Zur Theorie der orthogonalen Substitutionen.

Von

A. Voss in Darmstadt.

Die Theorie der orthogonalen Substitutionen ist bereits vielfach behandelt und durch die berühmten Cayley'schen Formeln, vermöge deren sich die Coefficienten einer allgemeinen orthogonalen Substitution a priori angeben lassen, zu einem gewissen Abschluss gebracht. Es ist bekannt, in welch' enger Beziehung dieselbe zu der weiteren Aufgabe steht, eine quadratische Form in sich selbst zu transformiren (Hermite'sche Transformation), ein Problem, welches nicht allein für drei und vier homogene Variabele eine anschauliche Bedeutung in der Ebene und im Raume, sondern auch namentlich für sechs eine geometrische Repräsentation in der Transformation des Linienraumes findet. Indem ich die Coefficienten der Gleichung einer durch ihre Tangenten dargestellten Fläche zweiten Grades als Coefficienten einer speciellen (symmetrischen) orthogonalen Substitution erkannte, ergab sich Veranlassung gewisse Determinanten solcher Coefficienten genauer zu untersuchen.*) Ich habe seitdem bemerkt, dass eine ganze Reihe, der in einer früheren Arbeit ausgeführten Betrachtungen sich auf orthogonale Substitutionen überhaupt ausdehnen lassen, deren Ausführung den Gegenstand der vorliegenden Arbeit bildet.**)

In § I. sind die bekannten Bedingungen für die Coefficienten a_{ik} einer orthogonalen Substitution aufgestellt, durch welche eine Fläche zweiten Grades in sich transformirt wird, und die Beziehungen zwischen den Elementen entwickelt, welche bei der Transformation fest bleiben. Daran schliesst sich in § II. eine allgemeine Untersuchung der *Unterdeterminantensysteme solcher Substitutionen*, welche, wie ich glaube, geeignet ist, die verschiedenen Fälle, die überhaupt bei ihnen auf-

*, Math. Annalen X.

**) Erst nach Vollendung derselben (Juni 1877) erschien die umfangreiche neueste Arbeit des Herrn Frobenius: „Ueber lineare Substitutionen und bilineare Formen“, Crelle 84, 1.

treten können, a priori übersehen zu lassen. Insbesondere erwähne ich eine dabei hervortretende directe Ableitung der Cayley'schen Formeln selbst.

In dem folgenden § III. sind die quadratischen Formen, welche gleichzeitig durch die Substitution in sich transformirt werden, besprochen, sowie die Gruppe der mit einer gegebenen Substitution vertauschbaren allgemein hergeleitet. Insbesondere habe ich dabei versucht der merkwürdigen Zerlegung der Transformation einer Fläche zweiten Grades im gewöhnlichen Raume, nach welcher man eine jede aus zwei speciellen vertauschbaren Transformationen zusammensetzen kann, bei denen je ein System von Erzeugenden fest bleibt, ein Analogon in höheren Räumen zu geben. § V. untersucht Transformationen von speciellem Charakter, namentlich die uneigentliche, welche als Centralprojection der Fläche in sich selbst von einem beliebigen Punkte aus aufgefasst werden kann, und die symmetrische, bei welcher die Coefficienten a_{ik} und a_{ki} gleich sind. Weiter ist das Problem der Zerlegung der Substitutionen behandelt, namentlich gezeigt, wie jede allgemeine durch eine gewisse Zahl uneigentlicher specieller, d. h. durch wiederholte Centralprojectionen von Punkten aus, die nach einer sehr einfachen Regel gefunden werden können, oder durch zwei symmetrische ersetzt werden können, welch' letztere wieder aus einer Gruppe vertauschbarer Centralprojectionen hervorgehen.

In § VI. sind die besonderen Fälle der Substitutionen bei 2, 3, 4, 6 homogenen Variablen behandelt und geometrisch interpretirt; zugleich habe ich versucht sämtliche Substitutionen dieser Art aufzuzählen. Dabei ergeben sich gewisse Eigenschaften der reciproken Punkt-Ebenentransformation, welche, obwohl in naher Beziehung zu von den Herren Schröter und Rosanes behandelten Fragen stehend, in so allgemeiner Form wohl noch nicht ausgesprochen sind, und die in § VII. direct durch eine allgemeine Untersuchung der Reciprocität bestätigt werden.

Die im Vorigen entwickelten Begriffe gestatteten, die Transformation einer (gewöhnlichen) Fläche zweiten Grades von einem neuen Gesichtspunkte aus zu behandeln. Endlich ist im letzten Paragraphen die Transformation gegebener linearer Formen untersucht, insbesondere die Hermite'sche Transformation eines Kegelschnittes im Raume entwickelt.

§ I.

Die orthogonale Substitution.

Eine orthogonale lineare Substitution bei n homogenen Variablen:

$$(1) \quad y_i = \sum_k a_{ik} x_k$$

ist dadurch charakterisirt, dass

$$(2) \quad \sum y_i^2 = m \sum x_i^2$$

ist. Demnach müssen bekanntlich die Gleichungen:

$$(3) \quad \sum_i a_{ik} a_{il} = 0, \quad \sum_i a_{ik} a_{ik} = m$$

stattfinden. In Folge dessen lassen sich die Gleichungen (1) umkehren, so dass:

$$(4) \quad m x_i = \sum_k y_k a_{ki},$$

womit dann auch:

$$(5) \quad \sum_i a_{ki} a_{li} = 0, \quad \sum_i a_{ki} a_{ki} = m$$

wird. Die Gleichungen (3) oder (5) ergeben für das Quadrat der Substitutionsdeterminante:

$$\Delta = |a_{ik}|,$$

die Gleichung:

$$\Delta^2 = m^n.$$

Mithin hat Δ einen der beiden Werthe $\pm \sqrt{m^n}$. Wir unterscheiden darnach *eigentliche* und *uneigentliche* Substitutionen. Beide spielen bei geradem n , welchen Fall wir vorzugsweise behandeln werden, eine wesentlich verschiedene Rolle, insofern dann eine eigentliche Substitution durch keine blosse Zeichenänderung in eine uneigentliche verwandelt werden kann. Die Wiederholung zweier Substitutionen derselben Art liefert immer eine eigentliche Substitution.

Die Elemente x_i , welche durch die Substitution (1) in sich selbst übergehen, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$(6) \quad y_i = \varrho x_i = \sum a_{ik} x_k,$$

d. h. durch die Wurzeln der Gleichung n^{ten} Grades:

$$|a_{ik} - \varrho| = 0,$$

oder:

$$(7) \quad \Omega(\varrho) = 0,$$

in welcher ϱ nur mit den Gliedern der Hauptdiagonale verbunden ist.

Durch Ausführung der Multiplication beweist man leicht die Relation:*)

$$(8) \quad \Delta \Omega(\varrho) = (-1)^n \varrho^n \Omega\left(\frac{m}{\varrho}\right).$$

Aus (8) folgt die Reciprocität der Wurzeln der Gleichung (7).

*) Brioschi, Liouville's J. XIX, 253; Faa de Bruno, ebenda pag. 320.

Für gerades n ersieht man ferner, dass, wenn $\Delta = -\sqrt{m}^n$, zwei Wurzeln derselben gleich $\pm \sqrt{m}$ sind. Für ungerades n dagegen ist die Wurzel $+\sqrt{m}$ vorhanden, wenn $\Delta = m^{\frac{n}{2}}$, die Wurzel $-\sqrt{m}$ im entgegengesetzten Falle*). Wir nennen diese Wurzeln *ausgezeichnete* oder *besondere* Wurzeln von $\Omega(\varrho) = 0$.

Die nicht ausgezeichneten Wurzelwerthe werden wir immer durch die Buchstaben:

$$r_1, \varrho_1, r_2, \varrho_2, r_3, \varrho_3, \dots$$

bezeichnen, so dass

$$r_i \varrho_i = m.$$

Man betrachte nun irgend zwei Lösungssysteme von (6) α_i, β_i , welche zu den Wurzeln ϱ_a, ϱ_β gehören. Dann ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varrho_a^2 \sum \alpha_i^2 &= m \sum \alpha_i^2, \\ \varrho_a \varrho_\beta \sum (\alpha_i \beta_i) &= m \sum (\alpha_i \beta_i). \end{aligned}$$

Daraus folgt: Sobald ϱ_a nicht einen der besonderen Werthe $\pm \sqrt{m}$ besitzt, ist $\sum \alpha_i^2 = 0$, ferner besteht zwischen je zwei Lösungssystemen, welche zu nicht reciproken Wurzeln gehören, die involutorische (harmonische) Beziehung:

$$\sum \alpha_i \beta_i = 0.$$

Wir werden im Folgenden die Lösungen, welche zu der Wurzel r_i gehören, durch:

$$x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i,$$

die zur reciproken ϱ_i gehörigen durch:

$$y_1^i, y_2^i, \dots, y_n^i,$$

bezeichnen.

Indem wir uns der Bezeichnung $(\alpha\beta)$, (α^2) an Stelle von $\sum \alpha_i \beta_i$, $\sum \alpha_i^2$ bedienen, gelten daher zwischen diesen Systemen die Beziehungen:

$$(3) \quad (x^i x^i) = 0, \quad (x^i y^i) = 0, \quad (y^i y^i) = 0, \quad (x^i y^i) = 1.$$

Sieht man die Variablen x überhaupt als Punkte (Elemente) eines Raumes (Gebietes) von $n - 1$ Dimensionen an, so kann man sagen, die Fläche:

$$f = \sum x_i^2 = 0,$$

sei auf ein Coordinatensystem bezogen, dessen Ecken zu je zweien harmonische Pole derselben bilden. Den Substitutionsprocess kann man

*) Brioschi a. a. O. Baltzer, Det. pag. 184, Aufl. 4.

als *Bewegung* des Raumes bezeichnen, wenn die Substitution eine eigentliche ist, im anderen Falle als eine *symmetrische Umformung**) Setzt man ferner:

$$y_i = \sum a_{ik} x_k, \\ z_i = \sum a_{il} \xi_l,$$

so ist:

$$(yz) = m(x\xi).$$

Die Substitution hat also die Eigenschaft, jedes Polareck der Fläche in ein anderes überzuführen, während f in sich selbst übergeht. Die Coefficienten a_{ik} bilden nach (3) und (5) selbst die Coordinaten zweier Polarecke. Diese letzteren gehen freilich durch die orthogonale Substitution (1) nicht in einander über. Aber durch zweimalige Wiederholung der nämlichen Substitution (1) leitet man die *eigentliche* Substitution:

$$y_i = \sum b_{ik} x_k,$$

her, wo:

$$b_{ik} = \sum a_{il} a_{lk}.$$

Daraus ergibt sich für $x_i = a_{mk}$:

$$y_i = m a_{im}.$$

Jene beiden Polarecke können daher immer durch eine eigentliche Substitution in einander übergeführt werden, d. h. sie sind als einander direct congruent zu betrachten.

Andererseits ist in:

$$y_i = \sum a_{ik} x_k,$$

für $x_k = a_{mk}$

$$y_i = \sum a_{ik} a_{mk} = m [im],$$

wo $[im]$ gleich 0 oder 1, je nachdem i und m verschieden oder gleich sind; so dass die gegebene Substitution das eine der beiden Polarecke in das Fundamentalgebilde der Coordinatenbestimmung überführt.

Nach (6) und (7) bleiben im Allgemeinen n Punkte fest bei der Substitution. Sie bilden bei geradem n und eigentlicher Substitution die Ecken eines von Erzeugenden der Fläche gebildeten Polygons, bei un-eigentlicher Substitution befinden sich dagegen unter ihnen zwei harmonische Pole derselben, welche mit den anderen $n - 2$ Punkten verbunden Tangenten der Fläche liefern**). Bei ungeradem n ist

*) Für ungerades n würden die Bewegungen noch auf eine andere Weise von den symmetrischen Umformungen zu trennen sein. Vgl. Klein, Math. Ann. IV, pag. 602.

***) Frahm, Inauguraldissertation, § 15.

mindestens immer ein nicht auf der Fläche gelegener Punkt festbleibend.

Wir betrachten ferner das Product der beiden Determinanten:

$$\Omega(+\varrho) \times \Omega(-\varrho).$$

Man erhält durch Ausführung der Multiplication, abgesehen von dem Factor ϱ^n , eine Determinante, deren Glieder die $a_{ik} - a_{ki}$ sind, während die Glieder der Hauptdiagonale sämmtlich gleich $\frac{m}{\varrho} - \varrho$ sind. Das heisst: Bei geradem n und uneigentlicher Substitution verschwindet die schiefe Determinante der $a_{ik} - a_{ki}$ sammt ihren ersten Unterdeterminanten. (Bei ungeradem n verschwindet sie natürlich identisch.)

Man kann diesem Verschwinden der Unterdeterminanten in dem gedachten Falle leicht eine geometrische Bedeutung unterlegen. Führt man die nämliche Substitution (1) zweimal hinter einander aus, so erhält man zur Bestimmung der festgebliebenen Punkte die Gleichung n^{ten} Grades:

$$|\varrho a_{ik} - m a_{ki}| = 0.$$

Bei der uneigentlichen Substitution hat dieselbe eine Doppelwurzel $\varrho = m$, welche das Vorhandensein einer ganzen Reihe von Punkten anzeigt, die in sich selbst übergehen. Es ist die lineare Reihe, welche die beiden nicht auf der Fläche gelegenen Punkte verbindet. Die uneigentliche Substitution zweimal hintereinander ausgeführt, liefert also keine eigentliche Substitution von allgemeinem Charakter, sondern eine spezielle Bewegung.*)

Wir untersuchen noch die symmetrische Determinante der quadratischen Form:

$$\sum a_{ik} x_i x_k.$$

Man erhält leicht:

$$(\Omega \varrho)^2 = \Psi(\sigma) 2^n (-1)^n \varrho^n,$$

wo:

$$\Psi(\sigma) = \begin{vmatrix} a_{11} - \sigma & \frac{a_{12} + a_{21}}{2} & \dots & \frac{a_{1n} + a_{n1}}{2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \frac{a_{n1} + a_{1n}}{2} & \cdot & \dots & a_{nn} - \sigma \end{vmatrix}$$

und:

$$\sigma = \frac{\varrho^2 + m}{2\varrho}.$$

Bei eigentlicher Transformation und geradem n ist also Ψ das Quadrat eines Polynoms in σ , da je zwei reciproke Wurzeln auf denselben Werth von σ führen. Es lässt sich leicht zeigen, dass Ψ für jede seiner Doppelwurzeln sammt allen ersten Unterdeterminanten verschwindet.

*) Zwei solche eigentliche Substitutionen ergeben dagegen combinirt eine nicht weiter ausgezeichnete eigentliche Substitution.

Ist z. B.:

$$\varrho_u \alpha_i = \sum a_{ik} \alpha_k,$$

so folgt:

$$\frac{m}{\varrho_u} \alpha_i = \sum a_{ki} \alpha_k,$$

d. h.:

$$\left(\frac{m}{\varrho_u} + \varrho_u \right) \alpha_i = \sum (a_{ik} + a_{ki}) \alpha_k,$$

$$\left(\frac{m}{\varrho_\beta} + \varrho_\beta \right) \beta_i = \sum (a_{ik} + a_{ki}) \beta_k,$$

woraus ersichtlich ist, dass die Gleichungen:

$$2\sigma x_i = \sum (a_{ik} + a_{ki}) x_k$$

eine lineare Reihe von Auflösungen besitzen. Die quadratische Form hat hiernach bei geradem n und eigentlicher Substitution den Charakter:

$$[(11) (11) (11) \dots],$$

sie ist eine von denen, welche durch die Substitution in sich selbst übergeführt werden.

§ II.

Systeme von Unterdeterminanten.

Im vorigen § ist vorausgesetzt, dass die Substitutionen von allgemeinstem Charakter, d. h. sämtliche Wurzeln von $\Omega(\varrho) = 0$ von einander verschieden sind. Die speciellen Fälle orthogonaler Substitutionen sind dadurch charakterisirt, dass von den n Wurzeln irgend welche zusammenfallen, und stufen sich nach der Art und Weise ab, wie die Unterdeterminanten von $\Omega(\varrho)$ für solche vielfache Wurzeln sich verhalten.

Man kann die orthogonalen Substitutionen daher nach der Beschaffenheit der *Elementartheiler* von $\Omega(\varrho)$ classificiren, *insofern mit jeder besonderen Vertheilung derselben eine wesentliche Gruppierung der festbleibenden Elemente verbunden ist. Dabei zeigt sich, dass das Auftreten der Elementartheiler an gewisse Gesetze gebunden ist, welche die Zahl der möglichen Fälle a priori auf eine gewisse kleinste Zahl einzuschränken erlauben, deren Existenz dann freilich noch einer directen Prüfung unterliegen muss.* Diese Gesetze ergeben sich durch eine genauere Betrachtung der Unterdeterminanten von $\Omega(\varrho)$, die wir im Folgenden ausführen werden.

Wir betrachten die k -fach mit beliebigen Grössenreihen $u, v, w, \dots$ vertical und $U, V, W, \dots$ horizontal geränderte Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \dots & a_{1n} & a_1 & c_1 & w_1 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho & a_n & c_n & w_n & \dots \\ U_1 & \dots & U_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ V_1 & \dots & V_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ W_1 & \dots & W_n & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

welche zur Abkürzung durch

$$\left[uvw \dots UVW \dots \right]_{\varrho}$$

bezeichnet werden möge; die Coefficienten der Verbindungen der $uvw \dots UVW \dots$ sind die k^{ten} *Unterdeterminanten* von $\Omega(\varrho)$ (*Unterdeterminanten* $n - k^{\text{ten}}$ Grades).

