Sopra una nuova categoria di soluzioni periodiche nel problema dei tre corpi.

(Di G. Pavanini, *a Padova.)*

Consideriamo quel notevole caso particolare del problema dei tre corpi, in cui una delle tre masse, che chiameremo P, è trascurabile e non influisce quindi sul moto delle altre due S_1, S_2. Allora S_1 ed S_2 sono dotate d'un moto kepleriano.

I tipi finora studiati di soluzioni periodiche sono:

1.° Soluzioni *piane* (di Hill e Charlier) che hanno luogo vicino alle posizioni d'equilibrio relativo di P rispetto ai due centri mobili S_1, S_2. Queste soluzioni esistono per qualsiasi valore delle masse di S_1 ed S_2.

2.° Soluzioni vicine alle posizioni singolari S_1, S_2.

3.° Soluzioni messe in luce da Poincaré, che hanno un grado di generalità di molto superiore alle precedenti, ma di cui si può rigorosamente dimostrare l'esistenza solo per valori abbastanza piccoli di una delle due masse finite (ad esempio di quella di S_2) rispetto all'altra. Il Poincaré si riferisce alle variabili kepleriane di P rispetto al centro di massa finita S_1. Egli è così condotto a distinguere tre specie di soluzioni periodiche: per quelle della prima specie le inclinazioni sono nulle e le eccentricità piccolissime; per quelle della seconda specie le inclinazioni sono nulle e le eccentricità finite; infine, per quelle di terza specie, le inclinazioni non sono più nulle.

Le soluzioni del primo tipo (cioè quelle che hanno luogo nell'intorno di una posizione di equilibrio) sono intimamente legate (almeno quando si consideri la massa di S_2 abbastanza piccola) alle soluzioni di seconda specie di Poincaré.

Quelle del secondo tipo hanno interesse puramente analitico e non sembrano suscettibili di applicazioni astronomiche perchè i corpi celesti non sono punti materiali e la rappresentazione matematica cessa di essere attendibile allorquando le mutue distanze scendono al disotto di un certo limite.

Restando così nell'ambito delle possibili applicazioni possiamo asserire che le soluzioni scoperte da POINCARÉ comprendono (se non altro qualitativamente) tutte quelle conosciute finora.

Argomento della presente Memoria è invece di provare l'esistenza di una categoria di soluzioni periodiche, bene distinta (per quanto meno ampia e meno importante) da quelle studiate fino ad oggi. Mi propongo cioè di mostrare che hanno luogo soluzioni periodiche non piane nell'ipotesi che le due masse finite di S_1 ed S_2 differiscano poco fra loro.

Rappresento queste due masse rispettivamente con $\frac{1}{2} - \mu$ ed $\frac{1}{2} + \mu$ e suppongo che S_1, S_2 ruotino uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O (moto questo il più semplice compatibile con la legge di NEWTON). Così S_1 ed S_2 si muovono costantemente in un piano ϖ.

Studio dapprima il caso particolare in cui le due masse finite sono eguali, in cui cioè $\mu = 0$; suppongo inoltre che P si trovi inizialmente sulla perpendicolare condotta per O al piano ϖ, e che abbia la sua velocità iniziale diretta secondo questa perpendicolare. In questa ipotesi riconosco con facilità — ed è il contenuto della prima parte della presente Memoria — che, quando si limitino convenientemente i valori dell'energia totale E, il moto di P avviene lungo la sopradetta perpendicolare fra due limiti simmetrici rispetto al centro di gravità, limiti che sono nulli per $E = -2$, e tendono all'infinito quando E tende a 0. Così ci troviamo in presenza di un moto che è del tipo di quegli armonici.

Semplici considerazioni sull'equazioni del movimento mostrano che il moto di P è periodico. L'integrazione effettiva permette poi di constatare una doppia periodicità e fornisce il valore, particolarmente importante per il seguito della ricerca, del periodo reale T.

Nella seconda parte passo a considerare il moto di P quando le due masse di S_1 e di S_2 non sono più eguali, quando cioè μ è diverso da 0. In questo caso, mi domando, esistono soluzioni periodiche vicine alle oscillazioni rettilinee testè accennate, cioè corrispondenti all'ipotesi di $\mu = 0$? I risultati, a cui giungo, equivalgono ad una risposta affermativa alla questione propostami.

Rigorosamente posso dimostrare l'esistenza di tali soluzioni quando suppongo

$$E = -2 + \varepsilon$$

con ε positivo e sufficentemente piccolo, e μ poco diverso da 0. Più specificatamente, poichè, côme già accenammo, quando $\mu = 0$ ed $E = -2$ il centro di gravità del sistema S_1, S_2 è una posizione d'equilibrio stabile per P, ne segue che alle soluzioni periodiche delle quali posso provare con tutto rigore l'esistenza, corrispondono delle orbite chiuse che di poco s'allontanano dal centro di gravità O.

Nelle classiche ricerche di Poincaré si presenta la circostanza favorevole che si sa integrare il sistema di equazioni differenziali per $\mu = 0$, cosicchè, trovato che per questo valore di μ esistono delle soluzioni periodiche, la dimostrazione dell'esistenza di tali soluzioni anche per μ diverso da 0, non richiede che una semplice verifica materiale. Nel mio caso invece le equazioni del moto non sono integrabili per $\mu = 0$, e quindi per raggiungere il mio scopo devo ricorrere a speciali artifici.

Arrivo così a mettere in evidenza una duplice infinità di soluzioni periodiche.

Il problema che mi sono proposto di trattare non è puramente teorico, ma esso trova la sua applicazione nel caso, considerato in Astronomia, delle stelle doppie.

