Fläche zweiter Klasse ersetzt werden.

und desgleichen, daß die frühere Bedingung $e_{ik} = 0$, da sie jetzt aussagt, daß der Punkt B_i auf der Ebene $\alpha_k(A_i, A_l, A_m)$ liegen soll, übergeht in:

$$(22) \varepsilon_{ik} \equiv \begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ik} & b_{il} & b_{im} \\ a_{ii} & a_{ik} & a_{il} & a_{im} \\ a_{li} & a_{lk} & a_{ll} & a_{lm} \\ a_{mi} & a_{mk} & a_{ml} & a_{mm} \end{vmatrix} \equiv b_{ii} \alpha_{ki} + b_{ik} \alpha_{kk} + b_{il} \alpha_{kl} + b_{im} \alpha_{km} = 0,$$

wenn α_{ik} die erste Minore von a_{ik} in der Determinante $A = |a_{ik}|$ bedeutet.

Somit sind in der obigen speziellen Identität (II) die A_{ik} , e_{ik} nunmehr zu ersetzen durch Ausdrücke, die den $\{i, k\}$, ε_{ik} in (21, 22) proportional sind, und es handelt sich nur noch um die Bestimmung dieser Proportionalitätsfaktoren. Man gelangt dazu vermöge einer linearen Koordinatentransformation, die das eine der beiden Vierecke, A — das nicht in ein ebenes ausarten sollte — zum Koordinatentetraeder macht.

Seien die Punkte A_i, B_i auf ein ursprüngliches Koordinatensystem (ξ) bezogen, so setze man, wenn das neue System mit (x) bezeichnet wird:

$$(23) \quad \xi_r = a_{ir} x_i + a_{kr} x_k + a_{lr} x_l + a_{mr} x_m \quad (r = i, k, l, m).$$

Dadurch gehen in der Tat die Punkte A_i über in die Ecken des neuen Koordinatentetraeders der x . Die (23) inverse Transformation lautet:

$$(24) \quad x_r = a_{ri} \xi_i + a_{rk} \xi_k + a_{rl} \xi_l + a_{rm} \xi_m \quad (r = i, k, l, m).$$

Gehen also vermöge (23) oder auch (24) die alten Punkte B_i über in die neuen Punkte E_i , so ist gemäß (24):

$$(25) \quad e_{sr} = a_{ri} b_{si} + a_{rk} b_{sk} + a_{rl} b_{sl} + a_{rm} b_{sm} \quad (r, s = i, k, l, m).$$

Dann gehen aber, zufolge einfacher Determinantensätze, die früheren Ausdrücke A_{ik} (17), bis auf den Faktor $A = |a_{ik}|$, über in die Ausdrücke $\{i, k\}$ (21):

$$(26) \quad A_{ik} = A \cdot \{i, k\},$$

während die früheren Größen e_{ik} direkt zu den Größen ε_{ik} (22) werden. Es gilt somit der Satz:

V. „Man hat nur in irgend einer der Identitäten (II) die A_{ik} , e_{ik} resp. durch die in (21, 22) angegebenen $\{i, k\}$, ε_{ik} zu ersetzen, um die entsprechende Identität für zwei beliebige Vierecke A (A_i) und B (B_i) zu erhalten.“

Rein algebraisch lautet der Satz:

„Liegen zwei vierreihige Determinanten $|a_{ik}|$, $|b_{ik}|$ vor, von denen eine, etwa die erste, nicht verschwinden soll, und bildet

man (in dieser Reihenfolge) je aus der i^{ten} und k^{ten} Vertikale (oder Reihe) der ersten und der i^{ten} und k^{ten} Vertikale (oder Reihe) der zweiten eine neue vierreihige Determinante $\{i, k\}$, so sind diese sechs Determinanten $\{i, k\}$ an die lineare Identität des Satzes V gebunden, so daß — wenn man das Verschwinden gewisser der ε_{ik} ausschließt — das Verschwinden von irgend fünf der sechs Determinanten dasjenige der letzten bedingt.“

Der durch Satz V charakterisierten Identität läßt sich eine symmetrische Gestalt geben, wenn man mit Rücksicht auf die geometrische Bedeutung von $\varepsilon_{ik} = 0$, oder was auf dasselbe hinauskommt, auf die in (22) angegebene Darstellung:

$$(22') \quad \varepsilon_{ik} = b_{ii} \alpha_{ki} + b_{ik} \alpha_{kk} + b_{il} \alpha_{kl} + b_{im} \alpha_{km} \equiv (B_i, \alpha_k),$$

wo die $\alpha_{ki}, \alpha_{kk}, \alpha_{kl}, \alpha_{km}$ geometrisch die Koordinaten der Ebene $\alpha_k (A_i, A_l, A_m)$ sind, von vornherein die beiden Vierecke A und B dualistisch gegenüberstellt.