Multiplicirt man dieselbe mit Δ , so entsteht, wenn

$$\varrho' = \frac{\mu}{\varrho},$$

gesetzt wird:

$$(-1)^{n-k} \varrho^{n-k} \begin{vmatrix} a_{11} - \varrho' & \dots & a_{1n} & \sum U_i a_{1i} & \sum V_i a_{1i} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho' & \sum U_i a_{ni} & \sum V_i a_{ni} & \dots \\ u_1 & \dots & u_n & 0 & 0 & \dots \\ c_1 & \dots & c_n & 0 & 0 & \dots \\ w_1 & \dots & w_n & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix},$$

oder, wenn $\sum U_i a_{ri} = U'_r$, $\sum V_i a_{ri} = V'_r$, die Gleichung:

$$(1) \left[uvw \dots UVW \dots \right]_{\varrho} \Delta = (-1)^{n-k} \varrho^{n-k} \left[U' V' W' \dots uvw \right]_{\varrho'}.$$

Hat demnach die linke Seite den Factor $[\varrho - \varrho_a]^m$, so muss die rechte Seite den Factor $[\varrho' - \varrho_a]^m$ haben. Damit ist bewiesen, dass das Verschwinden sämtlicher k^{ten} *Unterdeterminanten* im n^{ten} Grade für eine Wurzel ϱ_a zugleich das Verschwinden der analogen *Unterdeterminanten* in gleicher Weise für die reciproke Wurzel ϱ_a bedingt.*)

Man kann die rechte Seite der Gleichung (1) in eine neue Form bringen. Zieht man nämlich die n ersten Verticalreihen, mit den $U_i, V_i, W_i \dots$ multiplicirt, von den folgenden ab, so treten an Stelle der $U' V' W' \dots$ wieder die mit ϱ' multiplicirten U, V, W selbst, während die Nullen in der Ecke der Determinante durch die Ausdrücke $-(uU), -(uV), -(uW)$ etc. zu ersetzen sind.

*) Voss. Mathematische Annalen X, pag. 163.

Ein besonders bemerkenswerthes Resultat ergibt sich hier, wenn $\varrho = \pm \sqrt{m}$ genommen wird. In diesem Falle ist $\varrho = \varrho'$. Ist zunächst n gerade, $k=1$ und die Substitution eine eigentliche, so hat man aus (1) nach Ausführung der eben angegebenen Reduction:

$$\Delta[uU]_{\pm \sqrt{m}} = (-1)^{n-1} \varrho^{n-1} \varrho' \left[[Uu]_{\pm \sqrt{m}} - \frac{1}{\varrho} \Omega(\pm \sqrt{m})(uU) \right],$$

oder, da $\Delta = \varrho^n$,

$$(2) \quad [uU] + [Uu]_{\pm \sqrt{m}} = - \frac{1}{\pm \sqrt{m}} \Omega(\pm \sqrt{m})(uU).$$

Daraus ist, wenn wir die ersten Unterdeterminanten von Ω durch Δ_{ik} bezeichnen:

$$(3) \quad \Delta_{ik} = -\Delta_{ki}, \quad \Delta_{ii} = \Delta_{kk} = \mp \frac{\Omega(\pm \sqrt{m})}{2\sqrt{m}}.$$

Die ersten Unterdeterminanten von $\Omega(\pm \sqrt{m})$ bilden also eine schiefe Determinante, deren Hauptdiagonalglieder ein und denselben Werth besitzen.

Man kann also das adjungirte System der $[a_{ik} + \sqrt{m}]$ in der Form:

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$b_{ik} = -b_{ki}, \quad b_{ii} = -\frac{\Omega(\pm \sqrt{m})}{2\sqrt{m}} = \omega$$

darstellen. Nun sind aber die ersten Unterdeterminanten des adjungirten Systemes wieder den ursprünglichen Elementen proportional. Bezeichnet man also die Unterdeterminanten der b_{ik} durch β_{ik} , so hat man:

$$\beta_{ik} = -a_{ik}(\Omega(\pm \sqrt{m}))^{n-2}, \\ \beta_{ii} = -(a_{ii} + \sqrt{m})(\Omega(\pm \sqrt{m}))^{n-2}.$$

Da endlich die Determinante B selbst gleich $(\Omega(\pm \sqrt{m}))^{n-1}$ ist, so hat man schliesslich:

$$(4) \quad \begin{cases} a_{ik} = -\frac{\beta_{ik}(\Omega(\pm \sqrt{m}))}{B} = 2\omega \frac{\beta_{ik}}{B} \sqrt{m} \\ a_{ii} + \sqrt{m} = -\frac{\beta_{ii}(\Omega(\pm \sqrt{m}))}{B} = 2\omega \frac{\beta_{ii}}{B} \sqrt{m}. \end{cases}$$

Es sind die Formeln (4) aber genau diejenigen, welche Cayley zur Bestimmung der Coefficienten einer orthogonalen Substitution angegeben hat.*) Damit ist bewiesen, dass in der That jene Cayley'schen

*) Cayley, Crelle 32. Baltzer, Det. p. 175.

Formeln die allgemeinsten sind, welche diese Aufgabe lösen, eine Frage, welche bisher eine Lücke in der Theorie der orthogonalen Substitutionen bildete. Auch Herr Rosanes) hat schon gelegentlich bemerkt, dass aus dem Umstande, dass die Cayley'schen Formeln die erforderliche Zahl willkürlicher Parameter enthalten, noch nicht geschlossen werden könne, dass sie den vollen Grad der Allgemeinheit besitzen;** es lasse sich aber ohne Schwierigkeit ein befriedigender Beweis dafür erbringen.***) Immerhin dürfte der vorhin gegebene, welcher direct die Coefficienten a_{ik} als Unterdeterminanten einer schiefen Determinante nachweist, einfach und übersichtlich genug sein, um hier eine Stelle zu beanspruchen.*

Für eine uneigentliche Substitution verschwindet dagegen bei geradem n die Determinante $\Omega(\pm\sqrt{m})$; die Gleichung (1) giebt dann:

$$\Delta_{ik} = \Delta_{ki},$$

d. h.: die ersten Unterdeterminanten bilden ein symmetrisches System, so dass die Lösung a_i , welche z. B. der Wurzel $+\sqrt{m}$ entspricht, der fortlaufenden Proportion genügt:

$$a_1^2 : a_1 a_2 : a_1 a_3 : a_1 a_4 : \dots = \Delta_{11} : \Delta_{12} : \Delta_{13} : \Delta_{14} \dots$$

*) Rosanes, Crelle 80, p. 52, 71.

**) Vgl. dazu § V., wo in der That Substitutionsformeln mit viel mehr willkürlichen Parametern angegeben sind, die keineswegs allgemein sind.

***) Wir heben noch folgenden Zusammenhang zwischen den Coefficienten a_{ik} und b_{ik} hervor. Wenn nach Cayley:

$$a_{ik} = 2\beta_{ik} \frac{\omega}{B} \sqrt{m} - [\sqrt{m}],$$

und

$$\sum a_{ik} x_k = q x_i$$

ist, so folgt:

$$\sum a_{ik} x_k = q x_i = 2\omega \frac{\sqrt{m}}{B} \sum \beta_{ik} x_k - x_i [\sqrt{m}],$$

also wenn mit b_{ij} multiplicirt wird, wegen $\sum b_{ik} \beta_{ik} = B$,

$$(q + \sqrt{m}) \sum x_i b_{ij} = 2\omega \sqrt{m} x_j.$$

Hiernach findet zwischen den Wurzeln der Determinanten $\Omega(q)$ und $[b_{ik} - q']$ der Zusammenhang statt, dass

$$q' = \frac{2\omega \sqrt{m}}{\sqrt{m} + q},$$

wogegen die ersten Unterdeterminanten beider Determinanten für correspondirende Wurzelwerthe proportional sind. Also ist mit jeder endlichen eigentlichen orthogonalen Substitution $y_i = \sum a_{ik} x_k$ eine unendlich kleine:

$$y_i = x_i + (\sum b_{ik} x_k) dt$$

verknüpft, welche dasselbe Gebilde von n Punkten ungeändert lässt, deren Wiederholung aber nicht die endliche Substitution hervorbringt.

Wir setzen voraus, es seien die $k - 1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten die letzten, welche sämmtlich für eine Wurzel r_a verschwinden. Man kann dann in (1) die Summen $-(uU)$, weil sie keine Beiträge zu den Werthen der k^{ten} Unterdeterminanten liefern, fortlassen, und erhält so:

$$(5) \quad \Delta [uvw \dots UVW \dots]_q = (-1)^{n-k} q^{n-k} q'^k [UVW \dots uvw \dots]_{q'}.$$

Bezeichnet man nun, wie gebräuchlich, den $2k^{\text{ten}}$ partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial^{2k}}{\partial u_i \partial v_k \partial w_l \dots \partial U_j \partial V_x \partial W_\lambda \dots},$$

durch:

$$\Delta_{ikl \dots jx\lambda \dots},$$

so hat man:

$$(6) \quad \{\Delta_{ikl \dots jx\lambda \dots}\}_q = (-1)^{n-k} q^{n-2k} \frac{n^k}{\Delta} \{\Delta_{jx\lambda \dots ikl \dots}\}_{q'},$$

eine Gleichung, nach welcher die Unterdeterminanten reciproker Wurzeln gewisse Symmetrieeigenschaften besitzen. Wir wollen dieselbe zunächst für den Fall in Anwendung bringen, dass bei eigentlicher Substitution $\pm \sqrt{m}$ eine der Wurzeln ist. Es folgt für $k = 1$:

$$\Delta_{ik} = -\Delta_{ki}, \quad \Delta_{ii} = -\Delta_{ii} = 0.$$

Die bekannte Identität zwischen den ersten Unterdeterminanten einer verschwindenden Determinante:

$$\Delta_{ii} \Delta_{kk} - \Delta_{ik} \Delta_{ki} = 0$$

zeigt dann, dass auch $\Delta_{ik} = 0$. Die ausgezeichneten Wurzelwerthe bedingen daher, wenn sie nicht, wie bei geradem n und uneigentlicher Substitution, oder bei ungeradem n , eo ipso der Transformation zukommen, mindestens das Verschwinden aller ersten Unterdeterminanten.

Man kann diesen Schluss erweitern. Wir nehmen an, dass nicht allein die ersten, sondern noch die $2m^{\text{ten}} = k_1^{\text{ten}}$ Unterdeterminanten sämmtlich verschwinden für einen dieser ausgezeichneten Werthe. In diesem Falle ist bei eigentlicher Substitution:

$$\Delta_{ikl \dots jx\lambda \dots} = -\Delta_{jx\lambda \dots ikl \dots},$$

woraus zunächst das Verschwinden aller k^{ten} Hauptunterdeterminanten, damit aber das Verschwinden aller k^{ten} Unterdeterminanten folgt. Verschwinden also bei einer eigentlichen Substitution für $q = \pm \sqrt{m}$ noch die sämmtlichen k^{ten} Unterdeterminanten, die höheren dagegen nicht, so ist k nothwendig eine ungerade Zahl.

Ein analoges Theorem lässt sich auch für uneigentliche Substitutionen aufstellen. Wenn hier $k - 1 = 2m - 1$ ist, so hat man wieder für $q = \pm \sqrt{m}$

$$\Delta_{ikl \dots} = -\Delta_{jx\lambda \dots},$$

so dass bei uneigentlicher Substitution immer nur die sämmtlichen Unterdeterminanten bis zu einer geraden Ordnung hin verschwinden können.

Dass das Verschwinden der k^{ten} Hauptunterdeterminanten das sämmtlicher k^{ten} Unterdeterminanten nach sich zieht, beruht auf einem allgemeinen Satze, dessen Beweis wir hier noch besonders einschalten. Derselbe lautet:

Wenn in einer Determinante die $k - 1^{\text{te}}$ Unterdeterminanten sämmtlich verschwinden, dagegen die k^{te} Unterdeterminanten ein symmetrisches oder alternirendes System bilden, so können diese letzteren nur dann von Null verschieden sein, wenn sich unter den Hauptunterdeterminanten nicht verschwindende befinden, und umgekehrt zieht das Verschwinden der k^{te} Hauptunterdeterminanten das aller anderen nach sich.

Ein etwas allgemeinerer Satz ist neuerdings von Herrn Frobenius*) ausgesprochen worden. Zum Beweise bedienen wir uns ähnlicher Ueberlegungen, wie sie zur Begründung des Kronecker'schen Satzes**) in Anwendung kommen, führen ihn aber der Uebersichtlichkeit halber an einer sechsstufigen Determinante der b_{ik} , deren vierstufige Unterdeterminanten sämmtlich, deren dreistufige Hauptunterdeterminanten ebenfalls verschwinden.

Sei nun eine der nicht verschwindenden dreistufigen Determinanten:

$$S = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix},$$

so folgt aus dem identischen Verschwinden von:

$$\begin{aligned} b_{11} \quad b_{12} \quad b_{13} \quad \sum b_{1i} \quad B_i \\ b_{21} \quad b_{22} \quad b_{23} \quad \sum b_{2i} \quad B_i \\ b_{31} \quad b_{32} \quad b_{33} \quad \sum b_{3i} \quad B_i \\ b_{a1} \quad b_{a2} \quad b_{a3} \quad \sum b_{ai} \quad B_i \end{aligned},$$

für $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, $B_3 = 0$, wenn die B_1 , B_2 , B_3 die Gleichungen:

$$\sum b_{1i} B_i = 0, \quad \sum b_{2i} B_i = 0, \quad \sum b_{3i} B_i = 0$$

befriedigen, dass auch:

$$\sum b_{ai} B_i = 0.$$

Demnach verschwinden alle dreistufigen Determinanten:

*) Frobenius, Crelle 82, p. 241.

**) Kronecker, Crelle 72, p. 152.

$$\begin{vmatrix} b_{\alpha 1} & b_{\alpha 2} & b_{\alpha 3} \\ b_{\beta 1} & b_{\beta 2} & b_{\beta 3} \\ b_{\gamma 1} & b_{\gamma 2} & b_{\gamma 3} \end{vmatrix}.$$

Unter diesen befindet sich aber nach der Voraussetzung dem absoluten Werth nach einmal auch die Determinante S , womit wir auf den Widerspruch $S = 0$ geführt sind. *Das Verschwinden einer dreireihigen Hauptunterdeterminante zieht also das aller derjenigen dreireihigen Determinanten nach sich, die aus den Horizontalreihen und Verticalreihen gebildet werden können, die sich in jener kreuzen.*

Man kann jenes Verschwinden der Unterdeterminanten auch mit den Betrachtungen über schiefe Determinanten in Verbindung bringen. Wenn man die Determinante

$$\left[uvw \dots UVW \dots \right]_{+e}$$

mit

$$\Omega(-\varphi)$$

multiplicirt, so entsteht eine Determinante, deren k Ränder, so lange $\Omega(-\varphi)$ nicht selbst verschwindet, wieder als aus ganz beliebigen Grössen bestehend angesehen werden können, deren Kern aber eine schiefe Determinante bildet, deren Diagonalglieder für $\varphi = \pm \sqrt{m}$ sämmtlich Null sind. Dann folgt der obige Satz leicht aus dem Theorem, dass in einer schiefen Determinante (gerader Ordnung) die Reihe der verschwindenden Unterdeterminanten immer mit einer ungeraden Zahl schliesst.*) Aber es erscheint zweifelhaft, ob dieser Beweis eine Ausdehnung auch auf diejenigen Fälle gestattet, in denen $\Omega(-\varphi)$ ebenfalls gleich Null ist.

Das Verschwinden der Hauptunterdeterminanten, welches aus Gleichung (6) sich ergab, kann noch auf andere Art dargethan werden, welche hier kurz angedeutet werden möge.

Setzt man die gegebene eigentliche (uneigentliche) Substitution mit einer ungeraden (geraden) Zahl k uneigentlicher von der Art:

$$y_i = x_i - 2a_2 a_i^{**})$$

zusammen, so entsteht eine uneigentliche Substitution, d. h. eine solche, deren Determinante $\Omega(\varphi)$ die beiden Wurzeln $\pm \sqrt{m}$ besitzt.

Daraus ergibt sich der Satz:

Rändert man die Determinante der $|a_{ik} - \varphi|$ vertical mit k beliebigen Grössenreihen $a_i, b_i, c_i \dots$, und horizontal mit denselben, aber mit dem Factor φ multiplicirt, und ersetzt man noch die k^2 Elemente der Ecke durch das Schema:

*) Frobenius, Crelle 82, pag. 242.

**) Vgl. über solche Substitutionen noch besonders § V.

$$\begin{vmatrix} -1 & -2(ab & -2(ac) \cdots \\ 0 & -1 & -2(bc) \cdots \\ 0 & 0 & -1 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix},$$

so entsteht eine Determinante, welche für $\varrho = \pm \sqrt{m}$ identisch Null ist, welches auch die Werthe der $a, b, c \dots$ sind.

Nimmt man alle a mit Ausnahme eines einzigen, welches gleich 1 gesetzt wird, gleich Null, ebenso alle $b, c, \dots r$ mit Ausnahme eines einzigen gleich Null, so ergeben sich Gleichungen, welche eine beliebige k^{te} Hauptunterdeterminante linear durch die $k-1$ ersten Hauptunterdeterminantensysteme ausdrücken, womit der Beweis des Satzes geliefert ist.

Zum Schluss fügen wir noch hinzu:

Findet das Verschwinden der k^{ten} Unterdeterminanten statt, so existirt immer eine k fache Mannigfaltigkeit von Lösungen der Gleichungen (1). Dieselben stellen sämmtlich Punkte von $f=0$ vor, wenn die Wurzel, für welche das genannte ϱ stattfindet, nicht einen der Werthe $\pm \sqrt{m}$ besitzt. Die involutorische Beziehung bleibt dabei für alle nicht reciproken Wurzeln angehörigen Lösungen erhalten. Die allgemeine Lösung der Gleichungen (1) ist also für die Wurzel ϱ_α von der Form:

$$z_i = \sum_{k=1}^{k+1} z_i^k \lambda_k,$$

mit der Eigenschaft $\sum z_i^2 = 0$, welches auch die Werthe der willkürlichen Constanten λ_k sind.*)

§ III.

Formen, welche durch die Substitution in sich übergehen.