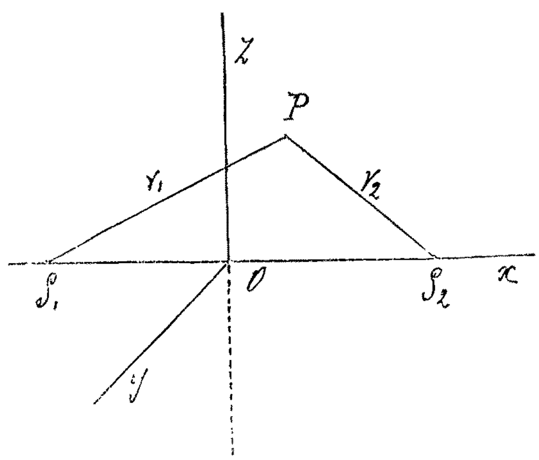
Effettivamente, si considerino due corpi celesti (stelle) di masse pressochè eguali e si supponga che essi esercitino la loro azione attrattiva su un asteroide, sul quale non agiscano forze ulteriori. Si supponga ancora che questo asteroide si trovi inizialmente poco discosto dalla perpendicolare condotta per il centro di gravità del sistema delle due stelle al loro piano del movimento, ed allora saremo condotti al caso da noi trattato.

Equazioni del moto.

1. Due corpi (stelle) S_1 ed S_2, di masse m_1, m_2 rispettivemente eguali ad $\frac{1}{2} - \mu$, $\frac{1}{2} + \mu$ ruotano uniformemente attorno al loro comune centro di gravità O (moto questo il più semplice compatibile con la legge di Newton). Così S_1 ed S_2 si muovono costantemente in un piano ϖ. La distanza costante $\overline{S_1 S_2}$ l'assumeremo quale unità di lunghezza, e disporremo dell'unità di tempo in modo che la costante di Gauss risulti eguale all'unità: ne segue allora

che anche la velocità angolare (*moto medio*) con la quale la retta $\overline{S_1 S_2}$ ruota attorno ad O sarà eguale ad uno.

Consideriamo un sistema di assi $O\,x\,y\,z$, uniformemente ruotante attorno all'asse z, aventi l'origine in O, il piano ϖ per piano $z=0$, e la direzione



positiva dell'asse x coincidente con $O\,S_2$; il verso della rotazione sia $x \rightarrow y$.

Rispetto a questo sistema di assi le coordinate di S_1, S_2 saranno:

$$-\left(\frac{1}{2}+\mu\right),\ 0,\ 0;\quad \frac{1}{2}-\mu,\ 0,\ 0.$$

Un terzo corpo P di massa trascurabile, sia soggetto all'attrazione di S_1 ed S_2. Indichiamo con r_1 ed r_2 le distanze di P da S_1, S_2, mentre x, y, z rappresentino le sue coordinate rispetto al sistema $O\,x\,y\,z$, cosicchè

$$r_1 = \left|\sqrt{\left(x+\mu+\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2}\right|,$$

$$r_2 = \left|\sqrt{\left(x+\mu-\frac{1}{2}\right)^2+y^2+z^2}\right|.$$

Il potenziale unitario delle forze agenti su P è

$$U = \frac{\frac{1}{2}-\mu}{r_1} + \frac{\frac{1}{2}+\mu}{r_2}.$$

Assunti nel modo detto il sistema di assi mobili e ricordando che nel nostro caso il moto medio è eguale all'unità, dal teorema di Coriolis si ha che le componenti dell'accelerazione assoluta del moto di P sono date dalle seguenti espressioni:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - x,$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} - y,$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2}.$$

Le equazioni del moto risultano dall'eguagliare l'accelerazione assoluta alla forza unitaria; nel problema proposto saranno adunque:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial x} + x, \\ \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial U}{\partial y} + y, \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial U}{\partial z}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

PARTE PRIMA

2. Cominciamo dal considerare il caso nel quale $\mu = 0$ e quindi

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{2},$$

$$\overline{OS_1} = \overline{OS_2}.$$

Supponiamo inoltre che il mobile P si trovi inizialmente sull'asse z e che secondo quest'asse sia diretta la sua velocità iniziale. Le attrazioni esercitate da S_1, S_2 ammettono perciò una risultante pur essa costantemente diretta secondo l'asse z.

Il moto di P sarà quindi definito in questo caso dalle equazioni

$$x = y = 0,$$

$$z'' = \frac{\partial U}{\partial z},$$

dove

$$U = \frac{1}{r},$$

essendo

$$r = r_1 = r_2 = \left| \sqrt{\frac{1}{4} + z^2} \right|.$$

Avremo dunque

$$z'' = -\frac{8z}{(1 + 4z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posto

$$z^2 = \zeta,$$

si ha

$$2zz'\,dt = d\zeta,$$

e, moltiplicando la precedente equazione differenziale per $z' \, d t$, si ottiene

$$\frac{1}{2} d z'^2 = - \frac{4 d \zeta}{(1+4\zeta)^{\frac{3}{2}}} = 2 d (1+4\zeta)^{-\frac{1}{2}},$$

dalla quale

$$\frac{1}{2} z'^2 = \frac{2}{\sqrt{1+4z^2}} + E, \tag{2}$$

dove E (costante d'integrazione) non è altro che l'*energia totale*.

3. La (2) esprime il modo di variare della velocità di P relativamente alla sua posizione ed all'energia totale.

Per $E > 0$ il secondo membro della (2), qualunque sia z, non s'annulla mai, cioè la velocità si mantiene sempre diversa da 0. Perciò P si muoverà costantemente nella medesima direzione, dipendente dalla sua velocità iniziale. In ogni caso esso s'allontanerà sempre indefinitamente, dalla sua posizione corrispondente a $t = 0$.

Quando invece $E < -2$ la (2) non può mai essere soddisfatta da valori reali di z e z'. Basta osservare che il suo primo membro è sempre positivo, mentre il secondo, essendo $\dfrac{2}{\sqrt{1+4z^2}}$ compreso fra 0 e 2, al variare di z, risulterebbe sempre negativo.

Nel caso infine di

$$-2 < E < 0$$

esistono due valori finiti di z eguali e di segno opposto

$$z_0 = \frac{\sqrt{4-E^2}}{2E} \quad \text{e} \quad -z_0,$$

che annullano z' e costituiscono i limiti fra i quali è compreso il moto di P. Essi sono cioè, com'è ben noto, il massimo ed il minimo di z: se ne può avere la conferma osservando i segni di z'' per questi valori di z. In ogni posizione intermedia fra $-z_0$ e z_0, z deve essere crescente o decrescente, quindi il moto non cambia di direzione che nelle posizioni estreme. Per $E = 0$, z_0 e $-z_0$ sono rispettivamente eguali a $+\infty$ e $-\infty$; mentre per $E = -2$ questi due limiti si riducono eguali a 0. Ne segue in questa seconda ipotesi, che il centro di gravità del sistema S_1, S_2 è una posizione di equilibrio stabile per il mobile P.

