Borsäure.

Zur Untersuchung des Leitungsvermögens der Orthoborsäure H_3BO_3 benutzte ich ein Gefäß von der Form Fig. 3 Wied. Ann. 6. Taf. 1, 1879 dessen Capacität mittelst Maximal-Essigsäurelösung ermittelt und $\gamma = 0,000\,017\,0$ gefunden wurde. Nach sechsmaligem Umkrystallisiren der eine Spur Borax enthaltenden Säure konnte ich zuletzt im Spectrum die Natriumlinien kaum noch wahrnehmen. Die auskrystallisirte, reine Borsäure wurde bei einer Temperatur unter 100°C . getrocknet. Von dieser gereinigten Borsäure wurden folgende vier Lösungen untersucht:

Gewichts-Procente	Mol. Zahlen 1000 m	Spec. Gewicht	Leitungsvermögen $10^8 \cdot k_{18}$	Temperaturcoefficient
0,776	377	1,0029	0,0483	0,0231
1,92	936	1,0073	0,1322	0,0143
2,88	1410	1,0109	0,2246	0,0119
3,612	1772	1,0131	0,3217	0,0075

Das benutzte destillirte Wasser besass bei 20°C . ein Leitungsvermögen $k \cdot 10^8 = 0,028$. Jedenfalls ist aus obiger Mittheilung ersichtlich, dass Borsäure zu den schlechtest leitenden Körpern zählt. Die Spur von Natrium in der käuflichen „reinen“ Säure hatte dieselbe dreimal besser leitend gemacht.

Phys. Laborat. d. Univ. Würzburg, im Nov. 1886.

VI. Zur Theorie der Wheatstone'schen Brücke; von H. Weber.

(Hierzu Taf. VI Fig. 6—10.)

Die eigenthümliche Leiterverzweigung, welche den Namen Wheatstone'sche Brücke führt, pflegt gewöhnlich, wenn sie zu Widerstandsvergleichen benutzt wird, in zwei Anordnungen zur Anwendung zu kommen, welche zwar einander correspondirend, aber doch nicht identisch sind. Stellt man, wie üblich, die Verzweigung durch ein Parallelogramm

$ABCD$, Fig. 3, mit seinen Diagonalen AC und BD dar und bezeichnet der Einfachheit halber die in Betracht kommenden sechs Leiter durch die Zahlen 1 bis 6, so ist entweder das Galvanometer im Leiter 6, die electromotorische Kraft im Leiter 5 oder umgekehrt das Galvanometer im Leiter 5 und die electromotorische Kraft im Leiter 6 enthalten. Bezeichnet man mit i die Stromintensität in dem das Galvanometer enthaltenden Leiter, durch E die electromotorische Kraft und durch w die Widerstände der einzelnen Leiter, während der diesen Grössen angehängte Index den Leiter anzeigt, auf welchen sich der Werth bezieht, und nimmt man ferner die Richtungen AB, BC, AD, DC, CA, BD zu positiven Richtungen an, so gelten in den beiden oben erwähnten Fällen die Gleichungen:

$$(1) \quad i_6 = \frac{w_2 w_4 - w_1 w_3}{N} E_5 \quad i_5 = \frac{w_2 w_4 - w_1 w_3}{N} E_6,$$

$$\text{wo:} \quad N = (w_1 + w_2 + w_3 + w_4)w_5 w_6 + (w_1 + w_2)(w_3 + w_4)w_6 \\ + (w_1 + w_4)(w_2 + w_3)w_5 + w_1 w_2 (w_3 + w_4) + w_3 w_4 (w_1 + w_2) \quad \text{ist.}$$

Solche correspondirende Leiter sind aber nicht blos die Leiter 5 und 6, sondern ebenso die Leiter 1 und 3 und ebenso die Leiter 2 und 4. Man erhält, wenn das Galvanometer und die electromotorische Kraft in 1 und 3 oder in 3 und 1 enthalten sind, die Gleichungen:

$$i_1 = \frac{w_2 w_4 - w_5 w_6}{N} E_3 \quad i_3 = \frac{w_2 w_4 - w_5 w_6}{N} E_1.$$