Danach denke man sich das Viereck A durch die Koordinaten $\alpha_{ir} (i, r = i, k, l, m)$ seiner Ebenen, das Viereck B, wie oben durch die Koordinaten $b_{ir} (i, r = i, k, l, m)$ seiner Ecken gegeben. Dann erscheint ε_{ik} (22) als bilineare Invariante (B_i, α_k) der beiden Linearformen, deren Verschwinden den Punkt B_i resp. die Ebene α darstellt. Anderseits wird der Ausdruck $\{i, k\}$ (21), wenn man die Strahlenkoordinaten $p_{rs}^{(ik)} = \begin{vmatrix} \alpha_{ir} & \alpha_{is} \\ \alpha_{kr} & \alpha_{ks} \end{vmatrix}$, $q_{tu}^{(ik)} = \begin{vmatrix} b_{it} & b_{iu} \\ b_{kt} & b_{ku} \end{vmatrix}$ der Kanten $(A_i, A_k), (B_i, B_k)$ einführt, die bilineare Invariante der beiden speziellen linearen Komplexe jener Kanten:

$$(21') \quad \{i, k\} = \Sigma \Sigma p_{rs}^{(ik)} q_{tu}^{(ik)} \quad (r, s, t, u \text{ zyklisch} = i, k, l, m).$$

Bedient man sich nunmehr der Achsenkoordinaten der Kante $(A_i, A_k) = (\alpha_i, \alpha_m)$, nämlich der Größen $\pi_{tu}^{(lm)} = \begin{vmatrix} \alpha_{lt} & \alpha_{lu} \\ \alpha_{mt} & \alpha_{mu} \end{vmatrix}$, so nimmt $\{i, k\}$ die Gestalt an:

$$(21'') \quad \{i, k\} = \Sigma \Sigma \pi_{tu}^{(lm)} q_{tu}^{(ik)}.$$

Demnach gilt als Modifikation des Satzes V:

V'. „Denkt man sich von den beiden Vierecken A und B das eine, B, durch die Koordinaten seiner Ecken, das andere, A, durch die Koordinaten seiner Ebenen dargestellt, und ersetzt demgemäß in der zwischen den Kanten zweier Tetraeder bestehenden speziellen Identität (II) die A_{ik} durch die Ausdrücke $\{i, k\}$ (21''), und die e_{ik} durch die Ausdrücke ε_{ik} (22'), so nimmt die Identität eine für beide Vierecke A, B symmetrische Gestalt an.“

Endlich kann auf Grund dieses Satzes die Identität (II) auch maßgeometrisch gedeutet werden. Denkt man sich alles auf ein

ursprüngliches rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, und zwar die Gleichungen der Ebenen α_k von A in der Hesseschen Normalform gegeben, so werden die Größen ε_{ik} (22') die Längen der Lote, die man von Ecken B_i auf die Ebenen α_k fallen kann, und die Ausdrücke $\{i, k\}$ (21'') die Momente je zweier zugeordneter Kanten (A_i, A_k) , (B_i, B_k) .

Die Lote sind natürlich auch ersetzbar durch die anderen, die man von den Ecken A_i auf die Ebenen β_k von B fallen kann.

In dem besonderen Falle, daß das Viereck B in ein ebenes ausartet, wird, wenn unter η_{ik} der zu (22') analoge Ausdruck (A_i, β_k) verstanden wird, da jetzt alle vier Ebenen β_k in eine einzige zusammenfallen,

$$(27) \quad \eta_{ik} = \eta_{il} = \eta_{im} = \eta_i; \text{ etc.}$$

und die Identität (II) nimmt die einfache Gestalt an:

$$(II') \quad \Sigma \{i, k\} \eta_i \eta_m = 0.$$

In dem obigen Beweise der auf zwei beliebige Vierecke A, B ausgedehnten Identität (II) war vorausgesetzt, daß wenigstens das eine der beiden, etwa A, nicht in ein ebenes ausarten solle. Da aber die Identität für im übrigen willkürliche Werte der Koordinaten beider Punktsquadrupel A, B erfüllt ist, so muß sie, nach einem algebraischen Grundsatz, bestehen bleiben, wenn auch beide Vierecke je in einer Ebene liegen, da dann weder die $\{i, k\}$ (21) noch die ε_{ik} (22) einzeln verschwinden; ausgeschlossen bleibt allein der Fall (s. u.), daß auch die Ebenen beider Vierecke zusammenfallen, da dies das Verschwinden sämtlicher $\{i, k\}$ nach sich ziehen würde.

Es ist aber nützlich, auch für zwei Vierecke, von denen eines bereits als ein ebenes angenommen wird, den Beweis der zugehörigen Identität so zu führen, daß den Koordinaten der Ecken des zweiten Viereckes keine Beschränkung hinsichtlich des etwaigen Verschwindens ihrer Determinante auferlegt wird.

Es seien die Ecken des ebenen Viereckes A in der Ebene $x_m = 0$ gelegen, und zwar A_i, A_k, A_l als Koordinatenecken, während die vierte Ecke durch die Koordinaten $\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l, 0$ festgelegt sei; die Koordinaten der Ecken B_i von B seien wie bisher mit $b_{ii}, b_{ik}, b_{il}, b_{im}$ bezeichnet.

Bedient man sich noch der Abkürzung $b_{rm} = b_r$ ($r = i, k, l, m$), so berechnen sich gemäß (21), die sechs Ausdrücke $\{i, k\}$ zu:

$$(28) \quad \begin{cases} \{i, k\} = + b_{ii} b_k - b_{ki} b_i \\ \{k, l\} = - b_{li} b_k + b_{kl} b_i \\ \{l, i\} = + b_{lk} b_i - b_{il} b_k \\ \{i, m\} = \lambda_k (b_{il} b_m - b_{ml} b_i) - \lambda_l (b_{ik} b_m - b_{mk} b_i) \\ \{k, m\} = \lambda_l (b_{ki} b_m - b_{mi} b_k) - \lambda_i (b_{kl} b_m - b_{ml} b_k) \\ \{l, m\} = \lambda_i (b_{lk} b_m - b_{mk} b_l) - \lambda_k (b_{li} b_m - b_{mi} b_l) \end{cases}$$

Weiter erhält man, gemäß (22), für die ε_{ik} die Werte:

$$(29) \quad \begin{cases} \varepsilon_{ik} = \lambda_k b_i, & \varepsilon_{il} = \lambda_l b_i, & \varepsilon_{ik} = -b_i, \\ \varepsilon_{ki} = \lambda_i b_k, & \varepsilon_{kl} = \lambda_l b_k, & \varepsilon_{km} = -b_k, \\ \varepsilon_{li} = \lambda_i b_l, & \varepsilon_{lk} = \lambda_k b_l, & \varepsilon_{lm} = -b_l, \\ \varepsilon_{mi} = \lambda_i b_m, & \varepsilon_{mk} = \lambda_k b_m, & \varepsilon_{ml} = \lambda_l b_m. \end{cases}$$

Damit geht für den vorliegenden Fall die linke Seite der Identität (II), etwa nach dem Typus $[i, k]$, abgesehen von dem Faktor $\lambda_i b_i$, über in¹⁾:

$$(30) \quad [i, k] \equiv \lambda_k [\{k, i\} \lambda_i b_l b_m + \{k, l\} \lambda_l b_i b_m - \{k, m\} b_i b_l] \\ + b_k \{-\{l, m\} \lambda_l b_i - \{i, m\} \lambda_i b_l + \{i, l\} \lambda_i \lambda_l b_m\},$$

wo für die $\{k, i\}$ etc. die Werte (28) zu substituieren sind.

Aus der ersten eckigen Klammer rechts, die in λ_k multipliziert ist, läßt sich noch der Faktor b_k herausziehen; der andere Faktor wird

$$(31) \quad b_i \lambda_i (b_{il} b_m - b_{mi} b_l) - b_i \lambda_l (b_{li} b_m - b_{mi} b_l).$$

Aus der zweiten eckigen Klammer, die in b_k multipliziert ist, läßt sich noch der Faktor λ_k herausziehen; der verbleibende Faktor ist dann genau das Negative des Ausdrucks (31).