I valori dell'energia totale che noi considereremo d'ora in avanti (e lo diciamo una volta per sempre) saranno solamente quelli che soddisfano alla relazione

$$-2 < E < 0,$$

perchè solo in questo caso il moto presenta effettivo interesse.

4. Vediamo ora di studiare il carattere del moto di P lungo l'asse z compreso fra i due limiti simmetrici rispetto all'origine z_0 e $-z_0$. Proveremo che questo moto è periodico e ne determineremo nello stesso tempo anche il periodo.

A tale scopo poniamo

$$-\frac{1}{\sqrt{1+4z^2}} = p + \frac{1}{6}E, \tag{3}$$

od anche

$$\frac{1}{\left(p+\frac{1}{6}E\right)^2} = 1 + 4z^2,$$

che derivata rapporto a t da:

$$-\frac{1}{\left(p+\frac{1}{6}E\right)^3}\frac{dp}{dt} = 4zz',$$

dalla quale, tenendo conto anche della (2),

$$z'^2 = \frac{1}{16\left(p+\frac{1}{6}E\right)^6 z^2}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\left(p+\frac{1}{6}E\right)^4 \left\{1-\left(p+\frac{1}{6}E\right)^2\right\}}\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = -4\left(p+\frac{1}{6}E\right)+2E$$

perciò

$$\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = 4\left(p+\frac{1}{6}E\right)^4 \left\{1 \quad \left(p+\frac{1}{6}E\right)^2\right\}\left\{-4\left(p+\frac{1}{6}E\right)+2E\right\}$$

ed infine

$$\frac{dp}{dt} = 2\left(p+\frac{1}{6}E\right)^2 \sqrt{4p^3 - \left(4+\frac{1}{3}E^2\right)p - \frac{1}{3}E\left(\frac{1}{9}E^2-4\right)}.$$

Lo studio del moto si fa nel modo migliore introducendo una variabile ausiliaria definita dall'equazione differenziale

$$\frac{dp}{du} = \sqrt{4p^2 - g_2 p - g_3},$$

dove

$$g_2 = 4 + \frac{1}{3}E^2, \qquad g_3 = \frac{1}{3}E\left(\frac{1}{9}E^2 - 4\right).$$

Da questa posizione risulta che la p si può risguardare come la funzione ellittica di WEIRSTRASS, gl'invarianti della quale sono g_2 e g_3. Perciò p è funzione doppiamente periodica di u.

È noto che la determinazione dei suoi periodi 2ω e $2\omega'$ è sempre possibile eccettuato allora che il determinante

$$\Delta = g_2^3 - 27\, g_3^2$$

è nullo, caso limite nel quale la funzione ellittica degenera in funzione circolare od iperbolica.

Fra poco prenderemo in esame questo caso. Ora osserviamo invece che le radici dell'equazione

$$\left(\frac{dp}{du}\right)^2 = 0$$

disposte per ordine di grandezza sono:

$$e_1 = 1 - \frac{1}{6}E, \quad e_2 = \frac{1}{3}E, \quad e_3 = -\left(1 + \frac{1}{6}E\right):$$

quindi, per valori reali di E (soli valori da noi considerati), esse pure sono reali, perciò Δ dev'essere sempre positivo.

In queste condizioni i due periodi sono l'uno reale l'altro puramente immaginario, determinati dalle formule

$$\omega = \int_{e_1}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}, \qquad \frac{\omega'}{i} = \int_{-e_3}^{+\infty} \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

Notiamo ancora come i valori di p definiti dalla (3) sono compresi fra e_2 ed e_3 poichè dovendo essere

$$-4\left(p + \frac{1}{6}E\right) + 2E \geqq 0,$$

sarà:

$$p \leqq \frac{1}{3} E = e_2 ;$$

inoltre p assume il suo valore minimo quando $z = 0$, ed allora dalla (3)

$$p = -\left(1 + \frac{1}{6} E\right) = e_3 :$$

perciò

$$e_3 \leqq p \leqq e_2 .$$

Segue da questa relazione e ponendo mente ai valori di p nel parallelogramma dei periodi, che

$$u = \omega' + \xi$$

essendo ξ una variabile reale. Questa conclusione ci servirà fra poco in una importante *Osservazione.*

Prescindiamo ora dai limiti fra i quali sono compresi i valori di p e dalla forma della variabile u: teniamo solo presente che possiamo considerare la p come la funzione del WEIRSTRASS di cui sono assegnati gl'invarianti. Poichè p è allora doppiamente periodica rispetto ad u, la (3) sta a dire che anche z gode della medesima proprietà considerata quale funzione implicita di u. Vediamo come si possa dedurre da questo fatto che z è funzione periodica, anzi doppiamente periodica, del tempo.

Essendo

$$\frac{dp}{dt} = 2\left(p + \frac{1}{6} E\right)^2 \sqrt{4 p^3 - g_2 p - g_3} ,$$

si ha

$$\frac{du}{dt} = 2\left(p + \frac{1}{6} E\right)^2 :$$

così il tempo si può ritenere funzione di u e perciò, integrando l'ultima relazione scritta rispetto a questa variabile, abbiamo

$$2 t = \int \frac{d u}{\left(p + \frac{1}{6} E\right)^2} + C. \tag{4}$$

Per determinare questo integrale introdurremo un'argomento v che soddisfi alla relazione

$$p v = -\frac{1}{6} E.$$

Sappiamo che nel parallelogramma dei periodi vi sono due valori di v per i quali la p assume un valore determinato, che corrispondono a valori di p' eguali e di segno opposto. Ricordando che