Desgleichen ergibt sich, wenn das Galvanometer und die electromotorische Kraft in 2 und 4 oder umgekehrt enthalten sind:

$$i_2 = \frac{w_1 w_3 - w_5 w_6}{N} E_4 \quad i_4 = \frac{w_1 w_3 - w_5 w_6}{N} E_2.$$

Man kann hiernach die Wheatstone'sche Leiterverzweigung auf sechs verschiedene Arten zur Widerstandsvergleichung benutzen. In dem Folgenden sollen jedoch nur die beiden erstgenannten Fälle berücksichtigt werden.

Wenn man die gewöhnliche Brücke in eine Brücke mit Gleitdraht (Kirchhoff'sche Form) übergehen lässt, so ergeben sich den obigen Betrachtungen gemäss zwei verschiedene Anordnungen. Die Brücke möge dabei die Ausführung

besitzen, in welcher sie von Matthiessen bei seinen Messungen benutzt wurde. Ist zunächst das Galvanometer G im Leiter 6, die electromotorische Kraft E im Leiter 5 enthalten, so machen wir die Leiter 3 und 4 zum Gleitdraht, den Punkt D zum Gleitcontact. Die Brücke nimmt alsdann die in Fig. 7 dargestellte Form an, wo die Verzweigungspunkte, der Fig. 6 entsprechend, durch dieselben Buchstaben bezeichnet sind.

Der Apparat setzt sich zusammen aus einzelnen Kupferbarren, deren Widerstand vernachlässigt werden kann. Zwischen M und N ist der Gleitdraht z. B. aus Platiniridium oder Platinsilber ausgespannt, zwischen M und A , N und C sind zwei gleiche sogenannte Ballastwiderstände R_1 und R_2 eingeschaltet, zwischen A und B befindet sich der Etalon w und zwischen B und C der mit ihm zu vergleichende Widerstand x . Der Contact in dem Punkte D werde durch Andrücken eines Stiftes aus demselben Metall, aus dem der Gleitdraht besteht, bewerkstelligt, und endlich sei O die Verbindungsstelle zwischen diesem Stift und dem nach dem Galvanometer führenden Kupferdrahte. Bei dieser Einrichtung hat man drei Berührungsstellen heterogener Metalle, dabei R_1 , R_2 , w und x als aus Kupfer bestehend vorausgesetzt, nämlich in den Punkten M , N und O . Haben diese Berührungsstellen dieselbe Temperatur, so sind sie ohne Einfluss auf die Messung. Haben sie aber verschiedene Temperatur, so entstehen Thermostrome, welche auf das Galvanometer einwirken und damit Fehler in den Messungsergebnissen hervorrufen. Man prüft, ob ein Thermostrom vorhanden ist, dadurch, dass man den die electromotorische Kraft enthaltenden Zweig öffnet. Nimmt man an, dass die Stellen M und N gleiche Temperatur, nämlich diejenige der umgebenden Luft besitzen, und dass nur die Berührungsstelle O infolge der Verschiebung der Contactstelle mit der Hand eine andere Temperatur besitzt, so kann man sich durch zwei Messungen, bei denen der electromotorischen Kraft entgegengesetzte Richtung ertheilt wird, von dem Einfluss des Thermostromes unabhängig machen. Sind a und b die Widerstände AMD und CND , wenn die Brücke stromlos ist,

a' und b' die entsprechenden Grössen, nachdem die electromotorische Kraft die entgegengesetzte Richtung erhalten hat, so findet sich:

$$x = \frac{\frac{1}{2}(b + b')}{\frac{1}{2}(a + a')} w.$$

Hierbei ist vorausgesetzt, dass die Temperatur in O während der Messung constant bleibe, was aber bei Verschiebung der Contactstelle mit der Hand im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden darf.