Nach der obigen Bezeichnung war:

$$r_i x_i^* = \sum a_{ik} x_k^*, \quad \varrho_i y_i^* = \sum a_{ik} y_k^*,$$

oder:

$$(1) \quad \begin{cases} r_i \sum y_i x_i^* = n \sum x_i x_i^*, \\ \varrho_i \sum y_i y_i^* = n \sum x_i y_i^*. \end{cases}$$

Bei geradem n und eigentlicher Substitution existiren also $\frac{n}{2}$ Paare von linearen Formen, welche in sich transformirt werden, sie stellen n

*, Diese Annalen X, S. 162.

festen Tangentialebenen der Fläche vor. Wir bezeichnen sie der Reihe nach durch:

$$(2) \quad \begin{cases} X_1 X_2 \cdots X_s, \\ \Xi_1 \Xi_2 \cdots \Xi_s, \end{cases} \quad (2s = n)$$

so dass:

$$(3) \quad X_r = \sum x_i x_i^r, \quad \Xi_r = x_i y_i^r.$$

Für die X_i, Ξ_i besteht die Identität:

$$(4) \quad \sum x_i^2 = 2 X_i \Xi_i.$$

Sie ergibt sich durch Multiplication der verschwindenden Determinante:

$$\begin{vmatrix} x'_1 \cdots x'_n & X_1 \\ \vdots & \vdots \\ y'_1 \cdots y'_n & \Xi_s \\ x_1 \cdots x_n & \sum x_i^2 \end{vmatrix},$$

mit der Determinante der x_i^r, y_i^r . Die directe Ausführung der rechten Seite von (4) liefert dagegen:

$$\sum X_i \Xi_i = \sum x_i x_i^i y_i^i x_i = \sum x_i x_i (x_i^i y_i^i + x_i^i y_i^i),$$

so dass:

$$(5) \quad 2 \sum x_i^i y_i^i = 1, \quad \sum x_i^i y_i^i + x_i^i y_i^i = 0.$$

Den Gleichungen (1) zufolge gehen nicht nur die linearen Formen X, Ξ in sich über, sondern auch jede homogene Function der Producte:

$$(X_r \Xi_r).$$

Insbesondere sind die *quadratischen Formen* dieser Eigenschaft von der Gestalt:

$$(6) \quad F = \sum X_i \Xi_i \lambda_i^*.$$

Unter den Formen (6) befinden sich auch *specielle*, welche der Gleichung:

$$(7) \quad \sum \left(\frac{dF}{dx_i} \right)^2 = M \sum x_i^2$$

genügen. Sie entstehen, wenn man den Coefficienten λ die Werthe ± 1 in beliebiger Abwechselung ertheilt. Werden von den $s = n/2$ Grössen λ k gleich $+1$, die übrigen l gleich -1 angenommen, so ist die Charakteristik der Determinante derselben:

* Dass diese Formen die einzigen sind, welche in sich übergehen, erkennt man, wenn man an Stelle der Variablen x_i einer quadratischen Form $\sum x_i x_k a_{ik}$ die X_i, Ξ_i einführt.

$$[(1\ 1\ 1\ \dots)_{2k} (1\ 1\ \dots)_{2k}],$$

sie stellen daher nur dann Formen von allgemeinstem Charakter vor, die der Gleichung (7) genügen, wenn n von der Form $4m$ ist*.)

Im Allgemeinen können bei eigentlicher Substitution keine linearen Formen gegenseitig in einander übergehen.

Denn aus:

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} a_{ik} &= \rho \beta_k, \\ \sum \beta_k a_{ik} &= m a_k, \end{aligned}$$

folgt:

$$\sum \beta_k (a_{ik} - \rho a_{ki}) = 0,$$

so dass die Coefficienten einer solchen Form β_k , welche durch die Substitution gegenseitig mit a_k vertauscht wird, den ersten Unterdeterminanten der verschwindenden Determinante:

$$(8) \quad |a_{ik} - \rho a_{ki}| = 0,$$

proportional sind. Aber aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} x_k^s &= r_s x_i^s, \\ \sum a_{ki} x_k^s &= \rho_s x_i^s, \end{aligned}$$

folgt:

$$(9) \quad |a_{ki} - a_{ki} \frac{r_s}{\rho_s}| = 0.$$

D. h.: die Wurzeln der Gleichung (8) sind sämtlich reciprok und gleich den Verhältnissen der reciproken Wurzeln der Gleichung $\Omega(\rho) = 0$, während die ersten Unterdeterminanten den x_i^s, y_i^s proportional sind:

Schreibt man (9) in der Form:

$$|a_{ik} - a_{ki} \frac{\rho_s^2}{m}| = 0,$$

so erkennt man, dass die sämtlichen ersten Unterdeterminanten von (8) verschwinden, für $\rho = \frac{r_s^2}{m}$, sobald noch eine zweite Wurzel $r_k = -r_s$ in $\Omega(\rho) = 0$ vorhanden ist.

In diesem letzteren Falle gehen die linearen Büschel $X_k - \lambda X_s$, $X_k + \lambda X_s$, sowie $\Xi_k - \lambda \Xi_s$, $\Xi_k + \lambda \Xi_s$ gegenseitig in einander über. Zugleich gehen auch die Producte $X_k \Xi_s$, $X_s \Xi_k$ in $-\frac{1}{m} X_k \Xi_s$, $\frac{1}{m} X_s \Xi_k$, mithin die quadratischen Formen:

$$X_k \Xi_s \lambda_k + X_s \Xi_k \lambda_s$$

in sich über. Enthält insbesondere die Determinante $\Omega(\rho)$ nur Potenzen

*) Voss, Mathematische Annalen X, pag. 147.

von φ mit geraden Exponenten, so ist die Determinante (8) das Quadrat einer ganzen rationalen Function von φ , und die quadratischen Formen mit n Parametern:

$$\sum X_k \Xi_k \lambda_k + X_i \Xi_i \lambda_i$$

gehen in sich über. Sie genügen der Differentialgleichung (7), wenn jedes Parameterpaar der Gleichung:

$$\lambda_k \lambda_i = \text{constans}$$

genügt, und besitzen dann eine Determinantencharakteristik, welche von allgemeinstem Charakter ist, d. h. lauter einfache Elementartheiler hat*).

Bei einer uneigentlichen Substitution dagegen existiren zwei besondere Formen X_i, Ξ_i , welche keine Tangentialebenen der Fläche vorstellen. In Folge dessen findet die Identität:

$$(10) \quad \sum x_i^2 = X_i^2 + \Xi_i^2 + 2 \sum X_k \Xi_k$$

statt, und die quadratischen Formen:

$$(11) \quad F = \lambda_i X_i^2 + \mu_i \Xi_i^2 + \sum X_k \Xi_k \lambda_k$$

gehen in sich über. Die Formen, welche der Gleichung (7) genügen, entstehen, wenn man wieder die Coefficienten λ, μ gleich ± 1 setzt. Insbesondere sind die beiden quadratischen Formen:

$$(12) \quad \begin{cases} X_i^2 - \Xi_i^2 + 2 \sum (X_k \Xi_k - X_l \Xi_l), \\ -X_i^2 + \Xi_i^2 + 2 \sum (X_k \Xi_k - X_l \Xi_l) \end{cases}$$

zu erwähnen, welche die allgemeinste Determinantencharakteristik besitzen, sobald $k=l$ sein kann, d. h. wenn $n-2$ durch 4 theilbar ist.

Die Schaar quadratischer Formen:

$$(13) \quad \lambda_i X_i^2 + \mu_i \Xi_i^2 \pm 2 \lambda X_i \Xi_i + 2 \sum X_k \Xi_k \lambda_k$$

dagegen besitzt die Eigenschaft, dass je zwei entgegengesetztem Zeichen von λ entsprechende Formen gegenseitig in sich übergehen. Auch unter ihnen befinden sich specielle Formen, welche der Gleichung (7) genügen; sie entstehen, wenn man $\lambda_i = \sqrt{1 - \lambda^2}$, $\mu_i = -\sqrt{1 - \lambda^2}$, und die übrigen λ_k gleich ± 1 setzt, und sind vom allgemeinsten Charakter, wenn in der Summe $\sum X_k \Xi_k \lambda_k$ sich gleichviel Glieder mit positivem und negativem Zeichen befinden.

*) Ein Beispiel hierfür liefert die Transformation der Fläche zweiten Grades, bei welcher die beiden Systeme der Erzeugenden unter einander vertauscht werden. Vgl. § VIII.

§ IV.

Vertauschbare Substitutionen.

Zwei Substitutionen, (a), (b):

$$(1) \quad \begin{cases} (a) \ y_i = \sum a_{ik} x_k, \\ (b) \ x_j = \sum b_{ji} x_i, \end{cases}$$

heissen *vertauschbar*, wenn die Ordnung, in welcher sie nach einander ausgeführt werden, für das Resultat der Substitution gleichgültig ist. Dies führt auf die Bedingungen:

$$(2) \quad \varrho \sum a_{ji} b_{ik} = \sum b_{ji} a_{ik},$$

oder:

$$(3) \quad m \varrho b_{ik} = \sum b_{ji} a_{ik} a_{js}.$$

Die Gleichungen (3) sagen aus, dass die bilineare Form:

$$(4) \quad F(y y') = \sum b_{mn} y'_m y_n$$

vermöge der Substitution (a) in sich übergeführt wird. In der That hat man:

$$F(y y') = \sum b_{mn} y'_m y_n = \sum b_{mn} a_{mr} a_{ns} x'_r x_s = \varrho m F(x x').$$

Aus dem vorigen § III. ergibt sich aber für den Ausdruck der bilinearen Formen dieser Eigenschaft ohne Weiteres der Ausdruck:

$$(5) \quad F = \sum l_i X_i \Xi'_i + \lambda_i X'_i \Xi_i.$$

Und umgekehrt ergeben sich daraus als Coefficienten einer mit (a) vertauschbaren Substitution (b) die Grössen:

$$(6) \quad b_{mn} = \sum (l_i x'_m y'_n + \lambda_i x'_n y'_m).$$

Sollen die b_{mn} ebenfalls Coefficienten einer orthogonalen Substitution sein, so findet man leicht nach § III. (5), dass:

$$\lambda_i l_i = \omega,$$

d. h. gleich einer beliebigen Constanten zu setzen ist.

Man kann die Aufgabe, sämmtliche Systeme der b_{mn} zu bestimmen; noch auf eine andere Weise lösen.

Man multiplicire die Gleichungen (3):

$$\varrho \sum a_{ji} b_{ik} = \sum b_{ji} a_{ik}$$

mit x'_k , so entsteht, wegen:

$$r_i x'_i = \sum a_{ik} x'_k,$$

Wird also:

$$(7) \quad \sum b_{ik} x_k^s = \gamma_i^s$$

gesetzt, so ist:

$$(8) \quad \varrho \sum a_{ji} \gamma_i^s = r_s \gamma_j^s,$$

aus welcher Gleichung hervorgeht, dass $\varrho = 1$ zu nehmen ist und dass die Grössen γ_j^s von den x_j^s, y_j^s nur um willkürliche Factoren verschieden sein können. Damit aber hat man zur Bestimmung der b_{ik} die Gleichungen (7) oder:

$$(9) \quad \begin{cases} \sum b_{ik} x_k^s = l_s x_i^s, \\ \sum b_{ik} y_k^s = \lambda_s y_i^s, \end{cases}$$

aus denen wieder die Gleichungen (6) hervorgehen.

Wir haben dabei die Substitution als eigentliche und n gerade vorausgesetzt. Es ist leicht, die Modificationen anzugeben, welche die übrigen Fälle mit sich führen würden. In dem hier betrachteten Falle ist natürlich die Substitution (b) wieder eine eigentliche, was sich auch durch Bestimmung der Determinante der b_{ik} aus den Gleichungen (7) ergibt.

Je zwei mit (a) vertauschbare Substitutionen (b), (B) sind nun auch unter sich vertauschbar, was sich ebenfalls leicht direct verificiren lässt. Da jede Transformation (a) mit sich selbst vertauschbar ist, so muss in der Lösung (b) bei geeigneter Wahl der l, λ auch das System der a_{ik} selbst enthalten sein. In der That kann man leicht die a_{ik} durch die x_i^s, y_i^s ausdrücken und erhält dann:

$$(10) \quad a_{ik} = \sum (x_k^s y_i^s \varrho_s + x_i^s y_k^s r_s).$$

Diese Darstellung der a_{ik} setzt uns in den Stand, die allgemeinste Zerlegung der gegebenen Substitution in beliebig viele andere vertauschbare auszuführen.

Eine beliebige Zahl von Substitutionen:

$$(11) \quad \begin{cases} b'_{ik} = \sum l'_s x_i^s y_k^s + \lambda'_s x_k^s y_i^s, \\ b''_{ik} = \sum l''_s x_i^s y_k^s + \lambda''_s x_k^s y_i^s, \\ \vdots \\ b^r_{ik} = \sum l^r_s x_i^s y_k^s + \lambda^r_s x_k^s y_i^s, \end{cases}$$

setzt sich nämlich zur Transformation (10) zusammen, wenn:

$$(12) \quad l'_s l''_s \dots l^r_s = r_s$$

genommen wird. Unter diesen Substitutionen sind $\frac{n}{2}$ kanonische besonders bemerkenswerth, welche entstehen, wenn jedesmal ein System der l , λ gleich einem Paar reciproker Wurzeln r , ϱ , die anderen gleich $\sqrt{m}$ angenommen werden. Es sind dies Transformationen, bei denen den $n-2$ Wurzeln $\sqrt{m}$ entsprechend, ein linearer Ausdruck mit $n-2$ Parametern und zwei Punkte der Fläche fest bleiben, d. h. die $\frac{n}{2}$ Elementarrotationen, in welche die allgemeinste Bewegung sich zerlegen lässt. Indessen gehen wir nicht weiter auf jene Zerlegung ein, da sie von verschiedenen Seiten sowohl für beliebige Dimensionen, als auch insbesondere für den projectivischen Raum von drei Dimensionen bereits untersucht worden ist*).

Die Formeln (11) führen noch auf eine andere Zerlegung. Man setze $\frac{n}{2}$ der Zahlen l , λ sämmtlich gleich k , und ordne sie einer Gruppe von $\frac{n}{2}$ solchen Punkten aus den n bei der Transformation (10) festbleibenden Punkten x , y zu, deren Verbindungslinien Erzeugende der Fläche $f = \sum x^2 = 0$ sind. Ordnet man den Werthen $\frac{\omega}{k}$ die übrigen $\frac{n}{2}$ Punkte zu, so entsteht eine Transformation mit den beiden nicht ausgezeichneten Wurzelwerthen $\frac{\omega}{k}$ und k , bei welcher zwei specielle lineare Mannigfaltigkeiten, die ganz auf der Fläche liegen, so ungeändert bleiben, dass jeder Punkt derselben fest bleibt. Eine solche Anordnung der Gruppe der n festbleibenden Punkte x , y ist auf $2^{2^{\frac{n}{2}-1}}$ -fache Art möglich, so dass im Ganzen $2^{2^{\frac{n}{2}-1}}$ Transformationen dieser Art existiren.

Betrachten wir jetzt irgend eine dieser Transformationen, etwa diejenige, welche sämmtliche x in eine Gruppe vereinigt, so bleiben bei derselben die folgenden beiden speciellen linearen Ausdrücke fest:

$$\begin{aligned} z_i &= \sum x_i^r m_r, \\ \xi_i &= \sum y_i^r \mu_r, \end{aligned}$$

welches auch die Werthe der $\frac{n}{2}$ Parameter m_r , μ_r sein mögen. Daraus folgt, dass jede lineare Reihe $z_i + \xi_i$ bei der Transformation in sich verschoben wird. Unter diesen befinden sich insbesondere erzeugende lineare Reihen der Fläche, wenn:

*) Frahm a. a. O. S. 18. Schläfli, Crelle's Journal Bd. 65. Lindemann, Projectivische Mechanik, Math. Annalen Bd. VII.

$$\sum m_r \mu_r = 0.$$

Der Ausdruck $z_i + \xi_i$ aber stellt überhaupt sämtliche Punkte der Fläche vor, denn man kann zu jedem Werthsystem $a_i = z_i + \xi_i$ die zugehörigen Parameter m_r, μ_r aus Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante bestimmen. Demnach hat die Transformation die Eigenschaft, ein System von Erzeugenden der Fläche so in sich zu transformiren, dass jede Erzeugende festbleibt, während ihre Punkte sich verschieben. Jedes derartige System enthält ∞^{n-3} gerade Linien mit ∞^{n-2} , d. h. sämtlichen Flächenpunkten.

Es giebt $2^{\frac{n}{2}-1}$ solcher Systeme, wie schon oben bemerkt wurde. Die Erzeugenden ein und desselben Systems schneiden sich nur in solchen Punkten, die den Mannigfaltigkeiten z_i oder ξ_i angehören.

Man kann demnach die Fläche durch vertauschbare Substitutionen, bei denen je ein System von Erzeugenden fest bleibt, in sich transformiren. Da jede Substitution eine wesentliche Constante einführt, so werden mindestens $\frac{n}{2}$ Transformationen dieser Art erforderlich sein, wenn eine gegebene Transformation entstehen soll.

Eine ganz bestimmte Anordnung dieser $\frac{n}{2}$ Transformationen entsteht nur für den Fall $n = 4$. Sollen die beiden Transformationen:

$$\begin{aligned} l_1' &= l_2' = k_1, & l_1^2 &= \lambda_2^2 = k_2, \\ \lambda_1' &= \lambda_2' = \frac{\omega_1}{k_1}, & l_2^2 &= \lambda_1^2 = \frac{\omega_2}{k_2}, \end{aligned}$$

sich zu einer gegebenen mit den Wurzeln $r_1, \varrho_1; r_2, \varrho_2$ zusammensetzen, so hat man:

$$\begin{aligned} k_1 k_2 &= r_1, & \frac{\omega_1 \omega_2}{k_1 k_2} &= \varrho_1, \\ k_1 \frac{\omega_2}{k_2} &= r_2, & \frac{\omega_1}{k_1} k_2 &= \varrho_2, \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{r_1 r_2}, & \frac{\omega_1}{k_1} &= \sqrt{\varrho_1 \varrho_2}, \\ k_2 &= \sqrt{\varrho_2 r_1}, & \frac{\omega_2}{k_2} &= \sqrt{\varrho_1 r_2}, \end{aligned}$$

womit die gegebene Transformation in zwei vertauschbare zerlegt ist, von denen jede ein System von Erzeugenden ungeändert lässt.

Dagegen hat man für $n = 6$ vier Transformationen dieser Art, von denen je drei schon genügen, um eine gegebene mit den Wurzeln $r_1, \varrho_1; r_2, \varrho_2; r_3, \varrho_3$ hervorzubringen*).