Damit ist in der Tat das identische Verschwinden der Simultan-invariante $[i, k]$ (21) eines ebenen Viereckes A und eines beliebigen Vierecks B direkt nachgewiesen.

Wie oben betont, blieb bisher nur der Fall ausgeschlossen, daß das Viereck B so in ein ebenes ausartet, daß die Ebenen beider Vierecke zusammenfallen, da dann die Glieder des Ausdruckes $[i, k]$ einzeln verschwinden. Nun ist es aber gerade ein Fundamentalsatz bei v. Staudt,²⁾ — der ihm dazu dient, den Begriff des Harmonischen unabhängig von Maßbegriffen zu entwickeln — daß für zwei ebene Vierecke in derselben Ebene die Eigenschaft besteht:

„Ordnet man die Punkte und damit auch die Kanten (Seiten) zweier Vierecke in derselben Ebene einander zu und liegen die Schnittpunkte von fünf Paaren entsprechender Kanten auf ein und derselben Geraden, so gehört dieser auch der Schnittpunkt des sechsten Paares an.“

Diese Eigenschaft zweier Vierecke in ein und derselben Ebene läßt sich aus der entsprechenden zweier ebener Vierecke in verschiedenen Ebenen nach v. Staudt direkt durch einen Grenzprozeß herleiten, indem man etwa die eine der beiden Ebenen um ihre Schnittachse mit der anderen so lange dreht, bis sie mit der letzteren zusammenfällt.

¹⁾ Legt man den Koordinaten $\lambda_i, \lambda_k, \lambda_l, 0$ der vierten Ecke von A, was erlaubt ist, die kanonischen Werte $-1, -1, -1, 0$ bei, so vereinfacht sich der Ausdruck $[i, k]$ (30) zu: $\Sigma \{i, k\} b_l b_m$, in Übereinstimmung mit (II').

²⁾ Geometrie der Lage, p. 40.

Um so bemerkenswerter scheint es, daß die für zwei ebene Vierecke in derselben Ebene gültige Identität, die der algebraische Ausdruck des von Staudtschen Satzes ist, von wesentlich anderem Charakter ist, als die von uns oben für zwei Vierecke im Raume aufgestellte. Wir kommen gleich darauf zurück.

Verfolgt man die für den Fall der Ebene gültige Identität weiter, so gelangt man zu folgendem geometrischen Kriterium für zwei Vierecke, bei denen der v. Staudtsche Satz eintritt:

„Damit zwei punktweise einander zugeordnete Vierecke in ein und derselben Ebene in der v. Staudtschen Beziehung stehen, daß sich fünf Paare entsprechender Kanten beider Vierecke — und damit auch das sechste Paar — auf ein und derselben Geraden begegnen, ist notwendig und hinreichend: erstens, daß sich beide Vierecke — ganz wie im Raume — in perspektiver Lage befinden; zweitens überdies, daß sich auch die beiden Hauptdreiecke¹⁾ der Vierecke in perspektiver Lage befinden, und zwar so, daß ihr Perspektivitätszentrum mit dem der beiden Vierecke zusammenfällt.“

Diese Entwicklungen für den Fall der Ebene habe ich gleichfalls vollständig durchgeführt und werde darauf an anderer Stelle eingehen. Hier sei nur auf folgende wesentliche Gesichtspunkte hingewiesen.

Der oben erwähnte Grenzprozeß, vermöge dessen die beiden ursprünglich verschiedenen Ebenen zweier Vierecke koinzidieren, läßt sich noch in mannigfaltiger Weise variieren. Es sind aber dabei zwei wesentlich verschiedene Hauptfälle zu unterscheiden.

Entweder bleibt bei der Koinzidenz der beiden Ebenen deren Achse eine völlig bestimmte Gerade, oder aber diese Achse wird (in der Grenzebene) völlig unbestimmt.

Im ersteren Falle kann man etwa die beiden Ebenen durch die Gleichungen $E=0$ und $E+\varepsilon H=0$ darstellen, und dann, bei festgehaltenen E, H , den Parameter ε gegen Null konvergieren lassen. Dann läßt sich der Grenzprozeß an der Identität (II) so ausführen, daß der Faktor ε vor die linke Seite der Identität tritt, und diese somit im Grenzfalle völlig erhalten bleibt. Dann gelangt man direkt zum v. Staudtschen Satze für zwei ebene Vierecke.