Von der Temperatur in O wird man aber gänzlich unabhängig, wenn man sich der zweiten Anordnung bedient, welche aus der ersten hervorgeht, wenn man Elemente und Galvanometer mit einander vertauscht. Alsdann befindet sich Fig. 8 die electromotorische Kraft und der Berührungspunkt O in der Brücke BD und folglich bleiben Temperaturveränderungen in O ohne Einfluss.

Ein weiterer Vortheil dieser Anordnung vor der vorher betrachteten besteht darin, dass, wenn die Widerstände w und x nahezu gleich sind, von D aus zwei nahezu gleich starke Ströme in den Richtungen DM und DN verlaufen, wodurch die in M und N auftretende Peltier'sche Wirkung des Stromes keinen Einfluss auf die Messung ausüben kann.

Man macht dieser zweiten Anordnung den Vorwurf, dass der bei der Unterbrechung des Contactes in D eventuell auftretende Lösungsfunke den Gleitdraht beschädigen könnte. Aber abgesehen davon, dass starke Ströme bei Widerstandsvergleichungen überhaupt zu vermeiden sind, kann man durch Anwendung eines besonderen Schlüssels den Lösungsfunken an der Stelle D gänzlich vermeiden. Zugleich beseitigt man damit auch den störenden Einfluss, den Inductionen der Leiter unter einander und auf sich selbst ausüben können.

Der Schlüssel, dessen ich mich bediene, ist Fig. 9 dargestellt.¹⁾ Er besteht aus einem Hebel, der sich um eine horizontale Axe dreht. Die Feder F ertheilt ihm eine

1) In der praktischen Ausführung ist der federnde Theil des Hebels, sowie die unter ihm befindliche Kupferfeder etwas länger als in der Zeichnung angegeben ist.

bestimmte Ruhestellung, bei welcher der Contact bei U offen ist. Das eine Ende dieses Hebels wird durch eine nach oben gebogene starke Feder mit dem Druckknopf T gebildet. Auf der unteren Seite des Druckknopfes ist ein kleiner abgerundeter Elfenbeincylin- der befestigt, welcher zur Isolation dient. Wird der Hebel bei T herabgedrückt, so dreht sich der Hebel zunächst um die Axe , bis der Contact bei U hergestellt ist. Der Contact U schliesst das galvanische Element. Bei weiteren Niederdrücken drückt der Elfenbeincylin- der auf eine unter ihm befindliche Feder, nimmt dieselbe mit und stellt den Contact bei S her. Hierdurch wird der Galvanometerzweig geschlossen. Die Feder, der Stift S und die mit ihnen verbundenen Klemmen sind aus Kupfer hergestellt. Bei der rückgängigen Bewegung wird zuerst das Galvanometer geöffnet und sodann erst das Element ausgeschaltet. Fig. 10 stellt die ganze Anordnung dar, dabei ist zur Umkehrung des Stromes noch ein Commutator eingeschaltet. Die folgenden Betrachtungen beziehen sich auf diese Anordnung.

Ueber die günstigste Wahl der Widerstände.

Es sei der Leiter, dessen Widerstand x bestimmt werden soll, gegeben, der Etalonwiderstand w , sowie alle übrigen in der Brücke vorkommenden Widerstände und ebenso die electromotorische Kraft seien frei wählbar, es handelt sich darum, diejenigen Widerstände und diejenige electromotorische Kraft ausfindig zu machen, für welche x unter sonst gleichen Verhältnissen am genauesten gefunden wird.

Jede Widerstandsvergleichung besteht aus zwei Messungen, aus einer Längenmessung und einer Intensitätsmessung. Der Fall, wo durch Verschiebung des Contactpunktes D die Intensität im Galvanometerzweig gleich Null gemacht wird, bildet lediglich einen Specialfall des allgemeineren. Man hat alsdann die Intensität Null zu beobachten. Bei beiden Messungen werden Fehler begangen, daher treten die günstigsten Verhältnisse dann ein, wenn man den wählbaren Grössen solche Werthe ertheilt, für welche jene Fehler den geringsten Einfluss auf das Resultat haben.