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)^2 = 4(p-e_1)(p-e_2)(p-e_3),$$

per $p = -\frac{1}{6}E$, essendo ancora $-\frac{1}{6}E = -\frac{1}{2}e_2$ avremo

$$\left(\frac{dp}{dv}\right)^2 = 4\left(-\frac{e_2}{2}-e_1\right)\left(-\frac{e_2}{2}-e_2\right)\left(-\frac{e_2}{2}-e_3\right) =$$

$$= 6e_2\left(e_1+\frac{e_2}{2}\right)\left(e_3+\frac{e_2}{2}\right),$$

dalla quale

$$p'^2 v = 6e_2 .$$

Per quanto osservammo ora, si può assumere tanto $p'v = +\sqrt{6e_2}$ come $p'v = -\sqrt{6e_2}$ e ne risulterà in ogni caso un determinato argomento v tale che per $pv = -\frac{1}{6}E$. Se noi però ci limitiamo a considerare il parallelogrammo $o, \omega, \omega+\omega', o$ vediamo che v deve essere compreso fra ω ed $\omega+\omega'$, essendo

$$p\omega = e_1, \quad p(\omega+\omega') = e_2, \quad p\omega' = e_3$$

ed

$$e_2 < -\frac{e_2}{2} < e_1 .$$

Questa limitazione corrisponde all'assumere $p'v = +\sqrt{6e_2}$ poichè fra ω ed $\omega+\omega'$ $p'v$ è sempre positivo.

Una volta assunto questo valore bene precisato di v, ricordando dalla teoria delle funzioni ellittiche che

$$\frac{1}{pu-pv} = \frac{1}{p'v}\left\{\zeta(u-v)-\zeta(u+v)+2\zeta v\right\},$$

derivando questa relazione rapporto a v, ricaviamo la formula

$$\frac{p'v}{(pu-pv)^2} = \frac{1}{p'v}\left\{p(u-v)+p(u+v)-2pv\right\} -$$

$$-\frac{p''v}{p'^2 v}\left\{\zeta(u-v)-\zeta(u+v)+2\zeta v\right\},$$

coll'aiuto della quale possiamo subito integrare la (4).

Avremo cioè

$$2\,t = \int \frac{d\,u}{\left(p\,u + \frac{1}{6}E\right)^2} + C = \int \frac{d\,u}{(p\,u - p\,v)^2} + C =$$

$$= \frac{1}{p'^2\,v} \left\{ \frac{p''\,v}{p'\,v} \left(\log \frac{\sigma\,(u+v)}{\sigma\,(u-v)} - 2\,u\,\zeta\,v \right) - \zeta\,(u+v) - \zeta\,(u-v) - 2\,u\,p\,v \right\} + C.$$

Poichè

$$\zeta\,(u-v) + \zeta\,(u+v) = \frac{p''\,u}{p\,u - p\,v} + 2\,\zeta\,u,$$

l'espressione di t in funzione di u sarà

$$2\,t = \frac{1}{p'^2\,v} \left\{ \frac{p''\,v}{p'\,v} \left(\log \frac{\sigma\,(u+v)}{\sigma\,(u-v)} - 2\,u\,\zeta\,v \right) - \frac{p'\,u}{p\,u - p\,v} - 2\,\zeta\,u \right\} + \frac{1}{6}\,u + C.$$

Quando si aumenta u del suo periodo $2\,\omega$ chiamando T il corrispondente aumento di t, avremo

$$2\,T = \frac{1}{p'^2\,v} \left\{ \frac{p''\,v}{p'\,v} \left[\log e^{4\eta v} - 4\,\omega\,\zeta\,v \right] - 4\,\eta \right\} + \frac{\omega}{3},$$

cioè

$$T = \frac{2}{p'^2\,v} \left\{ \frac{p''\,v}{p'\,v} (\eta\,v - \omega\,\zeta\,v) - \eta \right\} + \frac{\omega}{6}$$

dove $\eta = \zeta\,\omega$.

Dunque ad un aumento di u corrispondente al suo periodo reale, t aumenta di una quantità costante, poichè T non dipende da u. Ma abbiamo già osservato che z è funzione periodica di u, quindi l'intervallo di tempo necessario perchè z riprenda un suo valore al variare di u è costante, cioè z è funzione periodica di t e T ne è il suo periodo.

Risultati analoghi si otterebbero col medesimo procedimento, se si studiasse il comportamento di z rispetto a $2\,\omega'$. Essendo però questo periodo puramente immaginario lo studio di z rispetto a $2\,\omega'$ non presenta alcun pratico interesse.

Ad ogni modo possiamo affermare essere z funzione doppiamente periodica del tempo.

Oltre a z anche l'accelerazione e la velocità sono funzioni periodiche del tempo; basta osservare le loro espressioni in funzione di z. Di più, in z_0 e $-z_0$ cioè nei punti estremi la velocità è nulla, mentre l'accelerazione è massima (considerando il suo valore assoluto); il fatto inverso succede invece per $z=0$.

Da tutto questo si conclude che la soluzione del problema nel caso in considerazione ($\mu=0$ ed $-2<E<0$) è periodica ed il moto di P si presenta del tipo dei moti armonici.

La sua decomposizione in moti armonici elementari si può avere mediante la serie di FOURIER, che inoltre dà anche l'espressione di z in funzione del tempo cioè

$$z^2 = a_0 + \sum_1^\infty {}_n \left\{ a_n \cos \frac{n\pi t}{T} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{T} \right\},$$

dove i coefficienti hanno espressioni bene determinate.

5. *Osservazione.* — Poichè il discriminante della funzione di WEIRSTRASS è

$$\Delta = 16\,(e_1 - e_2)^2\,(e_2 - e_3)^2\,(e_3 - e_1)^2,$$

per i nostri valori delle radici avremo:

$$\Delta = 64\left(1 - \frac{1}{2}E\right)^4.$$

Da questa espressione di Δ ne segue che per

$$E = \pm 2$$

Δ s'annulla.

Ha per noi grande importanza, per quanto tratteremo fra breve, il caso di $E=-2$, nel quale come notammo, il centro di gravità rappresenta per P una posizione di equilibrio stabile.