¹⁾ Der innere Grund dieser Erscheinung tritt hervor, wenn man den leicht beweisbaren Satz benützt, daß zwei perspektive Vierecke einer Ebene E stets — und zwar noch auf ∞^4 Arten — als Schnitt eines vollständigen räumlichen Sechsecks mit der Ebene E betrachtet werden können. Ist O das Perspektivitätszentrum, so hat man nur zwei Raumpunkte 1, 2 beliebig, aber so zu wählen, daß ihre Kante durch O hindurchgeht; dann sind die vier übrigen Ecken 3, 4, 5, 6 eindeutig bestimmt.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die v. Staudtsche Lage beider ebenen Vierecke ist dann die, daß die vier Raumpunkte 3, 4, 5, 6 einer und derselben Ebene angehören. Dann wird die angegebene Eigenschaft der beiden Hauptdreiecke eine augenscheinliche.

Im zweiten Falle dagegen, wo die Achse der beiden Ebenen E, H im Grenzfalle innerhalb der Ebene E ganz unbestimmt wird, versagt die Identität (II) in der Tat. Denn jetzt ist die geometrische Fragestellung für die Figur der beiden ebenen Vierecke eine ganz andere geworden. Bezeichnet man wieder die zugeordneten Seiten beider Vierecke mit $1, 2, \dots 6; 1', 2', \dots 6'$, so verbinde man die Schnittpunkte irgend zweier Paare, z. B. $(1, 1'), (2, 2')$ durch eine Gerade g . Sodann stelle man sukzessive die Bedingungen auf, daß die Schnittpunkte $(3, 3'), (4, 4'), (5, 5'), (6, 6')$ auf g liegen: diese Bedingungen seien mit $[123]=0, [124]=0, [125]=0, [126]=0$ bezeichnet. Dann muß von diesen vier Bedingungen je eine eine Folge der drei übrigen sein, d. h. zwischen den vier linken Seiten findet nunmehr eine lineare Identität statt, die jetzt das Äquivalent des v. Staudtschen Satzes wird. Die weitere Entwicklung lehrt dann, daß die neue Fragestellung weit tiefer in die Natur der Konfiguration führt als die ursprüngliche.

Die Identität (II) läßt sich, geometrisch wie algebraisch nach verschiedenen Richtungen ausdehnen. Die Mannigfaltigkeit der auftretenden Beziehungen wird indessen gleich eine so große, daß der Gegenstand an Interesse merklich verliert.¹⁾

Indem wir zu dem eingangs dieses Paragraphen aufgestellten Satze über die beiden Vierecke T und Δ zurückkehren, bemerken wir, daß, wie in § 1, der geführte Beweis gültig bleibt, wenn die zu Gerade gelegte Fläche zweiter Klasse $\Gamma(1)$ ersetzt wird durch eine beliebige Ebenenkorrelation:

$$(32) \quad \Sigma \Sigma u_i v_k c_{ik} = 0 \left(c_{ik} \begin{matrix} \geq \\ \leq \end{matrix} c_{ki} \right).$$

Stehen demnach zwei Tetraeder $T(A_i)$ und $H(Y_i)$ in der besonderen Beziehung, daß sich die durch die Ecken Y_i von H gehenden, zu den entsprechenden Ebenen α_i von T bezüglich der Korrelation (32) konjugierten²⁾ Geraden p_i in einem Punkte $P(y)$ treffen, so treffen sich auch die durch die Ecken A_i von T gehenden, zu den entsprechenden Ebenen v_i von H konjugierten Geraden g_i in einem Punkte $Q(z)$, und die reziprok entsprechenden Kanten beider Tetraeder sind je zu einander konjugiert.

Die Beziehung der beiden Punkte $P(y), Q(z)$ soll algebraisch dargestellt werden.

Bedeutet wieder (C_i, C_k, C_l, C_m) das Poltetraeder²⁾ von T bezüglich (32), so muß die Gerade PY_r ($r = i, k, l, m$) je durch den

¹⁾ Liegen z. B. zwei fünfzeilige Determinanten vor und man bildet jeweils unter Weglassung einer Reihe, aus der i ten und k ten Kolonne beider verbleibenden Matrices eine vierzeilige Determinante, so ist das Verschwinden aller dieser 50 Determinanten äquivalent mit 20 Bedingungen, von denen wiederum 9 eine Folge der übrigen 11 sind. Geometrisch sagen diese Bedingungen aus, daß zwei Fünfecke im R_4 perspektiv liegen.