Um eine merkliche Erwärmung der Leiter durch den Strom auszuschliessen, soll der Strom durch den Schlüssel nur eine äusserst kurze Zeit geschlossen werden. Die Intensität in dem Galvanometerzweig wächst alsdann während einer kurzen Zeit τ von Null bis zu einem Maximumwerth und nimmt sodann wieder bis zu Null ab. Aus der zweiten Gleichung der Gl. (1) ergibt sich dann, wenn, Fig. 10, der Widerstand zwischen AMD durch a , der Widerstand zwischen CND durch b bezeichnet wird:

$$\int_0^{\tau} i dt = \frac{ax - bw}{N} \int_0^{\tau} E dt.$$

Dabei ist, wenn jetzt w_5 durch w_0 und w_6 durch W bezeichnet wird:

$$N = (a + b + w + x) W w_0 + (a + b) (w + x) W + (a + w) (b + x) w_0 + (a + b) wx + (w + x) ab.$$

Für den gesuchten Widerstand x ergibt sich hieraus:

$$(2) \quad x = \frac{A + B \int_0^{\tau} i dt}{C - D \int_0^{\tau} i dt}, \quad \text{wobei:}$$

$$(3) \quad \begin{cases} A = bw \int_0^{\tau} E dt, \\ B = (a + b + w) W w_0 + (a + b) W w + (a + w) b w_0 + ab w, \\ C = a \int_0^{\tau} E dt, \\ D = W w_0 + (a + b) W + (a + w) w_0 + (a + b) w + ab \quad \text{ist.} \end{cases}$$

Durch den kurzen Schluss erhält die Nadel im Galvanometer einen Stoss. Da nach dem Stosse das Galvanometer ausgeschaltet und offen ist, so schwingt die Nadel unter dem alleinigen Einfluss des Erdmagnetismus und der Luftdämpfung weiter. Wir denken uns die erste Elongation q der Nadel nach dem Stosse gemessen und bestimmen aus ihr den Werth von $\int_0^{\tau} i dt$.

Ist K das Trägheitsmoment der Nadel,

λ_0 das logarithmische Decrement der Luftdämpfung,

t_0 die Schwingungsdauer der Nadel bei offenem Galvanometer,

$f_{(0)}$ die Multiplicatorfunction, d. h. das Drehungsmoment, welches der durch das Galvanometer fließende Strom von der Intensität eins auf die in der Ruhelage befindliche Nadel ausübt, so hat man:

$$\int_0^{\tau} i dt = K \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t_0} e^{\frac{\lambda_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda_0}} \frac{q}{f_{(0)}}.$$

Die Galvanometerfunction ist eine Function, welche lediglich von dem magnetischen Moment m der Nadel, von dem Widerstand des Galvanometerdrahtes, von der Windungcurve und dem Multiplicatorquerschnitt abhängt. Nehmen wir an, dass die Zuleitungsdrähte von den Punkten A und C , Fig. 10, bis zum Galvanometer einen verschwindend kleinen Widerstand haben, so kann man den Widerstand des Galvanometers dem Widerstand des ganzen Galvanometerzweiges w_0 gleich setzen. Es ist dann:

$$f_{(0)} = m \cdot F(h, h') \sqrt{w_0},$$

wo $F(hh')$ eine Function bezeichnet, welche von der Höhe h und der Breite $2h'$ des Galvanometerquerschnittes und ausserdem von der Windungcurve abhängt.¹⁾ Hiernach wird:

$$(4) \quad \int_0^{\tau} i dt = Q \cdot \frac{q}{\sqrt{w_0}}, \quad \text{wo:}$$

$$Q = \frac{K}{m} \frac{\sqrt{\pi^2 + \lambda_0^2}}{t_0} e^{\frac{\lambda_0}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\lambda_0}} \frac{1}{F(hh')}$$

eine Constante bezeichnet.

Ist ferner l die Länge, q der Querschnitt und κ der spezifische Widerstand des Gleitdrahtes MN und α die Länge MD , so ist:

$$(5) \quad a = R_1 + \frac{\alpha}{q} \kappa, \quad b = R_2 + \frac{l - \alpha}{q} \kappa.$$

1) H. Weber, Pogg. Ann. 137. p. 128. GL. (7). 1869.