Determiniamo il valore limite di T quando E converge a -2. Questo calcolo si può fare direttamente nella espressione di T già ottenuta, ma si raggiunge più presto lo scopo considerando che per $E=-2$, $\Delta=0$ e quindi p degenera in funzione circolare e propriamente

$$p\,u = -\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{2\,\omega}\right)^2 \frac{1}{\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi u}{2\,\omega}\right)};$$

essendo

$$\left(\frac{2\,\omega}{\pi}\right)^2 = \frac{2\,g_2}{9\,g_3}.$$

Per $E = -2$

$$g_2 = \frac{16}{3}, \quad g_3 = \frac{64}{27}$$

e perciò

$$p\,u = -\frac{2}{3} + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}\, u}\,.$$

Abbiamo visto essere

$$2\,T = \int_u^{u+2\omega} \frac{d\,u}{\left(p + \frac{1}{6}\,E\right)^2}$$

ed avendo notato che

$$u = \omega + \xi$$

con ξ reale, avremo

$$2\,T = \int_0^{2\omega} \frac{d\,\xi}{\left(p + \frac{1}{6}\,E\right)^2}\,.$$

Sostituendo a p il suo valore nel caso di degenerazione, e notando che allora $\omega' = \infty$ e quindi $\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}\,(\omega' + \xi) = \infty$,

$$2\,T = \int_0^{2\omega} \frac{d\,\xi}{\left\{ -1 + \frac{2}{\operatorname{sen}^2 \sqrt{2}\,(\omega' + \xi)} \right\}^2} = \int_0^{2\omega'} d\,\xi,$$

cioè

$$T = \omega,$$

od anche, ricordando il valore di ω in questo caso di degenerazione,

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\,.$$

T adunque ha un limite diverso da 0 al convergere di E verso -2, quando cioè il moto degenera in posizione d'equilibrio.

Questa osservazione ci permetterà di asserire l'esistenza di soluzioni periodiche anche quando μ è diverso da 0.

PARTE SECONDA

6. In questa seconda parte prendiamo in esame il caso di μ diverso da 0.

Il moto di P è allora definito dalle equazioni (1). Vediamo di scrivere queste equazioni sotto forma canonica.

Le (1) ammettono l'integrale di Jacobi

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}-U-\frac{1}{2}(x^2+y^2)=-C,$$

il quale poi non è altro che l'integrale delle forze vive nel moto relativo.

Poniamo

$$x=x_1, \qquad y=x_2, \qquad z=x_3$$

$$\frac{dx}{dt}-y=y_1, \quad \frac{dy}{dt}+x=y_2, \quad \frac{dz}{dt}=y_3,$$

$$F=\frac{1}{2}(y_1+x_2)^2+\frac{1}{2}(y_2-x_1)^2+\frac{1}{2}y_3^2-U-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2),$$

allora le equazioni del moto si scrivono sotto la forma canonica cercata:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt}&=\frac{\partial F}{\partial y_i}, \\ & \qquad\qquad (i=1,\ 2,\ 3) \\ \frac{dy_i}{dt}&=-\frac{\partial F}{\partial x_i}. \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

Abbiamo già visto come nel caso di $\mu=0$ le equazioni del movimento ammettono (per ciascun valore dell'energia totale E compreso fra 0 e -2) una soluzione periodica Ω_0 di periodo T, alla quale corrisponde un moto di P lungo l'asse z compreso fra due limiti simmetrici rispetto all'origine. Durante un tale movimento le coordinate x ed y e quindi le variabili canoniche x_1, x_2 sono sempre nulle: è poi

$$z = x_3 = \varphi(t), \qquad z' = y_3 = \varphi'(t),$$

indicando con φ una funzione del tempo che s'annulla solo nell'origine, mentre la sua derivata φ' s'annulla solo per i valori estremi di z.

Assunto l'istante in cui il mobile passa per O quale origine del tempo, alla soluzione Ω_0 appartengono i valori iniziali

$$x_1 = x_2 = x_3 = y_1 = y_2 = 0 \qquad y_3 = \varphi'(0).$$

Consideriamo ora, sempre supposto $\mu = 0$, una soluzione Σ_0 delle (1') infinitamente vicina alla Ω_0, i cui valori iniziali sieno

$$\begin{array}{lll} x_1 = \beta_1 & x_2 = \beta_2 & x_3 = \beta_3 \\ y_1 = \beta_4 & y_2 = \beta_5 & y_3 = \varphi'(0) + \beta_6\,, \end{array}$$

essendo le β poco diverse da 0.

Nella Σ_0 le x_i ed y_i risulteranno funzioni regolari dei valori iniziali suddetti. In un generico istante t, avremo per ciò dei sviluppi ordinati secondo le potenze di β del tipo

$$\left.\begin{array}{l} x_i = \xi_i + R_i\,, \\ x_3 = \varphi(t) + \xi_3 + R_3\,, \\ \qquad\qquad\qquad (i = 1,\ 2 \quad j = 4,\ 5) \\ y_i = \eta_i + R_j\,, \\ y_3 = y'(t) + \eta_3 + R_6\,, \end{array}\right\} \tag{5}$$

rappresentando le ξ ed η i termini di primo ordine nelle β, mentre le R indicano i termini d'ordine superiore.

Consideriamo infine per $\mu \neq 0$ una soluzione Σ del nostro sistema di equazioni, tale che per $\mu = 0$ essa si riduca alla soluzione Σ_0. Avremo allora per la Σ

$$x_i = x_i(\mu,\ \beta,\ t),$$
$$y_i = y_i(\mu,\ \beta,\ t).$$

7. Proponiamoci ora di riconoscere se possono essere soddisfatte le condizioni perchè Σ risulti una soluzione periodica di periodo $T + \tau$.

Perchè ciò sia; posto

$$\left.\begin{aligned} x_i(\mu,\ \beta,\ T+\tau) - x_i(\mu,\ \beta.\ 0) &= \psi_i \\ y_i(\mu,\ \beta,\ T+\tau) - y_i(\mu,\ \beta,\ 0) &= \psi_j, \end{aligned}\right. \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2,\ 3 \\ j = 4,\ 5,\ 6 \end{pmatrix}$$

dovremo avere

$$\psi_1 = \psi_2 = \cdots = \psi_6 = 0. \tag{6}$$

Le ψ risultano funzioni olomorfe di μ, delle β e di τ annullantesi con queste quantità.