*) Verschieden von dieser Auffassung der Systeme der Erzeugenden einer F_2 in einem höheren Raume ist die, welche Herr Cayley gelegentlich entwickelt

§ V.

Specielle Substitutionen.

Eine *uneigentliche specielle Substitution* ist durch die Gleichungen:

$$(1) \quad y_i = x_i - 2 a_i \frac{a_z}{(a^2)}$$

gegeben, in denen man noch zur Vereinfachung $(a^2) = \sum a_i^2 = 1$ setzen kann. Man kann diese Transformationen auch als *Centralprojection der Fläche $f=0$ vom Punkte a aus in sich selbst* bezeichnen. Es sind dies zugleich diejenigen Transformationen, welche Herr Klein gelegentlich als *Spiegelungen* bezeichnet hat, welches Ausdruckses wir uns im Folgenden gleichfalls bedienen.

bat (On the superlines of a quadric surface in five dimensional space, Quarterly Journal, vol. XII, p. 176). Wenn die Gleichung der Fläche in der Form:

$$(1) \quad \sum x_i^2 - \sum y_i^2 = 0, \quad i = 1 \cdots \frac{n}{2},$$

geschrieben wird, so setze man:

$$(2) \quad y_i = \sum \alpha_{ik} x_k.$$

Sind die α_{ik} Coefficienten einer orthogonalen Substitution der Determinante ± 1 mit $\frac{n}{2}$ homogenen Variabeln, so erfüllen die Gleichungen (2) offenbar die Bedingung (1). Die Gleichungen (2) repräsentiren eine Mannigfaltigkeit, welche für eine eigentliche Substitution als *Erzeugende erster Art*, im anderen Falle als eine solche *zweiter Art* bezeichnet werden kann. Für den Schnittpunkt zweier Erzeugenden (2) mit den Coefficienten α_{ik} , β_{ik} muss die Determinante

$$|\alpha_{ik} - \beta_{ik}|$$

verschwinden. Multiplicirt man sie mit der Determinante der α_{ik} , so entsteht die Determinante:

$$(3) \quad |1 - \sum \alpha_{jk} \beta_{ik}|,$$

d. h. eine Determinante mit den Coefficienten $\alpha_{ik} = \sum \alpha_{jk} \beta_{ik}$, also den Coefficienten einer orthogonalen Substitution, welche aus den beiden der α_{ik} und β_{ik} zusammengesetzt ist. Ist nun $\frac{n}{2}$ gerade und betrachten wir zwei Erzeugende gleicher Art, so sind die α_{ik} Coefficienten einer eigentlichen Substitution, und die Determinante (13) verschwindet nicht oder zugleich mit allen Unterdeterminanten bis zu einer ungeraden Ordnung. Für Erzeugende ungleicher Art verschwindet sie aber immer oder mit allen Unterdeterminanten bis zu einer geraden Ordnung. Aehnliche Schlüsse gelten aber auch für den Fall eines ungeraden $\frac{n}{2}$ und man hat daher den Satz:

Zwei Erzeugende gleicher (oder ungleicher) Art schneiden sich im Allgemeinen nicht, oder in einem Gebilde von ungerader Dimension; Erzeugende verschiedener (oder gleicher) Art haben dagegen immer einen Punkt oder ein Gebilde gerader Dimension gemein, je nachdem die Dimension des Raumes von der Form $4n-1$ (oder $4n+1$) ist.

Jede uneigentliche (eigentliche) Substitution lässt sich aus einer eigentlichen (uneigentlichen) und einer speciellen der Art (1) zusammensetzen. Denu aus der Verbindung von (1) mit:

$$(2) \quad z_i = \sum a_{ik} x_k$$

entsteht:

$$(3) \quad z_i = \sum a_{ik} (x_k - 2 a_k a_x),$$

so dass die Coefficienten der neuen Substitution werden:

$$(4) \quad b_{ik} = a_{ik} - 2 a_k \sum a_{ir} a_r.$$

Daraus ist umgekehrt:

$$\sum a_k b_{ik} = - \sum a_k a_{ik},$$

also:

$$(5) \quad a_{ik} = b_{ik} - 2 a_k \sum b_{ir} a_r,$$

woraus, wenn die b_{ik} gegeben sind, bei beliebigem a_i die a_{ik} bestimmt werden können. Somit ist die Substitution mit den Coefficienten b_{ik} in zwei andere zerlegt, von denen die eine die willkürliche uneigentliche der a_i ist. Beide sind im Allgemeinen nicht vertauschbar.

Betrachtet man die b_{ik} als zu einer eigentlichen Substitution gehörig, so hat man, den Wurzeln $\pm \sqrt{m}$ entsprechend, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum \alpha_r b_{ir} &= + \sqrt{m} \alpha_i, \\ \sum \beta_r b_{ir} &= - \sqrt{m} \beta_i, \end{aligned}$$

Verwendet man die α, β zur linearen Transformation (1), so hat man nach (5):

$$\begin{aligned} a_{ik} &= b_{ik} - 2 \alpha_i \alpha_k \sqrt{m}, \\ a'_{ik} &= b_{ik} + 2 \beta_i \beta_k \sqrt{m}, \end{aligned}$$

und damit zwei eigentliche Transformationen, die respective mit derjenigen, aus der sie hergeleitet wurden, vertauschbar sind. Endlich bestehen noch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum a_{ik} \alpha_k &= - \alpha_i \sqrt{m}, \\ \sum a_{ik} \beta_k &= - \beta_i \sqrt{m}, \\ \sum a'_{ik} \alpha_k &= + \alpha_i \sqrt{m}, \\ \sum a'_{ik} \beta_k &= + \beta_i \sqrt{m}, \end{aligned}$$

d. h. die eigentlichen Substitutionen der a_{ik}, a'_{ik} sind selbst von speciellem Charakter, da ihre Determinante $\Omega(\varphi)$ die Doppelwurzeln $+\sqrt{m}, -\sqrt{m}$ besitzt. Somit hat man den folgenden Satz:

Jede (allgemeine) uneigentliche Substitution lässt sich auf zweifache Weise in ein vertauschbares System zweier specieller Substitutionen zerlegen, von denen die eine eine Substitution von der Art (1), d. h. eine Centralprojection der Fläche f vom Punkte $\alpha(\beta)$ aus, die andere eine Bewegung von speciellem Charakter ist, bei der eine Gerade fest bleibt.

Eine andere Classe besonderer Substitutionen bilden die symmetrischen, bei denen $a_{ik} = a_{ki}$ ist.

Sie führen, wie bereits früher gezeigt wurde*), auf eine Determinante $\Omega(\varrho)$, welche im allgemeinsten Falle nur die Wurzeln $\pm \sqrt{m}$ eine jede $\frac{n}{2}$ -mal besitzt, und sind eigentlich oder uneigentlich, je nachdem n durch 4 theilbar ist oder nicht. Die quadratische Form

$$\sum a_{ik} x_i x_k = F$$

ist dann von speciellem Charakter, weil sie der Gleichung:

$$(6) \quad \sum \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 = 4m \sum x_i^2$$

genügt. Diese Substitutionen spielen eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung der quadratischen Formen, welche jener Gleichung genügen**). Bezeichnet man die halben Differentialquotienten von F durch $F_i = \frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial x_i}$, so lässt sich die symmetrische Substitution in der Form:

$$(7) \quad y_i = F_i$$

schreiben.

Jede (allgemeine) eigentliche Substitution kann auf unendlich viele Arten in die Folge von zwei symmetrischen Substitutionen zerlegt werden.

Um dies zu beweisen, betrachten wir die beiden Formen:

$$(8) \quad \begin{cases} F = \sum X_i^2 l_i + \Xi_i^2 \lambda_i, \\ \Phi = \sum X_i^2 l'_i + \Xi_i^2 \lambda'_i, \end{cases}$$

in denen $l_i \lambda_i = \omega$, $l'_i \lambda'_i = \omega'$ sein möge. Beide genügen der Gleichung (6) und vermitteln die beiden symmetrischen Transformationen:

$$(9) \quad \begin{cases} y_i = F_i, \\ y_i = \Phi_i, \end{cases}$$

welche nach einander ausgeführt werden sollen. Unter geeigneter Wahl der Coefficienten l, λ ergibt sich dadurch die Substitution der a_{ik} (§ IV. (10)).

Man hat zunächst:

$$F_k = \sum X_i l_i x_k^i + \Xi_i \lambda_i y_k^i,$$

$$\Phi_k = \sum X_i l'_i x_k^i + \Xi_i \lambda'_i y_k^i,$$

oder bei vollständiger Ausführung an Stelle von (9):

$$y_i = \sum x_k x_k^s l_s x_i^s + \sum x_k y_k^s \lambda_s y_i^s,$$

$$y_i = \sum x_m x_m^s l'_s x_i^s + \sum x_m y_m^s \lambda'_s y_i^s,$$

und durch Zusammensetzung beider Substitutionen:

$$z_i = \sum x_m^s x_i^s l'_s (x_k x_k^s l_s x_m^s + x_k x_k^s \lambda_s y_m^s) \\ + \sum y_m^s y_i^s \lambda'_s (x_k x_k^s l_s x_m^s + x_k x_k^s \lambda_s y_m^s).$$

Vereinfacht man mittelst § I. (9) die Combinationen der

$$\sum x_k^i y_k^i \text{ etc.,}$$

so ergibt sich:

$$(10) \quad z_i = \sum x_k (y_k^s l'_s \lambda_s x_i^s + \lambda'_s l_s y_k^s x_i^s),$$

d. h. eine Transformation mit den Coefficienten b_{ik} :

$$(11) \quad b_{ik} = \sum y_k^s x_i^s l'_s \lambda_s + \lambda'_s l_s y_k^s x_i^s.$$

Die b_{ik} sind nach § IV. (10) identisch mit den a_{ik} , wenn:

$$\lambda_s' \lambda_s = r_s, \quad \lambda_s' l_s = q_s$$

Daraus folgt:

$$(12) \quad \omega \frac{l'_s}{l_s} = r_s, \quad \omega' \frac{l_s}{l'_s} = q_s,$$

oder:

$$\omega \omega' = m, \quad l'_s = \frac{r_s l_s}{\omega}.$$

Die Grössen l_s bleiben daher völlig willkürlich, wonach die vorgelegte Transformation auf unendlich vielfache Weise aus zwei symmetrischen (nicht vertauschbaren) zusammengesetzt werden kann. Eine ganz specielle Zerlegung dieser Art ist z. B. durch die beiden Formen:

$$F = \sum X_i^2 + \Xi_i^2,$$

$$\Phi = \sum X_i^2 r_i + \Xi_i^2 q_i$$

vermittelt.

Wir wenden uns jetzt wieder zur Betrachtung specieller uneigentlicher Transformationen (1). Zwei Substitutionen:

$$(13) \quad \begin{cases} y_i = x_i - 2 a_i a_x, \\ y_i = x_i - 2 b_i b_x \end{cases}$$

sind im Allgemeinen nicht vertauschbar, denn combinirt liefern sie die Substitution:

$$(14) \quad z_i = x_i - 2 a_i a_x - 2 b_x b_i + 4 (ab) a_x b_i.$$

Die Bedingung der Vertauschbarkeit ist:

$$(15) \quad \sum (a_i b_i) = (ab) = 0,$$

d. h. die involutorische Beziehung der Coefficienten a_i, b_i . Zwei solche Transformationen (13) liefern dieselbe symmetrische eigentliche Transformation:

$$(16) \quad z_i = x_i - 2 a_i a_x - 2 b_x b_i,$$

in welcher Reihenfolge sie auch angewandt werden*).

Setzt man beliebig viele unter einander vertauschbare Transformationen dieser Art, $a, b, c, \dots$, zusammen, so entsteht die folgende:

$$(17) \quad z_i = x_i - 2 a_i a_x - 2 b_x b_i - 2 c_x c_i - \dots$$

Je n derselben hinter einander angewandt, liefern aber eine identische Transformation. Es ergibt sich dies aus der Identität:

$$(18) \quad -x_i = x_i - 2 a_i a_x - 2 b_x b_i - 2 c_x c_i - \dots$$

Man erhält dieselbe, wenn man die identisch verschwindende Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n & a_x \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n & b_x \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n & c_x \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & \sum x_i^2 \end{vmatrix} = 0$$

mit der Determinante der $a, b, c, \dots$ multiplicirt und die entstehende Identität nach x_i differentirt.

Es lässt sich nachweisen, dass ausser dieser identischen Substitution, welche durch n vertauschbare Substitutionen (1) vermittelt wird, keine andere Gruppe von n nichtvertauschbaren Transformationen der Art (1) vorhanden ist, welche ebenfalls eine identische Transformation liefert.

Betrachtet man nämlich die Transformation (1) als eine Centralprojection der Fläche $f=0$ in sich selbst, bei welcher je zwei auf einer durch den Punkt a gehenden Geraden gelegene Flächenpunkte mit einander vertauscht werden, so ergibt sich leicht: Soll überhaupt eine identische Transformation durch n -malige Centralprojection entstehen, so muss jede Gruppe von $n-1$ Projectionscentren mit sämtlichen Berührungspunkten der vom n^{ten} an die Fläche gelegten Tan-

*) Solche Transformationen (vertauschbare Spiegelungen) sind bereits von den Geometern mehrfach verwendet. Vgl. z. B. Lie, Partielle Differentialgleichungen und Complexe, Math. Annalen Bd. V, p. 180, 182.

genten in einer Ebene liegen, d. h. je $n-1$ der Punkte a, b, c müssen sich in der Polarebene des n^{ten} befinden, wodurch gerade die Bedingungen der Involution $(ab) = 0, (ac) = 0, \dots, (bc) = 0, \dots$ herbeigeführt werden.

Eine jede symmetrische Transformation lässt sich in $\frac{n}{2}$ specielle uneigentliche Substitutionen zerlegen, die unter sich vertauschbar sind. Um dies zu beweisen, gehe man von der Form symmetrischer Transformationen aus, welche $\frac{n}{2}$ Systeme von Coefficienten $a, b, c, \dots$ verwendet, und durch die specielle quadratische Form:

$$F = \begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & (ac) & \dots & a_x \\ (ab) & (b^2) & (bc) & \dots & b_x \\ (ac) & (cb) & (c^2) & \dots & c_x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_x & b_x & c_x & \dots & \frac{1}{2} \sum x_i^2 \end{vmatrix}$$

vermittelt ist*). Der Differentialquotient F_i hat den Werth:

$$F_i = \begin{vmatrix} (a^2) & (ab) & \dots & a_i \\ (ab) & (b^2) & \dots & b_i \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_x & b_x & \dots & \frac{1}{2} x_i \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man nun F mit dem Quadrat der Determinante:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nu_1 & \nu_2 & \dots & \nu_s \end{vmatrix},$$

welche $\frac{n}{2} = s$ Reihen besitzt, so kann man an Stelle der $a, b, c, \dots$ solche lineare Combinationen derselben mit Hülfe der Parameter $\lambda, \mu, \dots, \nu$ einführen, dass in F_i alle nicht zur Hauptdiagonale gehörenden Coefficienten fortfallen, womit F_i sich in

$$x_i - 2\alpha_x \alpha_i - 2\beta_x \beta_i - 2\gamma_x \gamma_i \dots$$

verwandelt und die allgemeine symmetrische Substitution in $\frac{n}{2}$ vertauschbare specielle (1) zerlegt ist.

Man kann darnach die allgemeine eigentliche Substitution in zwei symmetrische Transformationen zerlegen, deren jede aus einer Gruppe von $\frac{n}{2}$ unter sich vertauschbaren Spiegelungen besteht.

Wir untersuchen schliesslich die fortgesetzte Anwendung uneigentlicher specieller Substitutionen überhaupt. Im Ganzen verlangt eine

*) Voss, Math. Annalen Bd. X, p. 146.

orthogonale Substitution $\frac{n}{2}(n-1)$ willkürliche Parameter. Da nun jede Substitution (1) schon $n-1$ enthält, so würden bereits $s = \frac{n}{2}$ derselben combinirt die hinreichende Allgemeinheit zu besitzen scheinen. Aber man kann sich leicht überzeugen, dass selbst die Anwendung von $n-2$ Substitutionen (1) *immer noch keine allgemeine eigentliche Substitution liefert*. Es wird daher eines besondern Beweises bedürfen, dass eine jede eigentliche Substitution als Folge von n speciellen uneigentlichen Substitutionen angesehen werden kann.

Obwohl von uns schon oben eine Zerlegung der Substitution in n specielle von besonderem Charakter gelehrt ist, so wollen wir doch noch eine Methode angeben, *welche direct die Coefficienten a_{ik} dieser gegebenen eigentlichen Substitution in solche umwandelt, wie sie aus n hinter einander angewandten von der Form (1) entstehen*.

Die Coefficienten der orthogonalen Substitution, welche entsteht, wenn man successive specielle Transformationen (1) $a, b, c, \dots$ anwendet, besitzen schon bei viermäliger Wiederholung eine sehr unübersichtliche Form. Wir suchen daher zunächst die aus k successiven Transformationen dieser Art entstehenden Coefficienten übersichtlicher darzustellen.

Wir bezeichnen diese Coefficienten durch α_{ik} ; ihre Determinante ist gleich $(-1)^k$. Man hat ferner die Identität:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{ik} & u_i \\ v_k & 0 \end{vmatrix} \alpha_{ik} = - \sum u_i v_k \alpha_{ik},$$

oder:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} \alpha_{ik} & u_i \\ v_k & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{k-1} \sum u_i v_k \alpha_{ik},$$

d. h. man kann die Coefficienten α_{ik} als ihren eigenen ersten Unterdeterminanten proportional ansehen*). Macht man von dieser Darstellung Gebrauch, so erhält man ohne besondere Schwierigkeit durch geeignete Determinantenreductionen als Werth des Ausdruckes rechter Hand in (19) die übersichtlichere Determinante:

$$(20) \quad (-1)^{k+1} \begin{vmatrix} 1 & 2(ab) & 2(ac) & 2(ad) & \dots & 2(au) \\ 0 & 1 & 2(bc) & 2(bd) & \dots & 2(bu) \\ 0 & 0 & 1 & 2(cd) & \dots & 2(cu) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 2(du) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ (av) & (bv) & (cv) & (dv) & \dots & (uv) \end{vmatrix}.$$

*) Baltzer, Det. p. 173.