Führt man nun die Werthe (4) und (5) in die Gleichungen (2) und (3) ein, so sieht man, dass x eine Function von α und φ ist, und man erhält für den Fehler im Resultat, welcher durch den Beobachtungsfehler $\Delta\alpha$ hervorgerufen wird, wenn man zur Abkürzung:

$$\int_0^{\tau} i dt = J \quad \text{setzt:}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} \Delta\alpha = \frac{(C - DJ) \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} + J \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) - (A + BJ) \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha} - J \frac{\partial D}{\partial \alpha} \right)}{(C - JD)^2} \cdot \Delta\alpha.$$

In dem besonderen Fall, dass man dem Contact D eine solche Lage α_0 ertheilt, für welche der Galvanometerzweig stromlos ist, für welche also $J = 0$ wird, erhält man für den Fehler im Resultat:

$$(6) \quad F_1 = \frac{\partial x}{\partial \alpha} \Delta\alpha = \frac{C \left(\frac{\partial A}{\partial \alpha} \right)_0 - A \left(\frac{\partial C}{\partial \alpha} \right)_0}{C^2} \cdot \Delta\alpha = \left[\frac{\partial \left(\frac{A}{C} \right)}{\partial \alpha} \right]_0 \Delta\alpha.$$

Der Index 0 bedeutet hierbei, dass nach Ausführung der Differentiation $\alpha = \alpha_0$ zu setzen ist.

Ebenso erhält man für den Fehler im Resultat, wenn bei Beobachtung der Nadelablenkung φ der Beobachtungsfehler $\Delta\varphi$ begangen wird:

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta\varphi = \frac{(C - DJ) B \frac{\partial J}{\partial \varphi} + (A + BJ) D \frac{\partial J}{\partial \varphi}}{(C - DJ)^2} \Delta\varphi,$$

oder in dem besonderen Falle, wo der Contact D die Lage α_0 einnimmt:

$$(7) \quad F_2 = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \Delta\varphi = \left[\frac{AD + BC}{C^2} \right]_0 \left(\frac{\partial J}{\partial \varphi} \right)_0 \Delta\varphi.$$

Hierbei bedeutet der Index 0, dass in A , B , C , D $\alpha = \alpha_0$ und in $\partial J / \partial \varphi$ nach Ausführung der Differentiation $\varphi = 0$ zu setzen ist.

Man erhält folglich für den mittleren Fehler des Resultates, welcher durch die mittleren Beobachtungsfehler $\Delta\alpha$ und $\Delta\varphi$ hervorgerufen wird, wenn der Contactpunkt D sich in der Lage α_0 befindet:

$$F = \sqrt{\left[\frac{\partial \left(\frac{A}{C} \right)}{\partial \alpha} \right]_0^2 A \alpha^2 + \left[\frac{A D + B C}{C^2} \right]_0^2 \left(\frac{\partial J}{\partial \varphi} \right)_0^2 A \varphi^2}.$$

Um die günstigsten Verhältnisse für die Bestimmung des Widerstandes x zu finden, hat man für $A\alpha$ und $A\varphi$ die erfahrungsmässig festzustellenden mittleren Beobachtungsfehler zu setzen und die wählbaren Grössen so zu bestimmen, dass F ein Minimum wird. Es empfiehlt sich jedoch aus einem später zu erörternden Grunde, dem Etalonwiderstande w von vornherein einen bestimmten Werth zu ertheilen, und zwar einen solchen, dass der Fehler des Resultates F_1 , der von dem Beobachtungsfehler $A\alpha$ herrührt, ein Minimum wird, den übrigen wählbaren Grössen aber solche Werthe zu geben, welche den Fehler des Resultates F_2 , welcher dem Beobachtungsfehler $A\varphi$ entspricht, zu einem Minimum machen.