Le (6) non sono tutte indipendenti fra loro, perchè il sistema (1') ammette l'integrale di Jacobi

$$F = -C;$$

cosicchè soddisfatte le $\psi_i = 0$ ad esempio per $i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$, sarà soddisfatta anche la $\psi_6 = 0$ (*).

Abbiamo dunque da considerare un sistema di cinque equazioni con sette incognite $(\beta_1,\ \beta_2, \ldots,\ \beta_6,\ \tau)$. È ben noto che in tale caso, per μ sufficentemente piccolo, esso ammette una soluzione, nella quale tutti i valori delle incognite sono nulle, se uno qualunque dei minori di quarto ordine della matrice funzionale

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \beta_6} & \dfrac{\partial \psi_1}{\partial \tau} \\ \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \beta_6} & \dfrac{\partial \psi_2}{\partial \tau} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\partial \psi_5}{\partial \beta_1} & \dfrac{\partial \psi_5}{\partial \beta_2} & \cdots & \dfrac{\partial \psi_5}{\partial \beta_6} & \dfrac{\partial \psi_5}{\partial \tau} \end{matrix}\right|$$

(*) ψ_6 rappresenta l'incremento di y_3 (cioè di z) quando si passa da $t = 0$ a $t = T + \tau$. L'essere $\psi_6 = 0$ significa che y_3 è funzione periodica di t. Benchè, per $F = -C$, la $\psi_6 = 0$ sia soddisfatta quando sono soddisfatte le relazioni $\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_5 = 0$, tuttavia avendo dalla $F = -C$

$$y_3^2 = 2\,U + x_1^2 + x_2^2 - (y_1 + x_2)^2 - (y_2 - x_1)^2 - 2\,C,$$

può sembrare ambiguo se dopo un periodo $T + \tau$, y_3 riprenda il valore iniziale, o lo riprenda con segno cambiato. Il dubbio è tolto però se si nota che nella Ω_0, y_3, ad intervalli di tempo eguali al suo periodo riprende il suo valore iniziale, e quindi anche nella soluzione vicina Σ, y_3 riprenderà il suo valore iniziale che differisce da 0 di una quantità finita.

Era opportuno chiarire questo fatto.

è diverso da 0 per $\mu = \beta_1 = \tau = 0$. I valori di β e τ che allora si ricaveranno, sono funzioni regolari di μ che s'annullano con questo parametro.

Ammessa soddisfatta questa condizione, la traiettoria del moto corrispondente alla soluzione periodica che allora si potrà ricavare, differirà di poco da quella corrispondente Ω_0. Siccome in questa P si muove lungo l'asse z, fra due limiti simmetrici, ed a distanza finita rispetto all'origine, la traiettoria della soluzione periodica che cerchiamo attraverserà il piano $z = 0$. Assumiamo questo istante come origine del tempo: ne risulterà

$$\beta_3 = 0.$$

Può sembrare che l'introduzione arbitraria dell'equazione $\beta = 0$, diminuisca la generalità, e che non si possa trovare così che le soluzioni periodiche tali che β_3 sia nullo per $t = 0$.

Ma noi otterremo, tutte le altre cambiando t in $t + h$, h essendo una costante qualunque.

Siamo ridotti intanto ad un sistema di cinque equazioni

$$\psi_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3.\ 4,\ 5)$$

a sei incognite. Vediamo se è possibile risolvere questo sistema rispetto a 5 delle 6 incognite, ad esempio rispetto a

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_4,\ \beta_5,\ \tau,$$

assumendo invece ad arbitrio il valore di β_6, purchè sufficentemente piccolo.

Basterà perciò che sia diverso da 0 il determinante funzionale

$$\frac{\partial\,(\psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4\,\psi_5)}{\partial\,(\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5\,\tau)}$$

quando si faccia

$$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \tau = 0.$$

Per calcolare questo determinante possiamo porre addirittura nelle ψ, $\mu = 0$, allora

$$\begin{aligned} \psi_i &= \xi_i + R_i - \beta_i\,, \\ \psi_j &= \eta_i + R_j - \beta_j\,, \qquad \begin{pmatrix} i = 1,\ 2 \\ j = 4,\ 5 \end{pmatrix} \\ \psi_3 &= \varphi\,(T + \tau) + \xi_3 + R_3 - \beta_3 \end{aligned}$$

e quindi il determinante in parola (dovendo porre in esso, come dicemmo,

$\mu = \beta_1 = \beta_2 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = \tau = 0)$ si riduce al prodotto

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial (\psi_1 \psi_2 \psi_4 \psi_5)}{\partial (\beta_1 \beta_2 \beta_4 \beta_5)},$$

dove, per $\tau = 0$,

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \tau} = \varphi'(T) = \varphi'(0) \neq 0.$$

Rimane da provare che

$$\Delta = \frac{\partial (\psi_1 \psi_2 \psi_4 \psi_5)}{\partial (\beta_1 \beta_2 \beta_4 \beta_5)}$$

è pur esso diverso da 0.

Ponendo ora nelle ψ anche $\tau = 0$ avremo

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_1} - 1 & \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_4} & \frac{\partial \xi_1}{\partial \beta_5} \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_2} - 1 & \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_4} & \frac{\partial \xi_2}{\partial \beta_5} \\ \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_4} - 1 & \frac{\partial \eta_1}{\partial \beta_5} \\ \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_1} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_2} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_4} & \frac{\partial \eta_2}{\partial \beta_5} - 1 \end{vmatrix}$$

(Si noti che nell'espressione ora scritta di Δ abbiamo ommesso i termini che provengono dalle R, perchè essi contengono le β almeno al primo grado e quindi s'annullano quando si pone $\beta_i = 0$. Così possiamo, per il nostro scopo, prescindere senz'altro dal considerare questi termini.)