Sie liefert das Bildungsgesetz der α_{ik} , denn α_{ik} ist der Coefficient von $u_i v_k$ in der Determinante (20). Bezeichnen wir die Determinante, welche durch Weglassung des letzten Elementes (uv) entsteht, durch Δ' , so hat man:

$$(21) \quad \sum u_i v_k \alpha_{ik} = \Delta' + (uv).$$

Wir wollen jetzt $k = n$ (gerade) voraussetzen und eine eigentliche Substitution betrachten, welche durch die Cayley'schen Formeln:

$$(22) \quad a_{ik} = 2 \beta_{ik} \frac{\omega}{B} - [ik]$$

gegeben ist; die β_{ik} sind die Unterdeterminanten der schiefen Determinante der b_{ik} , B (§ II.), und $[ik]$ nur dann von Null verschieden und gleich eins, wenn $i = k$. Daher ist:

$$(23) \quad \sum a_{ik} u_i v_k = \frac{2\omega}{B} \sum \beta_{ik} u_i v_k - (uv).$$

Unterwirft man die Coefficienten a, b, c jetzt den $\frac{n}{2}(n-1)$ Bedingungen:

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum b_{ir} a_i b_r = 0, \quad \sum b_{ir} b_i c_r = 0, \quad \sum b_{ir} c_i d_r = 0, \text{ u. s. w.} \\ \sum b_{ri} a_i c_r = 0, \quad \sum b_{ri} b_i d_r = 0, \\ \sum b_{ri} a_i d_r = 0, \quad \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

welche wegen $b_{ik} = -b_{ki}$, $b_{ii} = b_{kk} = \omega$ die weiteren Relationen:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum b_{ri} a_i a_r = \omega, \\ \sum b_{ri} b_i b_r = \omega, \\ \sum b_{ri} c_i c_r = \omega, \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum b_{ri} a_r b_i = 2\omega(ab), \quad \sum b_{ri} b_r c_i = 2\omega(bc), \quad \sum b_{ri} c_r d_i = 2\omega(cd) \cdot \cdot \\ \sum b_{ri} a_r c_i = 2\omega(ac), \quad \sum b_{ri} b_r d_i = 2\omega(bd), \\ \sum b_{ri} a_r d_i = 2\omega(ad), \quad \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

nach sich ziehen, so lässt sich zeigen, dass aus den den Gleichungen (24) unterworfenen Coefficienten von n speciellen uneigentlichen Transformationen gerade die vorgelegte der Coefficienten a_{ik} hervorgeht.

Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Determinante der $a, b, c, \dots$ durch Δ'' . Dann ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} & u_1 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} & u_n \\ v_1 & v_2 & \dots & v_n & 0 \end{vmatrix} \Delta''^2 = \frac{\Delta'}{2} \omega^{n-1},$$

nach welcher Gleichung:

$$(27) \quad \sum u_i v_k \beta_{ik} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta'}{\Delta''^2} \omega^{n-1},$$

oder nach (21), (23):

$$\sum u_i v_k \beta_{ik} = \frac{B}{2\omega} \left[\sum u_i v_k a_{ik} + (uv) \right],$$

$$\Delta' = \sum \left[u_i v_k a_{ik} - (uv) \right],$$

$$\frac{B}{2\omega} \left[\sum u_i v_k a_{ik} + (uv) \right] = -\frac{1}{2\Delta''^2} \left[\sum u_i v_k a_{ik} - (uv) \right] \omega^{n-1},$$

und endlich wegen:

$$B\Delta''^2 = \omega^n$$

$$(28) \quad a_{ik} = -a_{ki}.$$

Damit sind die a_{ik} in eine Form gebracht, in welcher sie direct als Coefficienten der n mal wiederholten uneigentlichen Transformation erscheinen. Die a_i sind dabei noch ganz willkürlich, die b_i einer, die c_i zwei linearen Gleichungen unterworfen, und so fort. Man kann daher durch eine Construction, welche der eines Polareckes einer Fläche zweiten Grades ganz analog verläuft, beliebig viele solcher Gruppen von n Punkten erhalten, welche, successive als Centren einer Centralprojection benutzt, die gegebene Transformation hervorbringen.

Liegt eine uneigentliche Substitution vor, so kann man sie zunächst in eine specielle uneigentliche und eine eigentliche mit der Doppelwurzel 1 zerlegen. Die letztere lässt sich dann jedenfalls aus $n-2$ uneigentlichen speciellen in der vorhin beschriebenen Weise zusammensetzen, so dass im Ganzen eine uneigentliche Substitution auf $n-1$ Centralprojectionen zurückgeführt werden kann. Endlich lässt sich leicht erkennen, dass sich bei ungeradem n schon $n-1$ Transformationen von der Art (1) zu einer gegebenen zusammensetzen lassen.

Wir schliessen hieran noch folgende Bemerkung. Die Cayley'schen Formeln setzen uns in den Stand, eine allgemeine eigentliche Substitution mit der Determinante $+1$ hinzuschreiben. Es soll hier noch gezeigt werden, wie man sich derselben bedienen kann, um

eigentliche Substitutionen anzugeben, deren Determinante $\Omega(\rho)$ die Doppelwurzel $+1$ oder -1 oder beide gleichzeitig besitzt.

Nimmt man eine allgemeine uneigentliche Substitution:

$$z_i = \sum b_{ik} x_k,$$

so entsteht daraus durch Anwendung der speciellen

$$y_i = z_i - 2 b_i b_i,$$

die eigentliche

$$y_i = \sum a_{ik} x_k, \quad a_{ik} = b_{ik} - 2 b_i \sum b_r b_{rk}.$$

Demnach ist die Determinante $\Omega(\rho)$ gleich:

$$\begin{vmatrix} b_{ik} - \rho & b_i \\ 2 \rho b_k & -1 \end{vmatrix}.$$

Soll nun $\Omega(1) = 0$ sein, so hat man als einzige Bedingung:

$$(\alpha b) = 0,$$

zu welcher noch die analoge:

$$(\beta b) = 0$$

hinzukommt, wenn auch $\Omega(-1)$ verschwinden soll. Die α, β haben dabei die unter (5) p. 342 angegebene Bedeutung.

§ VI.

Besondere Fälle.

Wir werden jetzt die Fälle $n = 2, 3, 4, 6$ der orthogonalen Substitutionen besprechen, welche vorzugsweise in geometrischen Untersuchungen Verwendung finden.

A. Es sei $n = 2$; Substitution im binären Gebiet.

Die allgemeine uneigentliche Substitution ist zugleich nach § V. die *specielle*. Dagegen muss die eigentliche Substitution aus zwei speciellen uneigentlichen (Spiegelungen) zusammengesetzt werden. Nimmt man nach Baltzer*) als Coefficienten der gegebenen Substitution die folgenden:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, & a_{12} &= \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \\ a_{21} &= \frac{-2\lambda}{1+\lambda^2}, & a_{22} &= \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}, \end{aligned} \quad B = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix},$$

so hat man für

$$\lambda = \frac{(\alpha b)}{\sqrt{1-(\alpha b)^2}},$$

oder:

$$\lambda = \frac{\sqrt{1-(\alpha b)^2}}{(\alpha b)},$$

*) Baltzer, Det. p. 177.

wo:

$$(ab) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

so ist:

$$\begin{aligned} -a_{11} &= 1 - 2a_1^2 - 2b_1^2 + 4(ab)a_1 b_1, \\ -a_{12} &= -2a_1 a_2 - 2b_1 b_2 + 4(ab)a_2 b_1, \\ -a_{21} &= -2a_1 a_2 - 2b_1 b_2 + 4(ab)a_1 b_2, \\ -a_{22} &= 1 - 2a_2^2 - 2b_2^2 + 4(ab)a_2 b_2. \end{aligned}$$

Rechterhand stehen jetzt die Coefficienten, welche durch successive Ausführung der Substitutionen a, b entstehen. Die *symmetrische* Substitution ist hier zugleich die *identische*, $(ab) = 0$.

In Verbindung mit der am Schluss des § IV. betrachteten Zerlegung einer eigentlichen Substitution in eine Reihe vertauschbarer, deren jede eine ∞^{n-3} Schaar linearer Reihen so ungeändert lässt, dass jede einzelne Reihe nur in sich verschoben wird, welcher letztere Process auf 2 successiven Spiegelungen beruht, hat man den folgenden Satz*):

Eine jede eigentliche Substitution im Raume von $2k-s$ Dimensionen lässt sich in k aus 2^{k-1} Systemen auszuwählende vertauschbare speciellere Transformationen zerlegen, deren jede ein System von Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades ungeändert lässt und auf der Folge von zwei Spiegelungen beruht.

B. Es sei $n=3$; orthogonale Substitution in der Ebene.

Die allgemeine Substitution mit positiver Determinante $+1$ entsteht durch Verbindung zweier uneigentlicher specieller. Setzt man nach Baltzer:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & \nu & -\mu \\ -\nu & 1 & \lambda \\ \mu & -\lambda & 1 \end{vmatrix} = 1 + \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2,$$

so sind die Coefficienten derselben:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2 \frac{(1+\lambda^2)}{B} - 1, & a_{12} &= 2 \frac{\lambda\mu + \nu}{B}, & a_{13} &= 2 \frac{\lambda\nu - \mu}{B}, \\ a_{21} &= 2 \frac{\lambda\mu - \nu}{B}, & a_{22} &= 2 \frac{(1+\mu^2)}{B} - 1, & a_{23} &= 2 \frac{\mu\nu + \lambda}{B}, \\ a_{31} &= 2 \frac{\lambda\nu + \mu}{B}, & a_{32} &= 2 \frac{\mu\nu - \lambda}{B}, & a_{33} &= 2 \frac{(1+\nu^2)}{B} - 1, \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} \lambda(ab) &= a_2 b_3 - a_3 b_2, \\ \mu(ab) &= a_3 b_1 - a_1 b_3, \\ \nu(ab) &= a_1 b_2 - a_2 b_1, \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{(ab)^2} = \frac{1}{[a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3]^2},$$

*, Derselbe ist für den gewöhnlichen Raum mannigfach verwendet; siehe z. B. Klein, diese Annalen Bd. IX, p. 188 und die dort gegebenen Citate.

so ergeben sich die Coefficienten a_{ik} in derjenigen Form, welche sie durch die Verbindung der Centralprojectionen des Kegelschnittes $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ von den Punkten a, b aus erhalten würden.

Die genannten Punkte sind auf einer durch den Punkt λ, μ, ν gehenden Geraden so zu wählen, dass:

$$B(ab)^2 = 1 \text{ oder } = (a^2)(b^2),$$

je nachdem zwischen den a_i, b_i die Identität $(a^2) = 1, (b^2) = 1$ vorausgesetzt wird oder nicht.

Zu jedem willkürlich auf dieser Geraden angenommenen Punkte a gehören mithin noch zwei verschiedene b , welche dieselbe gegebene Substitution mit a verbunden hervorbringen. Man kann dies auch so ausdrücken:

Construirt man in einen Kegelschnitt Vierseite, deren zwei Gegenseiten sich in einem festen Punkte a schneiden, während die dritte Seite durch einen festen Punkt b geht, so geht auch die vierte durch einen festen Punkt, welcher mit a, b auf einer Geraden und zu b in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirt liegt.

Die identische Transformation besteht in der dreimaligen Projection des Kegelschnittes von den Ecken eines Polardreiecks aus: In einen Kegelschnitt lassen sich unendlich viele Dreiecke beschreiben, deren Seiten durch die Ecken des nämlichen Polardreieckes gehen.

Die Determinante $\Omega(\rho)$ hat im allgemeinen Falle drei verschiedene Wurzeln, also die Charakteristik:

$$(1) \quad [1, 1, 1].$$

Die besonderen Fälle:

$$(2) \quad [1, (11)],$$

$$(3) \quad [(21)]$$

entstehen, je nachdem die Punkte a, b harmonisch conjugirt sind, oder ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt berührt.

C. $n = 4$. Wir haben dann die *Transformation einer Fläche zweiten Grades in sich selbst*.

Die eigentliche Transformation kann auf unendlich viele Arten nach § V. aus vier Centralprojectionen zusammengesetzt werden. Die viermalige Centralprojection von den Ecken eines Polartetraeders in ganz beliebiger Reihenfolge ist eine identische: es giebt ∞^2 Vierseite, welche in die Fläche so einbeschrieben werden können, dass die Seiten durch die Ecken eines festen Polartetraeders gehen.

[Anmerkung. Betrachtet man also ein Bündel von Flächen mit gemeinsamem Polartetraeder, so lassen sich 8 verschiedene collineare Transformationen angeben, welche jede Fläche, also auch die ihnen gemeinsame Raumcurve vierter Ordnung ungeändert lassen, aus

welcher Bemerkung man leicht eine Reihe bekannter Sätze über in eine ebene Curve dritter Ordnung eingeschriebene Vierseite, sowie über solche, die einer R_4 eingeschrieben sind, herleitet.]

Andererseits kann die eigentliche Substitution in zwei successive (eigentliche) symmetrische zerlegt werden. Die symmetrische Transformation setzt an Stelle eines Punktes der gegebenen Fläche den Berührungspunkt einer Ebene, welche dem ersten in Bezug auf eine Fläche polar conjugirt ist, die mit der gegebenen ein Vierseit von Erzeugenden gemein hat. Die symmetrische Transformation kann noch auf ∞^1 Arten in zwei vertauschbare Centralprojectionen zerlegt werden.

Bei der eigentlichen Substitution bleiben ferner im Allgemeinen vier Punkte fest, die Eckpunkte eines von Erzeugenden gebildeten Vierseits, in Bezug auf welches als Coordinatentetraeder die Gleichung der Fläche dann $X_1 \Xi_1 + X_2 \Xi_2 = 0$ wird: *gleichzeitig gehen alle Flächen des Büschels $X_1 \Xi_1 + \lambda X_2 \Xi_2 = 0$ in sich über*, und jede Gerade des Raumes formt sich in eine Tangente desselben Flächenpaares aus jenem Büschel um, dem sie ursprünglich angehört.

Die eigentlichen Transformationen zerfallen in folgende Classen:

- 1) $[1, 1, 1, 1]$, der allgemeine Fall,
- 2) $[2, 2]$, 2 nicht ausgezeichnete Doppelwurzeln,
- 3) $[(11), (11)]$, desgleichen, mit verschwindenden ersten Unterdeterminanten, wobei alle Erzeugenden eines Systems fest bleiben,
- 4) $[(11), 1, 1]$, 2 beliebige Centralprojectionen*) von den Punkten a, b aus;
- 5) $[(11), (11)]$, Fall, wo a zu b conjugirt ist;
- 6) $[(31)]$; zwischen den Coordinaten von a, b besteht die Gleichung:

$$(ba)^2 = (a^2)(b^2).$$

Bei einer uneigentlichen Substitution gehen dagegen alle Flächen des Netzes:

$$\lambda X_1^2 + \mu \Xi_1^2 + 2\nu X_2 \Xi_2 = 0$$

in sich über. Diese Flächen berühren die gegebene

$$X_1^2 + \Xi_1^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0$$

in zwei verschiedenen Punkten und gehen durch zwei conjugirte Pole derselben; je zwei derselben schneiden sich in Kegelschnitten, welche durch die Substitution in einander gegenseitig übergeführt werden. Unter diesen Flächen sind besonders hervorzuheben:

*) Ich habe hier, wie in meiner früheren Arbeit (diese Annalen Bd. X, p. 179), Elementartheiler, welche einem der ausgezeichneten Wurzelwerthe angehören, durch einen übersetzten Strich hervorgehoben.

$$\begin{aligned} -X_1^2 + \Xi_1^2 + 2X_2\Xi_2 &= 0, \\ X_1^2 - \Xi_1^2 + 2X_2\Xi_2 &= 0, \end{aligned}$$

welche mit der gegebenen je eine Berührung längs der Ebenen $X_1=0$, $\Xi_1=0$ eingehen: die Polarebenen beider Flächen in Bezug auf die Punkte der gegebenen umhüllen diese letztere selbst.

[Anmerkung. Man kann sich leicht auch direct von diesen Eigenschaften uneigentlicher Substitutionen überzeugen. Da bei denselben zwei Punkte auf der Fläche fest bleiben, die beiden anderen Punkte, in denen sich die zugehörigen Erzeugenden schneiden, gegenseitig sich vertauschen, so genügt es, die Fläche $x_1x_2 + x_3x_4 = 0$ durch die Gleichungen:

$$x_1 = \lambda y_2, \quad x_2 = \mu y_1, \quad x_3 = \nu y_3, \quad x_4 = \varrho y_4, \quad \lambda\mu = \nu\varrho$$

in sich überzuführen, wobei denn in der That jede Fläche des Netzes:

$$\alpha x_1x_2 + \beta x_3x_4 + \gamma \left[\frac{x_1^2}{\lambda} + \frac{x_2^2}{\mu} \right] = 0$$

in sich übergeht*.)]

Die Classification der uneigentlichen Substitutionen ist sehr einfach, da immer die Wurzeln $+1$, -1 mit auftreten müssen. Man hat daher die folgenden Fälle:

- 1) $[1, 1, 1, 1]$, der allgemeine mit zwei reciproken einfachen Wurzeln,
- 2) $[3, 1]$,
- 3) $[(111), 1]$ mit einer dreifachen Wurzel $+1$, für welche noch alle zweiten Unterdeterminanten von $\Omega(\varrho)$ verschwinden (specielle Substitutionen).

D. $n=6$. Wir erhalten die *Transformation des Linienraumes* in sich, wenn wir die sechs homogenen Variablen x als Liniencoordinaten im Raume auffassen. Diese Transformationen zerfallen in *collineare* und *reciproke* des gewöhnlichen Punkt-Ebenenraumes, je nachdem die Substitution eine *eigentliche* oder *uneigentliche* ist**).

Die *specielle uneigentliche* Substitution ist diejenige reciproke *Umformung des Punktraumes*, welche mit dem *linearen Complexe* verknüpft ist, vermöge der an Stelle jedes Punktes die durch ihn gehende Complexebene, an Stelle jeder Geraden ihre reciproke Polare in Bezug auf den Complex tritt. Die *identische Substitution* ist vermittelt durch die *Umformung in Bezug auf sechs gegenseitig in Involution liegende lineare Complexe*. Die *symmetrische allgemeinste* Transformation setzt an Stelle

*) Vgl. insbesondere noch § VIII.