Nach den Gleichungen (5) und (6) hat man:

$$F_1 = \left[\frac{\partial \left(\frac{A}{C} \right)}{\partial \alpha} \right]_0 A \alpha = - \frac{R_1 + R_2 + \frac{l}{q} x}{\left(R_1 + \frac{\alpha_0}{q} x \right)^2} \frac{x}{q} w A \alpha.$$

Hierin ist α_0 eine Function von w . Man hat nämlich, da die Beobachtung an der Stelle α_0 des Gleitdrahtes stattfindet, für welche der Galvanometerzweig stromlos ist:

$$\left(R_1 + \frac{\alpha_0}{q} x \right) x = \left(R_2 + \frac{l - \alpha_0}{q} x \right) w,$$

woraus:

$$(8) \quad \frac{\alpha_0}{q} x = \frac{\left(R_2 + \frac{l}{q} x \right) w - R_1 x}{w + x}$$

folgt. Demnach ist w so zu bestimmen, dass:

$$\frac{(w + x)^2}{w},$$

ein Minimum wird, d. h. man findet:

$$w = x.$$

Aus Gl. (8) ergibt sich dann:

$$\frac{\alpha_0}{q} x = \frac{R_2 - R_1 + \frac{l}{q} x}{2},$$

oder für $R_1 = R_2$: $\alpha_0 = \frac{l}{2}$.

Wird hiernach der Etalonwiderstand w dem Widerstand x gleich gewählt, so wird der durch den Beobachtungsfehler $\Delta\alpha$ hervorgerufene Fehler des Resultates F_1 ein Minimum. Wählt man ferner auch die Ballastwiderstände R_1 und R_2 einander gleich und stellt sie aus derselben Drahtsorte her, so fällt der Contactpunkt D in die Mitte des Gleitdrahtes, und zugleich wird die Messung gänzlich von der Temperaturerhöhung in dem Zweige $AMDNC$ unabhängig, welche durch den Stromschluss hervorgerufen wird, da alsdann die Zweige DMA und DNC von Strömen gleicher Intensität durchflossen werden. Es leuchtet ein, dass bei praktischer Ausführung der Bedingungen $w = x$ und $R_1 = R_2$ nur näherungsweise erfüllt zu sein brauchen.

Um den Fehler F_2 zu bestimmen, welcher aus dem Beobachtungsfehler $\Delta\varphi$ hervorgeht, führen wir zunächst aus Gl. (4) den Werth von:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial \varphi}\right)_0 = \left[\frac{\partial \left(\int_0^t i dt \right)}{\partial \varphi} \right]_0 = \frac{Q}{V w_0}$$

in Gl. (7) ein und erhalten:

$$(9) \quad F_2 = \left[\frac{AD + BC}{C^2} \right]_0 \frac{Q}{V w_0} \Delta\varphi.$$

Setzt man $w = x$, $R_1 = R_2 = R$, $\alpha_0 = l/2$ und zur Abkürzung den Widerstand des Zweiges $AMDNC$, nämlich:

$$(10) \quad 2R + \frac{l}{q}x = L,$$

so nehmen die Grössen A , B , C , D nach Gl. (3) und Gl. (5) die Werthe an:

$$A = \frac{1}{2} L x \int_0^t E dt,$$

$$B = (L + x) W w_0 + L W x + \frac{1}{4} L^2 (w_0 + x) + \frac{1}{2} L w_0 x,$$

$$C = \frac{1}{2} L \int_0^t E dt,$$

$$D = W w_0 + L(W + x) + \frac{1}{2} L w_0 + w_0 x + \frac{1}{4} L^2,$$

und demnach wird:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} F_2 = \frac{2Q \Delta \varphi}{L \sqrt{w_0} \int_0^x E dt} & \left\{ \frac{1}{4} L^2 w_0 + \frac{1}{2} L^2 x + L W w_0 + 2 L W x \right. \\ & \left. + L w_0 x + L x^2 + 2 W w_0 x + w_0 x^2 \right\}. \end{aligned} \right.$$