8. Per lo studio di questo determinante fa d'uopo conoscere le ξ e le η. A tale scopo riprendiamo le espressioni (5) delle x_i, y_i, sostituiamole nelle (1') ed eguagliamo i termini di primo grado nelle β. Si trova senza difficoltà

$$\frac{d \xi_i}{d t} = \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d y_i \, d x_k}\right) \xi_k + \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d y_i \, d x_k}\right) \eta_k,$$

$$\frac{d \eta_i}{d t} = - \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d x_i \, d y_k}\right) \xi_k - \Sigma_k \left(\frac{d^2 F}{d x_i \, d y_k}\right) \eta_k,$$

dove le derivate racchiuse fra parentesi s'intendono prese relativamente alla soluzione Ω_0, cioè si deve porre in esse

$$\mu = x_1 = x_2 = y_1 = y_2 = 0$$

mentre x_3 ed y_3 vanno sostituite con $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$.

Le equazioni differenziali sopra scritte non sono che le ***equazioni alle variazioni*** delle equazioni (1'). Da esse si ottiene come subito si verifica

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + \eta_1, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 + \eta_2, \qquad \frac{d\xi_3}{dt} = \eta_3,$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = P_1\xi_1 + \eta_2, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = P_2\xi_2 - \eta_1, \qquad \frac{d\eta_3}{dt} = P_3\xi_3,$$

dove

$$P_1 = \frac{3}{4}\frac{1}{r^5} - \frac{1}{r^3}, \qquad P_2 = -\frac{1}{r^3},$$

$$P_3 = \frac{3z^2}{r^5} - \frac{1}{r^3},$$

rappresentando r la distanza di P da S_1 ed S_2, cioè

$$r = \left|\sqrt{\frac{1}{4} + z^2}\right|.$$

Per le (3) quindi

$$P_1 = 8\left(p + \frac{1}{6}E\right)^3 - 24\left(p + \frac{1}{6}E\right)^5, \qquad P_2 = 8\left(p + \frac{1}{6}E\right)^3,$$

$$P_3 = 24\left(p + \frac{1}{6}E\right)^5 - 16\left(p + \frac{1}{6}E\right)^3.$$

Dall'espressioni ora scritte delle P risulta che esse sono funzioni periodiche (anzi, più propriamente, doppiamente periodiche), del tempo. Le ξ_i ed η_i sono così definite da un sistema di equazioni differenziali a coefficenti periodici.

Detto sistema si divide in due gruppi

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_3}{dt} &= \eta_3, \\ \frac{d\eta_3}{dt} &= P_3\xi_3; \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi_1}{dt} &= \xi_2 + \eta_1, & \frac{d\xi_2}{dt} &= -\xi_1 + \eta_2, \\ \frac{d\eta_1}{dt} &= P_1\xi_1 + \eta_2, & \frac{d\eta_2}{dt} &= P_2\xi_2 - \eta_1. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

9. Per il nostro scopo basterà considerare questo secondo gruppo di equazioni, limitandoci inoltre a valori di E vicini al limite inferiore — 2. Poniamo in conformità

$$E = -2 + \varepsilon$$

con ε (finito, ma) sufficientemente piccolo (*).

Il sistema (7) si può allora risguardare come un sistema di equazioni differenziali dipendenti dal parametro ε.

Il determinante Λ, che necessita provare essere diverso da 0, non è altro che il determinante jacobiano delle funzioni

$$\xi_i(T) - \xi_i(0), \qquad \eta_i(T) - \eta_i(0) \qquad (i = 1, 2)$$

rapporto a $\xi_i(0)$ ed $\eta_i(0)$, poichè le β coincidono coi valori delle ξ e delle η. Così considerato questo determinante, se dimostriamo ch'esso non è nullo per $\varepsilon = 0$ avremo risolta la questione dell'esistenza di soluzioni periodiche per $\mu \neq 0$, perchè esso sarà allora non nullo anche per $\varepsilon \neq 0$.

Quando $\varepsilon = 0$, cioè $E = -2$, $r = \frac{1}{2}$ e quindi

$$P_1 = 16, \qquad P_2 = -8,$$

ed il sistema (7) si riduce a

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \xi_2 + \eta_1, \qquad \frac{d\xi_2}{dt} = -\xi_1 + \eta_2,$$

$$\frac{d\eta_1}{dt} = 16\,\xi_1 + \eta_2, \qquad \frac{d\eta_2}{dt} = -8\,\xi_2 - \eta_1.$$

S'ottiene così un sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti, il quale può essere risolto nel solito modo.

(*) Può sembrare che con questa limitazione si possono solamente trovare quelle soluzioni periodiche che hanno luogo nell'intorno di una posizione d'equilibrio. Ma le cose non stanno proprio così. Infatti, dimostrato una volta che Δ è diverso da 0 per $\mu = \varepsilon = 0$, è chiaro che esisteranno due limiti finiti μ_1 ed ε_1 di μ ed ε tali che, per tutti i valori di $\mu < \mu_1$ e di $\varepsilon < \varepsilon_1$, Δ si manterrà ancora diverso da 0. Ma per valori ε non nulli nè superiori ad ε_1 e per $\mu = 0$, P è dotato di un vero moto finito e quindi esistono dei moti periodici che differiscono poco da questi anche nel caso di $\mu \neq 0$ e minore di μ_1. È dunque una classe più generale di soluzioni periodiche delle quali dimostreremo rigorosamente l'esistenza.

Poniamo cioè

$$\xi_i = \gamma_i e^{\rho t}, \qquad \eta_i = \delta_i e^{\rho t}, \qquad (i = 1, 2)$$

con che le costanti γ e δ sono determinate dalle seguenti equazioni

$$\begin{aligned} \rho\gamma_1 - \gamma_2 - \delta_1 &= 0, \\ \gamma_1 + \rho\gamma_2 - \delta_2 &= 0, \\ -16\gamma_1 + \rho\delta_1 - \delta_2 &= 0, \\ 8\gamma_2 + \delta_1 + \rho\delta_2 &= 0, \end{aligned}$$

che si potranno risolvere rispetto alle γ ed alle δ se

$$\begin{vmatrix} \rho & -1 & -1 & 0 \\ 1 & \rho & 0 & -1 \\ -16 & 0 & \rho & -1 \\ 0 & 8 & 1 & \rho \end{vmatrix} = 0,$$