**) Dieser wichtige Satz rührt von Herrn Klein her, vgl. Math. Annalen Bd. IV, S. 356.

irgend einer Geraden ihre reciproke Polare in Bezug auf eine beliebige Fläche zweiten Grades*); ausser dieser uneigentlichen Substitution existirt noch eine symmetrische eigentliche, es ist die (collineare) Umformung in Bezug auf zwei in Involution liegende lineare Complexe**).

Wir betrachten zunächst die collineare Substitution. Im Allgemeinen bleiben sechs specielle lineare Complexe fest, deren Axen die Kanten eines Tetraeders bilden. Die Gesammtheit der Complexe zweiten Grades, welche in sich übergehen, wird durch die Gruppe quadratischer Formen:

$$\lambda X_1 \Xi_1 + \mu X_2 \Xi_2 + \nu X_3 \Xi_3 = 0$$

gebildet, welche wegen der Identität:

$$X_1 \Xi_1 + X_2 \Xi_2 + X_3 \Xi_3 = 0$$

ein Büschel tetraedraler Complexe darstellen.

Andererseits geht aus unseren früheren Ueberlegungen hervor, dass die Collineation sich auf unendlich viele Arten in zwei successive Polarreciprocitäten zerlegen lässt in Bezug auf Flächen, welche jenes feste Tetraeder zum gemeinsamen Polartetraeder haben. Ebenso kann sie immer durch Umformungen in Bezug auf sechs lineare Complexe ersetzt werden.

Nach den in § II. entwickelten Sätzen ist es ferner leicht, die überhaupt möglichen Substitutionen, nach den Elementartheilern der Determinante $\Omega(\rho)$ geordnet, anzugeben. Wir führen dies hier nicht weiter aus, weil bei der Untersuchung über gemeinsame Polartetraeder zweier Flächen zweiten Grades für die eigentliche Transformation bereits alle Fälle aufgezählt sind. Die dort aufgestellte Tabelle***) gewinnt dadurch noch eine etwas allgemeinere Bedeutung. Aber es muss hier bemerkt werden, dass dort zwei Fälle, es sind $[(2\ 1\ 1), (1\ 1)]$, $[(2\ 1\ 1) (1\ 1)]$, Nr. 15 und 16, irrthümlich als möglich bezeichnet sind, welche nach den in § II. bewiesenen allgemeinen Determinanteneigenschaften nicht vorhanden sein können.

Die Eigenschaften der reciproken Substitution sind wesentlich andere. Es bleiben im Allgemeinen zwei allgemeine lineare Complexe und vier specielle fest, welche letzteren die Kanten eines Tetraeders bilden, die fehlenden beiden Kanten vertauschen sich gegenseitig.

*) Voss, Math. Annalen Bd. X, S. 166.

**) Ebenda S. 165 Anm. Diese Transformation ist nicht wesentlich verschieden von derjenigen, welche an Stelle einer Geraden x die vierte harmonische zu zwei festen Geraden a, b und x auf der Begelschaar a, b, x setzt, deren Charakteristik $[(1\ 1\ 1\ 1), (1\ 1)]$ ist. Tritt an Stelle des harmonischen ein beliebiges Doppelverhältniss ein, so ist die letztere $[(1\ 1\ 1\ 1), 1, 1]$.

***) Voss, Math. Annalen Bd. X, S. 172 ff.

In sich transformirt werden alle Formen:

$$(1) \quad \lambda_1 X_1^2 + \lambda_2 \Xi_1^2 + 2 \lambda_3 X_2 \Xi_2 + 2 \lambda_4 X_3 \Xi_3,$$

welche wegen der Identität, welche für alle Gerade des Raumes besteht:

$$X_1^2 + \Xi_1^2 + 2 X_2 \Xi_2 + 2 X_3 \Xi_3 = 0$$

ein Netz quadratischer Complexe bilden. Die Charakteristik derselben:

$$[1 \ 1 \ (1 \ 1) \ (1 \ 1)]$$

deutet nach Herrn Weiler's Arbeit*) auf eine *Schaar von Complexen*, von denen je einfach unendlich viele die nämliche aus zwei Flächen zweiten Grades bestehende singuläre Fläche besitzen.

Diese Flächen zweiten Grades gehen, wie man leicht sieht, *gegenseitig in einander über*. In der That entnehmen wir aus § III. direct die Gleichung der Schaar specieller Complexe zweiten Grades, welche gegenseitig in sich übergehen:

$$\sqrt{1 - \lambda^2} X_1^2 - \sqrt{1 - \lambda^2} \Xi_1^2 \pm 2 \lambda X_1 \Xi_1 + 2 X_2 \Xi_2 - 2 X_3 \Xi_3 = 0,$$

welche mit Hülfe der Identität auch in die Form:

$$[\lambda X_1 \pm \sqrt{1 - \lambda^2} \Xi_1]^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0$$

gebracht werden kann. Und diese Schaar stellt zugleich die *sämmtlichen singulären Flächen* vor, die in dem angegebenen Netze vorhanden sind. Wir schreiben die Gleichung derselben der bequemeren Untersuchung halber in der Gestalt:

$$(2) \quad \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 (x_3^2 + x_4^2) + \lambda_4 [x_5^2 + x_6^2] = 0,$$

wo an Stelle von $X_1, \Xi_1, 2 X_2 \Xi_2, 2 X_3 \Xi_3$ wieder $x_1, x_2, x_3^2 + x_4^2, x_5^2 + x_6^2$, gesetzt ist, damit die Identität wieder in der Form:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0$$

erscheint. An Stelle von (2) kann man auch nehmen:

$$(3) \quad (\lambda_1 - \lambda_4) x_1^2 + (\lambda_2 - \lambda_4) x_2^2 + (\lambda_3 - \lambda_4) (x_3^2 + x_4^2) = 0,$$

oder, wenn:

$x_3^2 + x_4^2 = z^2$, $\lambda_1 - \lambda_4$, $\lambda_2 - \lambda_4$, $\lambda_3 - \lambda_4$ gleich μ_1, μ_2, μ_3 gesetzt werden:

$$(4) \quad \mu_1 x_1^2 + \mu_2 x_2^2 + \mu_3 z^2 = 0,$$

während die Identität in

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + z^2 = 0$$

übergeht.

Die singuläre Fläche von (4) in Linienkoordinaten y ist nun die Discriminante der in λ quadratischen Gleichung:

*) Weiler, Math. Annalen Bd. VII, S. 160.

$$\frac{\mu_1 y_1^2}{1 + \lambda \mu_1} + \frac{\mu_2 y_2^2}{1 + \lambda \mu_2} + \mu_3 \frac{(y_3^2 + y_4^2)}{1 + \lambda \mu_3} = 0.$$

Diese Discriminante zerfällt aber in die Factoren:

$$(5) \quad \begin{cases} \mu_1 \alpha y_1^2 + \mu_2 \beta y_2^2 + \mu_3 \gamma (y_3^2 + y_4^2) - 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2 \alpha \beta} y_1 y_2 = 0, \\ \mu_1 \alpha y_1^2 + \mu_2 \beta y_2^2 + \mu_3 \gamma (y_3^2 + y_4^2) + 2 \sqrt{\mu_1 \mu_2 \alpha \beta} y_1 y_2 = 0, \end{cases}$$

wo:

$$\alpha = \mu_2 - \mu_3 = \lambda_2 - \lambda_3,$$

$$\beta = \mu_3 - \mu_1 = \lambda_3 - \lambda_1,$$

$$\gamma = \mu_1 - \mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1.$$

Die Gleichungen (5) sind die von zwei Flächen zweiten Grades. Man kann sie durch die einzige Gleichung:

$$\left[\frac{X_1 \sqrt{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_3)} \pm \Xi_1 \sqrt{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_3 - \lambda_1)}}{\lambda_2 - \lambda_1 \quad \lambda_3 - \lambda_1} \right]^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0$$

darstellen, oder auch, weil die Summe der Quadrate der Coefficienten von X_1, Ξ_1 gleich eins ist, in der oben angegebenen Form:

$$[X_1 \Lambda \pm \Xi_1 \sqrt{1 - \Lambda^2}]^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0.$$

Aber es befinden sich unter den Complexen (2) noch solche, für welche die beiden Gleichungen (5) zusammenfallen, nämlich wenn α oder β verschwindet. Setzt man demgemäss $\lambda_2 = \lambda_3$ oder $\lambda_1 = \lambda_3$, so entstehen zwei besondere Flächen zweiten Grades:

$$X_1^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0,$$

$$\Xi_1^2 + 2 X_2 \Xi_2 = 0,$$

welche als doppeltzählende singuläre Flächen durch die reciproke Substitution in sich selbst übergehen, wie freilich aus § III. direct entnommen werden konnte.

Die Classification der uneigentlichen Substitutionen wird durch den Umstand beträchtlich erleichtert, dass in der Gleichung $\Omega(\varrho) = 0$ immer zwei Wurzeln gleich $+1$ oder -1 sind, und dass jede derselben auch bei höherer Vielfachheit nur in ungerader Anzahl vorkommen kann. Ausserdem kommen die Gesetze des § II. in Anwendung. Wir haben daher folgende Fälle:

1) $[1, 1, 1, 1, 1, 1]$; der allgemeine, die beiden ersten Elementartheiler beziehen sich auf die Wurzeln ± 1 , die anderen auf zwei Paare reciproker Wurzeln.

2) $[1, 1, 2, 2]$, zwei gleiche Paare reciproker Wurzeln.

3) $[1, 1 (11) (11)]$, desgleichen, mit verschwindenden ersten Unterdeterminanten.

4) $[3, 1, 1, 1]$, drei Wurzeln sind gleich $+1$, ausserdem ist ein Paar reciproker vorhanden,

- 5) $[5\ 1]$.
- 6) $[3\ 3]$.
- 7) $[(111), 1, 1, 1]$, dreimal wiederholte uneigentliche specielle Substitution a, b, c .
- 8) $[(111), 3]$, desgleichen, mit einer invarianten Beziehung zwischen den a, b, c .
- 9) $[(311), 1]$.
- 10) $[(111)(111)]$, symmetrische Transformation.
- 11) $[(11111), 1]$, uneigentliche specielle Substitution.

Die Substitution $[(221), 1]$ ist wahrscheinlich nicht vorhanden. Uebrigens würden sich aus 4), 5), 7), 8), 9), 11) noch ebenso viele nicht eigentlich verschiedene Substitutionen ergeben, in welchen die Wurzel -1 die ausgezeichnete Eigenschaft besitzt, welche in jenen der Wurzel $+1$ beilegt worden ist. Sieht man von diesen ab, so kommen zu den früher angegebenen 21 eigentlichen Transformationen*) noch 11 uneigentliche hinzu, so dass im Ganzen 32 Transformationen des Linienraumes vorhanden sind, welche wesentlich durch die Beschaffenheit der Gebilde sich unterscheiden, welche bei denselben ungeändert bleiben**).

§ VII.

Zur Theorie der Reciprocität.

Die Betrachtungen des vorigen § haben einige vielleicht bisher nicht bemerkte Eigenschaften der reciproken Punkt-Ebenentransformation ergeben***). Es wird daher nicht unzweckmässig sein, wenn dieselben jetzt direct als eine Folge der reciproken Beziehung nachgewiesen werden.

Auch hier werden wir eine unbeschränkte Zahl von Variablen voraussetzen. Wir betrachten die Substitution:

$$(1) \quad u_i = \sum a_{ir} x_r,$$

in welcher die n Variablen u_i homogene Ebenencoordinaten, die x_i homogene Punktcoordinaten bedeuten. Die Umkehrung der Gleichungen

(1) liefert:

$$(2) \quad u_i \Delta_{is} = \Delta x_s,$$

*) Die identische Transformation ist hier mitgezählt.

**) Trotz vielfacher Versuche habe ich wenigstens das Vorhandensein von weiteren Substitutionen, welche nach § II. denkbar wären, nicht constatiren können.

***) Es ist schon im vorigen § vielfältig hervorgetreten, dass in Gebieten von ungerader Dimension die uneigentliche orthogonale Substitution einen speciellen Charakter gegenüber der eigentlichen besitzt. In ähnlicher Weise verhält sich die Reciprocität zur Collineation; schon die Reciprocität der Ebene führt ein ganzes Büschel von Kegelschnitten in sich über.

wo Δ , Δ_i die Determinante und Unterdeterminanten des Systems der a_{ir} bedeuten. Soll die Ebene u den Punkt x , dem sie zugeordnet ist, enthalten, so muss:

$$(3) \quad F = \sum a_{ir} x_i x_r = 0$$

sein. Die Transformation ordnet aber gleichzeitig jeder Ebene v auch einen Punkt y zu. Setzt man nämlich:

$$\sum v x = \sum u y,$$

so hat man, wenn rechts statt der u die x aus (1) gesetzt werden:

$$\sum v x = \sum a_{ir} x_r y_i,$$

also:

$$(4) \quad v_r = \sum a_{ir} y_i,$$

und umgekehrt:

$$(5) \quad \Delta y_i = \sum \Delta_{ir} v_r.$$

Soll demnach eine Ebene v den ihr entsprechenden Punkt enthalten, so muss:

$$(6) \quad \Phi = \sum v_r v_i \Delta_{ir} = 0$$

sein. Die beiden Flächen F und Φ stehen in der Beziehung zu einander, dass F durch die Substitution (1) in Φ übergeht und umgekehrt Φ in F . In der That hat man:

$$\Delta^2 F = \sum a_{ir} u_i \Delta_{li} u_k \Delta_{kr} = \Delta \sum u_i u_i \Delta_{ii} = \Delta \Phi,$$

F und Φ sind die bekannten beiden Ordnungsflächen*) der Substitution (1).

Wir untersuchen nun, wie oft es geschieht, dass dem Punkte x die Ebene u , dieser wieder der Punkt x entspricht. Das heisst, es ist in den Gleichungen (1), (2), (4), (5) zu setzen:

$$v_i = u_i, \quad \varrho x_i = y_i$$

So entstehen die Gleichungen:

$$(7a) \quad \begin{cases} u_i = \sum a_{ir} x_r, \\ u_r = \varrho \sum a_{ir} x_i, \end{cases}$$

d. h.:

$$(7) \quad \varrho \sum a_{ir} x_i = \sum a_{ri} x_i$$

Die Gleichungen (7) führen auf eine Gleichung n^{ten} Grades in ϱ , welche reciproke Wurzeln besitzt, deren Product gleich eins ist. Ist n eine gerade Zahl, so sind im Allgemeinen nur reciproke Wurzeln vor-

*) Vgl. Reye, Geometrie der Lage II, 18.

handen, während die Wurzel 1 nur als vielfache Wurzel auftreten kann, für die mindestens noch alle ersten Unterdeterminanten verschwinden. Ist dagegen n ungerade, so ist eine Wurzel gleich 1, die übrigen sind im Allgemeinen reciprok.*)

Wir nehmen alle Wurzeln als reciprok d. h. n als gerade an, sie sondern sich dann in zwei Systeme von je $s = \frac{n}{2}$ Wurzeln:

$$r_1, r_2, \dots, r_s,$$

$$q_1, q_2, \dots, q_s;$$

und bezeichnen die Lösungen der Gleichung (7) durch

$$x_1^s, x_2^s, \dots, x_n^s, \text{ gehörig zu } r_s,$$

$$y_1^s, y_2^s, \dots, y_n^s, \quad n \quad \text{zu } q_s.$$

Zwischen diesen Lösungen finden ganz ähnliche Beziehungen statt, wie die in § I. behandelten. Zunächst ist aus (1):

$$r_s \sum a_{ik} x_i^s = \sum a_{ki} x_i^s,$$

also:

$$r_s \sum a_{ik} x_i^s x_k^s = \sum a_{ki} x_i^s x_k^s.$$

Hieraus folgt, so lange nicht $r_s = 1$:

$$(8) \quad \begin{cases} \sum x_i^s x_k^s a_{ik} = 0, \\ \sum y_i^s y_k^s a_{ik} = 0, \end{cases}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} r_s \sum a_{ik} x_i^s x_k^t &= \sum a_{ki} x_i^s x_k^t, \\ r_t \sum x_i^t x_k^s a_{ik} &= \sum a_{ki} x_i^t x_k^s, \end{aligned}$$

woraus, so lange $r_s r_t$ von Eins verschieden ist, folgt:

$$(9) \quad \begin{cases} \sum x_i^s x_k^t a_{ik} = 0, \\ \sum x_i^s y_k^t a_{ik} = 0, \\ \sum y_i^s y_k^t a_{ik} = 0. \end{cases}$$

Nur die Ausdrücke $\sum a_{ik} x_i^s y_k^s$ verschwinden nicht, sondern genügen den Gleichungen:

$$(10) \quad \begin{cases} r_s \sum x_i^s y_k^s a_{ik} = \sum a_{ki} x_i^s y_k^s, \\ q_s \sum y_i^s y_k^s a_{ik} = \sum a_{ki} y_i^s y_k^s. \end{cases}$$

*) Die genauere Untersuchung aller möglichen Fälle reziproker Substitutionen knüpft sich überhaupt damit an ganz ähnliche Betrachtungen an, wie sie in § II auseinander gesetzt worden sind.