²⁾ Es wird kein Mißverständnis veranlassen, wenn der Kürze halber die Worte „konjugiert, Pol“ von der ursprünglichen Polarität (1) auf die entsprechenden Begriffe bei der Korrelation (32) übertragen werden.

Punkt C_r gehen, d. h. es müssen, in Verallgemeinerung der Formeln (2), Relationen bestehen von der Form:

$$(33) \quad Y_{rs} = \lambda_r y_s - \mu_r c_{rs} \quad (r, s = i, k, l, m).$$

Um den dem Punkte $P(y)$ zugeordneten Punkt $Q(z)$ zu bestimmen, dient eine völlig analoge Rechnung, wie die zu Beginn von § 1 durchgeführte, und man erhält in Verallgemeinerung der Formeln (1) daselbst:

$$(I') \quad z_i : z_k : z_l : z_m = \frac{\lambda_i}{\mu_i} : \frac{\lambda_k}{\mu_k} : \frac{\lambda_l}{\mu_l} : \frac{\lambda_m}{\mu_m}$$

d. h. die Koordinaten von $Q(z)$ sind den nicht homogenen Parametern $\frac{\lambda}{\mu}$ der Punkte Y_r auf den Geraden p_r , die den Punkt $P(y)$ mit den vier Punkten C_r ($r = i, k, l, m$) verbinden, proportional.

Soll insbesondere der Punkt $Q(z)$ ein beliebig vorgegebener sein, so sind die $\frac{\lambda_r}{\mu_r}$ bis auf einen willkürlichen Faktor ρ bestimmt; es gehören also noch ∞^1 Punktequadrupel Y_r dazu, die auf den Geraden p_r projektive Punktreihen beschreiben. Speziell kann man den Punkt $Q(z)$ mit dem in § 1 bestimmten zusammenfallen lassen oder auch mit dem Ausgangspunkte $P(y)$ selbst.

Des weiteren läßt sich die Auffassung der Figur variieren, wie in § 1; man nehme das Tetraeder T , den Punkt $P(y)$ und das Tetraeder H der Punkte Y_r als beliebig gegeben an und suche die zugehörigen Korrelationen (32). Die Koeffizienten c_{rs} in (32) erscheinen jetzt als binäre Linearformen der Y_{rs} und y_s :

$$(33') \quad c_{rs} = l_r y_s + m_r Y_{rs} \quad (r, s = i, k, l, m),$$

so daß die bezüglichlichen Korrelationen (32) noch eine ∞^7 lineare Schar bilden mit den acht homogenen Parametern l_r, m_r .

Soll eine derartige Korrelation (32) insbesondere zu einem Polarsystem Γ (1) werden, also stets $c_{ik} = c_{ki}$ sein, so involviert das sechs lineare homogene Relationen zwischen den acht Größen l_r, m_r ; jene Bedingungen sind linear unabhängig, denn mittels elementarer Rechnung lassen sich die c_{ik} als binäre Linearformen etwa von l_1 und m_1 berechnen.

Zu irgend einem Tetraeder H gehört also, ganz wie in § 1, zu einem, T einbeschriebenen, noch eine ∞^1 lineare Schar von Flächen zweiter Klasse Γ mit entsprechenden Eigenschaften wie dort; der Punkt $Q(z)$ beschreibt wieder eine Gerade etc.

Die Formeln des § 1 gehen durch Spezialisierung aus den jetzigen (33) hervor, wenn man λ_r proportional mit c_{rr} , μ_r proportional mit y_r wählt. Soll der Punkt $Q(z)$ nebst der Fläche Γ

unverändert bleiben, so lassen sich immer noch die Quotienten $\frac{\lambda_r}{\mu_r} = \frac{c_{rr}}{y_r}$ mit einem beliebigen Faktor ρ versehen, d. h. die Formeln (2) lassen sich ersetzen durch:

$$(2') \quad Y_{rs} = \rho c_{rr} y_s - y_r c_{rs};$$

wie im allgemeinen Falle tritt also an Stelle des einen Tetraeders H die ∞^1 Schar, deren Ecken auf den dortigen Geraden p projektive Punktreihen beschreiben.