cioè se

$$\rho^4 - 6\rho^2 - 119 = 0.$$

Ad ognuno dei quattro valori distinti di ρ

$$\rho', \quad -\rho', \quad \rho'', \quad -\rho'',$$

dove

$$\rho' = \sqrt{3 + 8\sqrt{2}}, \qquad \rho'' = \sqrt{3 - 8\sqrt{2}},$$

corrisponde un sistema di valori pure distinti per le γ e δ, vale a dire

$$\gamma_1 = \begin{cases} \gamma'_1 \\ -\gamma'_1 \\ \gamma''_1 \\ -\gamma''_1 \end{cases} \qquad \gamma_2 = \begin{cases} \gamma'_2 \\ \gamma'_2 \\ \gamma''_2 \\ \gamma''_2 \end{cases} \qquad \delta_1 = \begin{cases} \delta'_1 \\ \delta'_1 \\ \delta''_1 \\ \delta''_1 \end{cases} \qquad \delta_2 = \begin{cases} -\delta'_2 \\ \delta'_2 \\ -\delta''_2 \\ \delta''_2 \end{cases}$$

dove

$$\begin{cases} \gamma'_1 = 4(3 + 2\sqrt{2})\sqrt{3 + 8\sqrt{2}}, \\ \gamma''_1 = 4(3 - 2\sqrt{2})\sqrt{3 - 8\sqrt{2}}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma'_2 = -4(5 + 2\sqrt{2}), \\ \gamma''_2 = 4(2\sqrt{2} - 5), \end{cases}$$

$$\begin{cases} \delta'_1 = 8(23 + 16\sqrt{2}), \\ \delta''_1 = 8(23 - 16\sqrt{2}), \end{cases} \qquad \begin{cases} \delta'_2 = 8\sqrt{3 + 8\sqrt{2}}, \\ \delta''_2 = 8\sqrt{3 - 8\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Gli integrali generali del nostro sistema di equazioni differenziali a coefficienti costanti saranno quindi:

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= (C_1 e^{\rho' t} - C_2 e^{-\rho' t})\,\gamma'_1 + (C_3 e^{\rho'' t} - C_4 e^{-\rho'' t})\,\gamma''_1\,,\\
\xi_2 &= (C_1 e^{\rho' t} + C_2 e^{-\rho' t})\,\gamma'_2 + (C_3 e^{\rho'' t} + C_4 e^{-\rho'' t})\,\gamma''_2\,,\\
\eta_1 &= (C_1 e^{\rho' t} + C_2 e^{-\rho' t})\,\delta'_1 + (C_3 e^{\rho'' t} + C_4 e^{-\rho'' t})\,\delta''_1\,,\\
\eta_2 &= (-C_1 e^{\rho' t} + C_2 e^{-\rho' t})\,\delta'_2 + (C_3 e^{\rho'' t} + C_4 e^{-\rho'' t})\,\delta''_2\,,
\end{aligned}$$

le C essendo le 4 costanti d'integrazione, che noi determineremo in modo che i valori iniziali di ξ_i ed η_i sieno precisamente β_1, β_2, β_4, β_5. Ciò è possibile, perchè per $t=0$ il determinante D dei coefficienti delle C è diverso da 0, essendo

$$D = \begin{vmatrix} \gamma'_1 & -\gamma'_1 & \gamma''_1 & -\gamma''_1 \\ \gamma'_2 & \gamma'_2 & \gamma''_2 & \gamma''_2 \\ \delta'_1 & \delta'_1 & \delta''_1 & \delta''_1 \\ -\delta'_2 & \delta'_2 & -\delta''_2 & \delta''_2 \end{vmatrix},$$

cioè

$$D = 4 \cdot \begin{vmatrix} -\gamma'_1 & \gamma''_1 \\ \delta'_2 & -\delta''_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \gamma'_2 & \gamma''_2 \\ \delta'_1 & \delta''_1 \end{vmatrix},$$

ossia infine

$$D = i\, 2^{17} \,.\, 17 \,.\, \sqrt{119}.$$

Assunte in questo modo le C, il determinante Δ si scinde nel prodotto dei due

$$\frac{\partial(\psi_1\,\psi_2\,\psi_4\,\psi_5)}{\partial(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)}\,, \qquad \frac{\partial(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)}{\partial(\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5)}\,;$$

il secondo non è che l'inverso di

$$D = \frac{\partial(\beta_1\,\beta_2\,\beta_4\,\beta_5)}{\partial(C_1\,C_2\,C_3\,C_4)}$$

e quindi è diverso da 0. Il primo, avendo già notato che le ψ (dovendo in Δ porre $\mu = \beta_i = \tau = 0$) sono rispettivamente eguali a

$$\xi_i(T) - \xi_i(0), \qquad \eta_i(T) - \eta_i(0),$$

si presenta sotto la forma

$$(e^{T\varrho'} - 1)\,(e^{-T\varrho'} - 1)\,(e^{T\varrho''} - 1)\,(e^{-T\varrho''} - 1)\,D$$

e perciò è pur esso diverso da 0. Ciò apparisce chiaro ricordando che abbiamo già dimostrato (*) come al convergere di E a -2, T ha un limite finito e diverso da 0 e propriamente $T = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\cdot$ Gli esponenti di e sono quindi diversi da 0, ed anche (avendo presenti i valori di ρ) da multipli di 2π.

È dunque $\Delta \neq 0$, vale a dire il problema che abbiamo preso a considerare ammette delle soluzioni periodiche anche quando le due masse m_1, m_2 di S_1 ed S_2 non sono più eguali.

10. Queste soluzioni da noi messe in luce sono in numero doppiamente infinito, poichè abbiamo assunto ad arbitrio uno dei valori delle variabili canoniche (β_6) ed oltre a questa abbiamo dato pure ad arbitrio anche l'origine del tempo. Gli altri elementi del moto risulteranno invece bene determinati. Possiamo notare che, per gli integrali di JACOBI, ad ogni valore di β_6 (una volta determinati i valori delle altre variabili) corrisponde un unico valore di E, cioè dell'energia totale, ed inversamente, ad ogni valore di E corrisponde un'unico valore di β_6. Così possiamo dire anche che la duplice infinità di queste soluzioni dipende dalla scelta arbitraria dell'origine del tempo e dell'energia totale.

(*) Vedi « Osservazione », p. I[a].