Bezeichnet man den Ausdruck $\sum x_i^s y_i^t a_{is}$ durch $[x, y]$, so kann man die Gleichungen (8) (9) (10) in die folgenden zusammenfassen:

$$(11) \quad \begin{cases} [x, x_i] = 0, & [y, x_i] = 0, & [x, y_i] = 0, \\ r_s [x, y_s] = [y, x_s]. \end{cases}$$

Man hat ferner nach (2) und (5):

$$(12) \quad \begin{cases} \sum u_i \Delta_{is} = \Delta x_s, \\ \sum u_i \Delta_{is} = \Delta \varrho x_s. \end{cases}$$

Die Gleichungen:

$$\varrho \sum u_i \Delta_{is} = \sum u_i \Delta_{is}$$

liefern daher eine neue Determinante, welche dieselben Wurzeln besitzt, wie die vorhin betrachtete. Dementsprechend finden zwischen den Lösungen u_i^s und den den entsprechenden reciproken Wurzeln zugehörigen v_i^s diejenigen Gleichungen statt, welche den (11) analog sind:

$$(11a) \quad \begin{cases} [u, u_i] = 0, & [u, v_i] = 0, & [v, v_i] = 0, \\ [u, v_s] = \Delta [x, y_s]. \end{cases}$$

Endlich hat man noch:

$$(13) \quad \begin{cases} \sum u_i^s x_i^t = \sum u_i^s y_i^t = [y, x_s], \\ \sum v_i^s y_i^t = \sum v_i^s x_i^t = [x, y_s], \end{cases}$$

Die Gleichungen (11)–(13) sagen aus:

Bei der reciproken Transformation sind (*n* gerade) n in $\frac{n}{2}$ Paare geordnete Punkte vorhanden, welche auf der Fläche F liegen und deren Verbindungslinien mit Ausnahme der zu einem Paar gehörenden Erzeugende derselben sind. Je einem derselben entspricht eine Tangentialebene der Fläche Φ , welche durch alle anderen Punkte mit Ausnahme des zugehörigen geht, und welcher ihrerseits wieder der ursprüngliche Punkt als entsprechender vermöge der Transformation zugeordnet ist.

Bei ungeradem n treten einige sehr leicht zu erkennende Modificationen dieses Satzes auf.

Es wird angemessen sein, das aus jenen n Punkten bestehende Gebilde zum Fundamentalgebilde einer Coordinatenbestimmung zu wählen. Wir führen daher die Transformation:

$$(14) \quad x_i = \sum Y_r x_i^r + H_r y_i^r$$

ein, welche an Stelle der Variabeln x zwei Reihen neuer:

$$Y_1, Y_2 \dots Y_s,$$

$$H_1, H_2 \dots H_s,$$

setzt. Dann ist:

$$\sum x_i u_i^s = \sum Y_s x_i^s u_i^s + H_s y_i^s u_i^s,$$

also nach (13)

$$(15) \quad \begin{cases} Y_s = \frac{\sum x_i v_i^s}{[x_s y_s]}, \\ H_s = \frac{\sum x_i u_i^s}{[y_s x_s]}. \end{cases}$$

Führen wir ähnlich an Stelle der Ebenencoordinaten v_i zwei Reihen U_i, V_i ein, so ist:

$$\sum (v x) = \sum Y U + H V = \sum \frac{(x_i v_i^s) U_s}{[x_s y_s]} + \sum \frac{(x_i u_i^s) V_s}{[y_s x_s]},$$

also:

$$(16) \quad v_i = \sum \frac{V_s u_i^s}{[y_s x_s]} + \frac{v_i^s U_s}{[x_s y_s]},$$

oder:

$$(17) \quad \begin{cases} U_s = \sum v_i x_i^s, \\ V_s = \sum v_i y_i^s. \end{cases}$$

Die Gleichungen (14)–(17) vermitteln die *kanonische Gestalt der Reciprocität*. Wir erhalten so zunächst die Formen F und Φ in ihrer *einfachsten Gestalt*. Und zwar ergibt sich:

$$(18) \quad F = \sum a_{ik} x_i x_k = \sum Y_s H_s ([x_s y_s] + [y_s x_s]),$$

sowie:

$$(19) \quad \Phi = \sum \Delta_{ik} u_i v_k = \Delta \sum V_s U_s \frac{([x_s y_s] + [y_s x_s])}{[x_s y_s][y_s x_s]}.$$

Aus den Gleichungen (18) (19) geht unmittelbar hervor, dass die Gleichung Φ in Punktcoordinaten geschrieben wieder von der Form (18) ist, d. h. dass die Fläche F von Φ in dem aus Erzeugenden gebildeten Fundamentalgebilde geschnitten wird*).

Wir gehen nun dazu über, die *kanonische Form der reciproken Substitution* (1) selbst herzuleiten. Da:

$$u_i = \sum a_{i,r} x_r = \sum a_{i,r} Y_s x_r^s + a_{i,r} H_s y_r^s \text{ nach (1), (14),}$$

$$= \sum \frac{u_i^s V_s}{[y_s x_s]} + \frac{v_i^s U_s}{[x_s y_s]} \text{ nach (16),}$$

*) Vgl. Schröter, Crelle 77, pag. 140 ff.

so ergibt sich, wenn man mit x_i^j multiplicirt:

$$H_i[x_i y_i] = U_i,$$

und ebenso durch Multiplication mit y_i^j :

$$Y_i[y_i x_i] = V_i.$$

Darnach sind:

$$(20) \quad \begin{cases} [x_i y_i] H_i = U_i, \\ [y_i x_i] Y_i = V_i \end{cases}$$

die kanonischen Formeln für die allgemeine reciproke Substitution.

Man kann hiernach Formen zweiter Ordnung angeben, welche durch die reciproke Substitution in sich übergehen.

Setzt man zur Abkürzung $[x_i y_i] [y_i x_i]$ gleich a_i , so wird die Punktfläche:

$$f = \sum Y_i H_i \lambda_i = 0$$

nach (20) übergehen in die Tangentenebenenfläche

$$\varphi = \sum U_i V_i \frac{\lambda_i}{a_i} = 0,$$

welche selbst wieder mit der Punktfläche (forma adjuncta)

$$f' = \sum Y_i H_i \frac{a_i}{\lambda_i} = 0$$

gleichbedeutend ist. Daher sind die Bedingungen, unter welchen f in sich selbst übergeht:

$$(21) \quad \lambda_i^2 = a_i,$$

und der allgemeine Ausdruck des Systems, dessen sämtliche Individuen in sich übergehen, ist:

$$(22) \quad \Omega = \sum Y_i H_i \sqrt{a_i},$$

wo die Quadratwurzeln mit beliebigen Zeichen genommen werden können. Ω ist eine Gruppe in der Mannigfaltigkeit der Formen, die gegenseitig in sich übergehen; in der That müssen je zwei Formen, die überhaupt in dem System

$$\sum Y_i H_i \lambda_i$$

enthalten sind, durch die reciproke Substitution in dieser Weise einander zugeordnet erscheinen. Für $n = 4$ erhalten wir also aus (22) zwei Flächen, die in sich übergehen und zu dem Büschel gehören, von dem die beiden Ordnungsflächen F, Φ zwei Individuen sind. Je zwei Flächen dieses Büschels gehen im Allgemeinen gegenseitig in einander über, während die beiden:

$$\begin{aligned} & Y_1 H_1 \sqrt{a_1} + Y_2 H_2 \sqrt{a_2}, \\ & Y_1 H_1 \sqrt{a_1} - Y_2 H_2 \sqrt{a_2}, \end{aligned}$$

in sich selbst transformirt werden.

Für ungerade Variabelnzahl würde man dagegen dem der Wurzel 1 zugehörigen Punkte x'_i entsprechend den Gleichungen (15) (17) (20) noch die folgenden respective:

$$Y_1 = \sum \frac{x_i u'_i}{[x_1 x_i]} \quad (15),$$

$$U_1 = \sum u_i x'_i \quad (17),$$

$$Y_1 = \frac{U_1}{[r_1 x_1]} \quad (20)$$

hinzuzufügen haben. Die Form:

$$Y_1^2 \lambda_1 + \sum Y_i H_i \lambda_i$$

würde darnach in

$$U_1^2 \frac{\lambda_1}{a_1^2} + \sum U_i V_i \frac{\lambda_i}{a_i} = Y_1^2 \frac{a_1^2}{\lambda_1} + \sum Y_i H_i \frac{a_i}{\lambda_i}$$

übergeführt werden. Für $n = 3$ gehen also je zwei Curven des Büschels sich doppelt berührender Kegelschnitte

$$Y_1^2 \lambda_1 + \lambda_2 H_2 Y_2 = 0$$

gegenseitig in einander über, während die beiden besonderen Kegelschnitte

$$Y_1^2 a_1 \pm Y_2 H_2 \sqrt{a_2}$$

in sich selbst transformirt werden.*)

§ VIII.

Die Transformation einer Fläche zweiten Grades in sich selbst.

Wir wollen hier die Transformation einer gegebenen Fläche zweiten Grades in sich noch kurz besprechen. Dabei ist die Gleichung derselben in Linienkoordinaten vorausgesetzt worden, eine Auffassung, die im Ganzen vier Classen von Transformationen als gleichwerthig hervortreten lässt.

Die beiden Systeme der Erzeugenden einer Fläche zweiten Grades lassen sich in der Form:**)

$$(1) \quad \begin{cases} x_i = \mu^2 a_i + b_i \lambda \mu + c_i \lambda^2, \\ y_i = M^2 \alpha_i + \beta_i \Lambda M + \gamma_i \Lambda^2 \end{cases}$$

darstellen, wo x, y , die Linienkoordinaten derselben, Functionen zwei-

*) Rosanes, Crelle 80, pag. 67, Anmerkung.

**) Voss, Math. Annalen VIII, 118.

ten Grades der homogenen Parameter $\lambda, \mu; \Lambda, M$ sind. Dabei müssen die Gleichungen:

$$(a^2) = 0, \quad (ba) = 0, \quad (bc) = 0, \quad (c^2) = 0, \\ 2(ac) + (b^2) = 0,$$

und die analogen für die $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ vorausgesetzt werden, während:

$$(\alpha a) = 0, \quad (\alpha b) = 0, \quad (\alpha c) = 0, \quad (\beta a) = 0, \quad \dots \text{u. s. w.}$$

ist. Die Gleichung der Fläche selbst erscheint in der zweifachen Gestalt:

$$(2) \quad \begin{cases} F = 4a_x c_x - b_x^2 = 0, \\ F' = 4a_x \gamma_x - \beta_x^2 = 0, \end{cases}$$

wobei F, F' durch die Identität:

$$(3) \quad \sum x_i^2 + \frac{F}{(b^2)} + \frac{F'}{(\beta^2)} = 0$$

verbunden sind. Das Verhältniss:

$$\frac{(b^2)}{(\beta^2)} = \frac{(ac)}{(\alpha\gamma)}$$

mag mit E bezeichnet werden.

Setzt man an Stelle der λ, μ oder Λ, M die Ausdrücke $a\mu + b\lambda, c\mu + d\lambda$ oder $\alpha M + \beta\Lambda, \gamma M + \delta\Lambda$, so werden die Erzeugenden projectivisch in x', y' transformirt, wo dann:

$$(1a) \quad \begin{cases} x'_i = (c\mu + d\lambda)^2 a_i + b_i(a\mu + b\lambda)(c\mu + d\lambda) + c_i(a\mu + b\lambda)^2, \\ y'_i = (\gamma M + \delta\Lambda)^2 \alpha_i + \beta_i(\alpha M + \beta\Lambda)(\gamma M + \delta\Lambda) + \gamma_i(\alpha M + \beta\Lambda)^2. \end{cases}$$

Da ferner jede Tangente der Fläche in der Form $x_i + \nu y_i$ erscheint, so kann die Transformation des Tangentensystemes nur darin bestehen, dass an Stelle der Tangente $x_i + \nu y_i = z$, die neue $z'_i = l x'_i + m y'_i$ tritt. Da nun aus (1):

$$\begin{aligned} a_z &= \lambda^2(ac), & \alpha_z &= \Lambda^2(\alpha\gamma), \\ b_z &= \lambda\mu(b^2), & \beta_z &= \Lambda M(\beta^2), \\ c_z &= \mu^2(ad), & \gamma_z &= M^2(\alpha\gamma), \end{aligned}$$

so kann man vermöge $z'_i = l x'_i + m y'_i$ die Formen $a'_z, b'_z, \dots$ leicht durch die z ausdrücken, und erhält so die Transformationsformeln:

$$(4) \quad \begin{cases} a'_z = l(a^2 c_z - ab b_z + b^2 a_z), \\ -b'_z = l(2acc_z - (ad + bc)b_z + 2bd a_z), \\ c'_z = l(c^2 c_z - cd b_z + d^2 a_z), \\ \alpha'_z = m(\alpha^2 \gamma_z - \alpha\beta\beta_z + \beta^2 \alpha_z), \\ -\beta'_z = m(2\alpha\gamma\gamma_z - (\alpha\delta + \beta\gamma)\gamma_z + 2\beta\delta \alpha_z), \\ \gamma'_z = m(\gamma^2 \gamma_z - \gamma\delta\beta_z + \delta^2 \alpha_z). \end{cases}$$

Man kann in denselben $l = m = 1$ voraussetzen. Da ferner:

$$\begin{aligned} 4a'_2c'_2 - b'^2_2 &= (ad - bc)^2 F, \\ 4a'_2\gamma'_2 - \beta'^2_2 &= (a\delta - \beta\gamma) F', \end{aligned}$$

so ist nach (3) erforderlich, wenn die Substitution (4) überhaupt eine orthogonale sein soll, dass:

$$(ad - bc)^2 = (a\delta - \beta\gamma)^2,$$

und also die Werthe der beiden Determinanten $(ad - bc)$, $(a\delta - \beta\gamma)$, k und κ so ist:

$$k^2 = \kappa^2,$$

und zugleich:

$$(5) \quad \begin{cases} \sum z_1^2 = k^2 \sum z^2, \\ \sum z_1 y_1 = k^2 \sum z y. \end{cases}$$

Die Determinante der Substitution (4) ist gleich $k^3 \kappa^2$, und die *Transformation ist demnach eigentlich oder uneigentlich, je nachdem $k = \kappa$ oder $k = -\kappa$ ist.*

Es giebt noch eine zweite Transformation der Fläche; sie entsteht, wenn man zugleich eine Vertauschung der beiden Systeme von Erzeugenden ausführt, d. h. wenn man in (4) rechter Hand die lateinischen Buchstaben mit den entsprechenden griechischen vertauscht. Für sie gelten daher die Formeln:

$$(6) \quad \begin{cases} a'_2 = \alpha^2 \gamma_2 - \alpha \beta \beta_2 + \beta^2 a_2, \\ -b'_2 = 2\alpha \gamma \gamma_2 - (\alpha \delta + \beta \gamma) \beta_2 + 2\beta \delta a_2, \\ c'_2 = \gamma^2 \gamma_2 - \gamma \delta \beta_2 + \delta^2 a_2, \\ a'_2 = a^2 c_2 - ab b_2 + b^2 a_2, \\ -\beta'_2 = 2ac c_2 - (ad + bc) b_2 + 2bd a_2, \\ \gamma'_2 = c^2 c_2 - cd b_2 + d^2 a_2, \end{cases}$$

wobei wieder:

$$\begin{aligned} 4a'_2c'_2 - b'^2_2 &= (a\delta - \gamma\beta)^2 F', \\ 4a'_2\gamma'_2 - \beta'^2_2 &= (ad - bc)^2 F, \end{aligned}$$

also

$$(\alpha\gamma - \gamma\beta)^2 \varepsilon^2 = (ad - bc)^2$$

vorausgesetzt werden muss. Die Determinante der Substitution (6) ist $-k^3 \kappa^3$ und die letztere daher *eigentlich oder uneigentlich, je nachdem $k + \varepsilon \kappa = 0$ oder $k - \varepsilon \kappa = 0$.* Die Formeln (4), (6) stellen zugleich die allgemeinsten Transformationen des Linienraumes vor, bei denen eine Fläche zweiten Grades in sich übergeht.

Wir betrachten zunächst die Gleichungen (4).

Zur Bestimmung der linearen Complexen, welche durch die Transformation in sich übergeführt werden, hat man zu setzen:

$$k_1 a'_1 + k_2 b'_1 + k_3 c'_1 = \varrho (k_1 a_1 + k_2 b_1 + k_3 c_1),$$

$$\kappa_1 a'_1 + \kappa_2 \beta'_1 + \kappa_3 \gamma'_1 = \sigma (\kappa_1 \alpha_1 + \kappa_2 \beta_1 + \kappa_3 \gamma_1).$$

Für die k_1, k_2, k_3 entstehen so die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{cases} \varrho k_1 = k_1 b^2 - 2bd k_2 + k_3 d^2, \\ \varrho k_2 = -k_1 ab + (ad + bc) k_2 - k_3 cd, \\ \varrho k_3 = k_1 a^2 - 2ac k_2 + k_3 c^2, \end{cases}$$

also zur Bestimmung von ϱ die cubische Gleichung:

$$(8) \quad \begin{vmatrix} b^2 - \varrho & -2bd & d^2 \\ -ab & ad + bc - \varrho & -cd \\ a^2 & -2ac & c^2 - \varrho \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(9) \quad (\varrho + k) [(\varrho - k)^2 - n^2 \varrho] = 0,$$

wo:

$$n = b + c.$$

Ganz analog hat man zur Bestimmung von $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \sigma$ die Gleichung:

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \beta^2 - \sigma & -2\beta\delta & \delta^2 \\ -\alpha\beta & \alpha\delta + \beta\gamma - \sigma & -\gamma\delta \\ \alpha^2 & -2\alpha\gamma & \gamma^2 - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$(11) \quad (\sigma + \kappa) [(\sigma - \kappa)^2 - v^2 \sigma] = 0, \\ v = \beta + \gamma.$$

Bezeichnet man die den drei Wurzeln $\varrho = -k, \varrho_1, \varrho_2$ entsprechenden linearen Complexe durch A_1, B_1, C_1 , die den Wurzeln $\sigma = -\kappa, \sigma_1, \sigma_2$ zugehörigen durch A_2, B_2, Γ_2 , so hat man die Identitäten:

$$(12) \quad \begin{cases} A'_1 = -k A_1, \\ B'_1 = \varrho_1 B_1, \\ C'_1 = \varrho_2 C_1, \\ A'_2 = -\kappa A_2, \\ B'_2 = \sigma_1 B_2, \\ \Gamma'_2 = \sigma_2 \Gamma_2. \end{cases}$$

Die Complexe B_2, C_2, B_1, Γ_1 sind specielle, sie stellen zwei Paare von Erzeugenden vor, welche bei der Transformation fest bleiben. Dagegen hat man für A_1, A_2 die Gleichungen:

$$(13) \quad \begin{cases} A_1 = a_1 d + \frac{b-c}{2} b_1 - a_1 c_1, \\ A_2 = a_2 \delta + \frac{\beta-\gamma}{2} \beta_2 - a_2 \gamma_2, \end{cases}$$

und diese Complexe sind nur dann speciell, wenn $n^2 - 4k = 0$ oder

$\nu^2 - 4\kappa = 0$, d. h. wenn die Discriminante der quadratischen Factoren von (9) und (11) verschwindet.

Ist nun $k = \kappa$, so geht gleichzeitig jeder Complex des Büschels:

$$A_z + \varrho A_z = 0$$

in sich über, und die beiden in letzterem befindlichen speciellen Complexe sind die beiden Diagonalen des festen Erzeugenden-Vierseites: *die Transformation ist* (im Sinne der Punktgeometrie) *eine eigentliche collineare.* ([1 1, 1, 1, 1, 1])

Wenn dagegen $k = -\kappa$, so geht $A_z + \varrho A_z$ über in $A_z' - \varrho A_z'$, d. h. je zwei Complexe jenes Büschels, also auch die beiden Diagonalen vertauschen sich gegenseitig, und die *Transformation ist eine reciproke* ([1, 1, 1, 1, 1, 1]).

Wird ferner die Transformation (6) zu Grunde gelegt, so kann man verlangen, dass die lineare Form:

$$(14) \quad k_1 a_z' + k_2 b_z' + k_3 c_z' + k_4 a_z + k_5 \beta_z + k_6 \gamma_z' \\ = \varrho (k_1 a_z + k_2 b_z + k_3 c_z + k_4 a_z + k_5 \beta_z + k_6 \gamma_z)$$

werde. Zur Bestimmung der k hat man die 6 Gleichungen:

$$(15) \quad \begin{cases} \varrho k_1 = b^2 k_4 - 2bd k_5 + d^2 k_6, \\ -\varrho k_2 = ab k_4 - (ad + bc) k_5 + dc k_6, \\ \varrho k_3 = a^2 k_4 - 2ac k_5 + c^2 k_6, \\ \varrho k_4 = \beta^2 k_1 - 2\beta\delta k_2 + \delta^2 k_3, \\ -\varrho k_5 = \alpha\beta k_1 - (\alpha\delta + \beta\gamma) k_2 + \delta\gamma k_3, \\ \varrho k_6 = \alpha^2 k_1 - 2\alpha\gamma k_2 + \gamma^2 k_3, \end{cases}$$

welche für ϱ^2 die cubische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} A^2 - \varrho^2 & -2AB & B^2 \\ -AC & (AD + BC) - \varrho^2 & -B \\ C^2 & -2CD & D^2 - \varrho^2 \end{vmatrix} = 0$$

liefern, in welcher:

$$\begin{aligned} A &= b\beta + ad, & C &= a\beta + ac, \\ B &= b\delta + \gamma d, & D &= c\gamma + a\delta. \end{aligned}$$

Setzt man:

$$\begin{aligned} K &= AD - BC = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma), \\ N &= A + D = \beta b + ad + a\delta + c\gamma, \end{aligned}$$

so hat man:

$$(16) \quad (\varrho^2 - K) [(\varrho^2 + K)^2 - N^2 \varrho^2] = 0.$$

In diesem Falle hat also die Determinante $\Omega(\varrho)$ nur Potenzen von ϱ mit geradem Exponenten (vgl. § III, S. 335).

Eine vollständige Untersuchung der Elementartheiler von $\Omega(\varrho)$

für alle speciellen Fälle, welche die Transformationen (4) (6) darbieten können, würde hier zu weit führen. Um aber wenigstens den allgemeinen Fall, in welchem die Wurzeln der bezüglichen Gleichungen (9), (11), (16) von einander verschieden sind, genauer zu übersehen, wollen wir zunächst bei eigentlicher Transformation in (4):

$$a = 0, \quad d = 0, \quad \alpha = 0, \quad \delta = 0, \quad bc = \beta\gamma = k$$

setzen. Darnach bleiben die Erzeugenden:

$$a, \gamma, a, c$$

und das Büschel $b_s + \rho\beta_s$ fest. Es müssen daher alle Flächen zweiten Grades mit dem Parameter ρ :

$$(17) \quad \Psi = F(\rho^2 - \varepsilon) + 2\rho\varepsilon [2\rho\alpha_s\gamma_s + b_s\beta_s] = 0$$

in sich übergehen. Jede Gerade z des Raumes transformirt sich hier nach als Tangente an zwei der Flächen des Büschels Ψ , deren Parameter bei gegebenem z durch die Gleichung (17) bestimmt werden.*

Da die Fläche $F=0$ keine besondere Stelle in jenem Büschel einnimmt, so genügt es z als Tangente vorauszusetzen, d. h.:

$$\begin{aligned} a_s &= l, & \alpha_s &= m, \\ b_s &= 2l\lambda, & \beta_s &= 2m\mu, \\ c_s &= \lambda^2 l, & \gamma_s &= m\mu^2, \end{aligned}$$

anzunehmen. Jede Tangente von F ist daher gleichzeitig Tangente an diejenige Fläche $\psi=0$, für welche:

$$(18) \quad \rho = -\frac{2l\lambda}{m\mu}.$$

* In Verbindung hiermit steht der Satz, den Herr Cayley (Phil. Magazine 1853, VI, 326) bemerkt hat: *Die Verbindungslinien correspondirender Punkte der Fläche sind Tangenten an zwei feste Flächen zweiten Grades.* Will man diesen Satz direct beweisen, so transformire man die Fläche:

$$x_1x_3 = \omega = -x_2x_4$$

durch die Gleichungen $y_i = \lambda_i x_i$ in sich, wo $\lambda_1\lambda_3 = \lambda_2\lambda_4$. Die Liniencoordinaten einer Verbindungsgeraden (xy),

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6,$$

stehen in der Beziehung, dass:

$$\frac{p_2^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)^2} = \frac{p_5^2}{(\lambda_4 - \lambda_2)^2} = \frac{p_3p_6}{(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_2)} = \frac{p_1p_4}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)}.$$

Da nun die Gleichung des Flächenbüschels $x_1x_3 + kx_2x_4 = 0$ mit den nämlichen vier festen Erzeugenden in Liniencoordinaten ist:

$$p_2^2 + k^2 p_5^2 + 2k(p_3p_6 - p_1p_4) = 0,$$

so erkennt man ohne Weiteres, dass die Gleichung:

$$k^2(\lambda_2 - \lambda_1)^2 + 2k[(\lambda_1 - \lambda_4)(\lambda_3 - \lambda_2) - (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_3)] + (\lambda_4 - \lambda_2)^2 = 0$$

die Parameter k_1, k_2 der genannten beiden Flächen des Büschels bestimmt.

Andererseits sind überhaupt die Geraden z , welche von ihren transformirten z' geschnitten werden, durch die Gleichung:

$$(4A_z^2 - (n^2 + 2k)F) + \varepsilon (4\Delta_z^2 - (v^2 + 2K)F') = 0$$

bestimmt, woraus in unserem speciellen Falle und für $F = F' = 0$ wird:

$$(19) \quad l^2 \lambda^2 (b - c)^2 \pm \varepsilon m^2 \mu^2 (\beta - \gamma)^2 = 0,$$

d. h.: die Tangenten von F , welche von ihren Transformirten geschnitten werden, sind durch zwei verschiedene lineare Complexe ausgeschieden und zerfallen darnach in zwei getrennte Systeme: die sämtlichen Geraden eines jeden berühren nach (18), (19) noch je eine feste Fläche des Büschels ψ .

Ist dagegen $\beta\gamma = -bc$, so ist die Transformation eine reciproke, und das Büschel ψ hat die Eigenschaft, dass je zwei Flächen desselben gegenseitig in einander übergehen, während zwei Flächen desselben, nämlich die gegebene (für $\varrho = 0$) und die Fläche $\varepsilon\beta_x^2 - 4a_x c_x = 0$ (für $\varrho = \infty$) fest bleiben.

Betrachten wir zweitens die aus (6) sich ergebenden Formeln:

$$\begin{aligned} a_z &= \beta^2 a_z, & a_z' &= b^2 a_z, \\ b_z &= \beta\gamma\beta_z, & \beta_z &= bcb_z, \\ c_z &= \gamma^2\gamma_z, & \gamma_z &= c^2 c_z, \end{aligned}$$

wenn wieder $a = d = \alpha = \beta = 0$ gesetzt wird. Ist nun:

$$\beta\gamma + \varepsilon bc = 0,$$

so sind sämtliche in sich übergehende lineare Complexe:

$$(20) \quad \begin{cases} ba_z \pm \beta a_z &= \pm b\beta[ba_z \pm \beta a_z], \\ cc_z \pm \gamma\gamma_z &= \pm c\gamma[cc_z \pm \gamma\gamma_z], \\ \sqrt{bcb_z} \pm \sqrt{\beta\gamma\beta_z} &= \pm \sqrt{\beta\gamma bc}[\sqrt{bcb_z} \pm \sqrt{\beta\gamma\beta_z}], \end{cases}$$

specielle und bestimmen die sechs Kanten eines Tetraeders, von welchen vier Tangenten der Fläche sind: die Transformation ist eine *uneigentliche collineare*. Bezeichnet man jene sechs Complexe (20) durch

$$A_z, B_z, C_z, A_z, B_z, \Gamma_z,$$

so gehen in Folge der Gleichungen (20) die linearen Formen der Gruppen:

$$(21) \quad \begin{cases} A_z + \varrho A_z, & A_z - \varrho A_z, \\ a) B_z + \sigma B_z, & b) B_z - \sigma B_z, \\ C_z + \tau \Gamma_z, & C_z - \tau \Gamma_z, \end{cases}$$

gegenseitig in einander über. Gleiches wird daher von den durch sie erzeugten ∞^3 Flächen zweiten Grades gelten. Im Allgemeinen ist die durch die Gruppe a) erzeugte Fläche eine andere, wie die aus b) ent-

stehende. Aber es entsteht die nämliche Fläche, wenn sämtliche Complexe a) mit denen von b) in Involution liegen.

Dies führt, wegen $\beta\gamma + \varepsilon bc = 0$, und da:

$$A_1 + \varrho A_2 = \beta a_1(1 + \varrho) + b a_2(1 - \varrho),$$

$$B_1 + \sigma B_2 = \gamma \gamma_1(1 + \sigma) + c c_2(1 - \sigma),$$

$$C_1 + \tau C_2 = \sqrt{\beta\gamma} \beta_1(1 + \tau) + \sqrt{bc} b_1(1 - \tau),$$

auf die einzige Bedingung:

$$\sigma = \varrho$$

wonach also ein ganzes Netz von Flächen zweiten Grades fest bleibt.

Hat man dagegen $\beta\gamma - \varepsilon bc = 0$, so befinden sich unter den Complexen (20) zwei nicht specielle, die Transformation ist eine reciproke. Auch hier gehen ∞^3 Flächen gegenseitig in sich über, aber es existirt nur eine einfach unendliche Schaar in sich fester Flächen, weil die Bedingungen:

$$\varrho\tau = 1, \quad \sigma = 1,$$

erforderlich sind, wenn sämtliche Complexe der Gruppe a) mit denen von Gruppe b) in Involution liegen sollen.

§ IX.

Orthogonale Transformation linearer Formen in sich selbst.

Eine eigentliche Substitution transformirt im Allgemeinen nur specielle lineare Formen a_x in sich, d. h. solche, deren Coefficienten der Bedingung $\sum a_i^2 = 0$ genügen. Wird überhaupt eine allgemeine lineare Form in sich transformirt, so ist dies gleich mit einem Büschel solcher Formen der Fall. Anders ist es mit der uneigentlichen Substitution: sie transformirt schon im Allgemeinen zwei, aber auch nur zwei lineare Formen allgemeinen Charakters in sich, während die Individuen des aus ihnen gebildeten Büschels gegenseitig vertauscht werden.

Um Formeln anzugeben, welche eine gegebene Form $a_x = 0$ orthogonal in sich transformiren, construirt man eine Gruppe von $\frac{n}{2}$ Punktpaaren x'_i, y'_i ($i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$), welche auf der Fläche $f = \sum x_i^2 = 0$ liegen, und deren Verbindungslinien zu je zweien Erzeugende der Fläche sind, mit Ausnahme derer, welche zu einem Paare gehören. Die Punkte x'_i, y'_i wähle man so, dass:*)

*) In ganz ähnlicher Weise kann man Substitutionen bilden, welche zwei und mehr lineare Formen in sich transformiren. Insbesondere sei hier noch die (specielle) Substitution

$$y_i = F_i$$

$$y'_i = x'_i - 2a'_x \frac{a_i}{\sum a_i^2},$$

die übrigen unterwerfe man ausserdem den Bedingungen:

$$a_x^2 = 0, \quad a_y^2 = 0,$$

und ordne den Punkten x', y' die Zahl 1, den übrigen x'_i, y'_i Zahlen r_i, ρ_i zu, deren Product gleich 1 ist. Dann wird die Transformation mit den Coefficienten

$$(1) \quad b_{ik} = x'_i y'_k + x'_k y'_i + \sum r_i x'_i y'_i + \rho_i x'_i y'_i, \quad s = 1 \dots \frac{n-2}{2},$$

nach § III. die verlangte Eigenschaft besitzen. Und sie ist zugleich die allgemeinste Transformation dieser Art, da sie $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ willkürliche Parameter enthält.

Will man dagegen Formeln haben, welche die erforderliche Zahl von expliciten Parametern enthalten, so scheint es am einfachsten, die gegebene Form zuerst orthogonal in $y_n = 0$ (etwa durch eine specielle uneigentliche Transformation, wie im Folgenden gezeigt wird) und dann $\sum y^2 - y_n^2$ durch die Cayley'schen Formeln in sich zu transformiren.

Man kann aber auf folgendem Wege einfachere Formeln erhalten, die zwar nicht allgemein sind, aber bei manchen Gelegenheiten eine vortheilhaftere Anwendung finden.

Die specielle uneigentliche Substitution:

$$(2) \quad x_i = y_i - 2a_i \frac{a_y}{\sum a_i^2},$$

transformirt den Ausdruck a_x in sich selbst, wenn $(a\alpha) = 0$. Sie stellt demnach ∞^{n-2} uneigentliche specielle Substitutionen der verlangten Eigenschaft dar.

Andererseits bedingen die beiden speciellen uneigentlichen Substitutionen:

$$(3) \quad x_i = y_i - \frac{(\alpha_y \pm m\beta_y)}{(\alpha\alpha) \pm m(\alpha\beta)} (\alpha_i \pm m\beta_i),$$

$$m = \sqrt{\frac{(\alpha\alpha)}{(\beta\beta)}},$$

die Identitäten:

$$(4) \quad \begin{cases} \alpha_x = \mp m\beta_y, \\ \beta_x = \mp \frac{1}{m}\alpha_y. \end{cases}$$

(Seite 29) erwähnt, welche ersichtlich $\frac{n}{2}$ willkürliche lineare Formen $a_x, b_x, \dots$ in sich überführt.

Man kann also auf zwei wesentlich verschiedene Arten α_x uneigentlich in die willkürliche Form β_x transformiren. Wendet man die beiden (vertauschbaren) Substitutionen (3) nach einander an, so entsteht eine eigentliche Substitution, welche α_x in sich transformirt:

$$(5) \quad x_i = y_i - \frac{(\alpha_y + m\beta_y)}{(\alpha\alpha) + m(\alpha\beta)}(\alpha_i + m\beta_i) - \frac{(\alpha_y - m\beta_y)}{(\alpha\alpha) - m(\alpha\beta)}(\alpha_i - m\beta_i).$$

Die Formel (5) stellt mithin ∞^{n-1} eigentliche Substitutionen vor, welche α_x in sich transformiren. Wendet man die Transformation (5) zweimal hintereinander an, so entsteht wieder eine identische Transformation.

Allgemeinere Formeln entstehen, wenn man verschiedene Substitutionen der Art (1) oder (5) oder beide unter einander in irgend einer Weise combinirt. Insbesondere aber erschöpft schon die Formel (5) alle Transformationen eines auf der Fläche $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$ gelegenen Kegelschnittes im gewöhnlichen Raume in sich selbst. Der geometrische Inhalt derselben ist folgender. Durch die Form $\beta_x = 0$ wird dem Kegelschnitte K, in welchem f von $\alpha_x = 0$ geschnitten wird, ein Kegelschnitt K' adjungirt. Die Transformation (5) geht nun aus zwei Centralprojectionen hervor, deren Centra die beiden Spitzen der Kegel sind, welche durch K, K' gelegt werden können; die erste führt K in K', die zweite K' in K über.

Man kann diese Transformation ohne Weiteres auf die beliebigen Formen:

$$a_x = 0, \quad \sum a_{ik} x_i x_k = 0,$$

anwenden, welche einen Kegelschnitt K bestimmen. Nimmt man die willkürliche Ebene:

$$b_x = 0$$

hinzu, so sind die Spitzen der beiden Kegel, welche wir durch ihre Coordinaten:

$$x_1', x_2', x_3', x_4', \quad x_1'', x_2'', x_3'', x_4''$$

bezeichnen, abhängig von den Wurzeln λ_1, λ_2 der quadratischen Gleichung:

$$(6) \quad \Delta + 2\lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda^2 \begin{pmatrix} a \ b \\ b \end{pmatrix} = 0,$$

in welcher Δ die Determinante der quadratischen Form, $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a \ b \\ a \ b \end{pmatrix}$ die mit den a_i, b_i bezüglich ein oder zweimal geänderten Determinanten sind, welche aus Δ entstehen. Ferner ist

$$\sum x_i' x_i' a_{ik} = 2\lambda_1 a_x b_x, \quad \sum x_i' x_i' a_{ik} - 2\lambda_2 a_x b_x, \\ \sum x_i' x_i' a_{ik} = 0.$$

Unter Anwendung der Transformation (5) erhält man die folgende

Hermite'sche Transformation eines beliebigen Punktes ξ des Kegelschnittes K:

$$(7) \quad \eta_i = x'_i a_{x'} b_x (a_{\xi} b_{x''} + b_{\xi} a_{x''}) + x'_i a_{x''} b_{x'} (a_{\xi} b_x + b_{\xi} a_x) \\ - \xi_i a_{x'} b_{x'} a_{x''} b_{x''},$$

aus welcher man leicht unter Voraussetzung von $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, $a_{44} = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ die Formeln herleitet, welche die Hermite'sche Transformation des Kegelschnittes $\sum a_{ik} x_i x_k = 0$ geben.

Darmstadt, im December 1877.