Hierin sind L , W , w_0 , $\int_0^x E dt$ Grössen, über welche noch freie Verfügung zusteht, und man hat dieselben so zu wählen, dass F_2 ein Minimum wird. Was den Widerstand W des Zweiges, in welchem die electromotorische Kraft enthalten ist, und die electromotorische Kraft $\int_0^x E dt$ anbetrifft, so übersieht man leicht, sofern sie voneinander unabhängig sind, dass der Fehler F_2 um so kleiner wird, je kleiner W und je grösser $\int_0^x E dt$ genommen wird, da erstere Grösse nur im Zähler, letztere nur im Nenner des Ausdruckes von F_2 vorkommt. Andere Verhältnisse treten ein, wenn die beiden Grössen voneinander abhängen, derart, dass die Aenderung der einen Grösse eine Aenderung der anderen zur Folge hat. Ein solcher Fall tritt z. B. ein, wenn zur Widerstandsvergleichung n gleiche Elemente zur Disposition stehen. Je nach der Combination dieser Elemente wird der Widerstand und die electromotorische Kraft wechseln. Es möge der Einfachheit halber angenommen werden, dass die Zuleitungsdrähte zu der Säule von den Punkten B und D einen solchen Querschnitt besitzen, dass ihr Widerstand vernachlässigt werden kann. Werden aus den n gegebenen Elementen, von denen jedes die electromotorische Kraft e und den Widerstand r besitzt, v Gruppen gebildet und diese hintereinander geschaltet, während jede Gruppe aus v' neben einander geschalteten Elementen besteht, so ist die electromotorische Kraft der Säule:

$$(12) \quad \begin{aligned} E &= v e, & \text{und da:} \\ n &= v v' \end{aligned}$$

ist, folgt für den Widerstand der Säule:

$$(13) \quad W = \frac{r}{v} v = \frac{r}{n} v^2.$$

Mithin hat man:
$$E = e \sqrt{\frac{n}{r}} \cdot \sqrt{W}.$$

Führt man diesen Werth in Gl. (11) ein, so erhält man eine Gleichung, aus welcher sich unter den angenommenen Verhältnissen der vortheilhafteste Werth von W bestimmen lässt. Die Gleichungen (12) und (13) geben dann die zweckmässigste Zahl der Gruppen und die zweckmässigste Zahl der Elemente jeder Gruppe, in welche die Säule zu zerlegen ist.

Man hat hiernach:

$$F_2 = f(L, w_0, W).$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial F_2}{\partial L} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial w_0} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial W} = 0$$

geben drei Gleichungen, aus denen sich die günstigsten Werthe von L , w_0 und W ergeben. Bei Ausführung der angedeuteten Differentiationen erhält man die Gleichungen:

$$(14) \quad L = 2 \sqrt{\frac{w_0 x (2W + x)}{w_0 + 2x}},$$

$$(15) \quad w_0 = \frac{2Lx}{L + 2x}, \quad (16) \quad W = \frac{1}{4}(L + 2x).$$

Zu ganz entsprechenden Gleichungen gelangt man, wenn die Anordnung Fig. 7 vorausgesetzt wird. Bezeichnet man auch in diesem Falle den Widerstand des Galvanometerzweiges durch w_0 , den Widerstand des die electromotorische Kraft enthaltenden Zweiges durch W , so ergeben sich die entsprechenden Gleichungen aus den obigen, indem man überall für w_0 W und für W w_0 setzt. Maxwell's Betrachtungen über die Wheatstone'sche Brücke¹⁾ beziehen sich auf den letzten Fall. Seine Formeln stehen mit den obigen in Uebereinstimmung.

Es mögen nun einige besondere Fälle betrachtet werden.

1. Es sei das Galvanometer mit seinem Widerstand w_0 und ebenso die electromotorische Kraft, z. B. ein Element, mit seinem Widerstand W gegeben, alsdann bleibt nur noch übrig, den Widerstand L des Zweiges *AMDNC* gemäss der Gleichung (14) passend zu wählen. Man bestimmt zunächst durch einen Vorversuch den Widerstand x , wählt für die genauere Be-

1) Maxwell, Lehrbuch der Electricität etc. Deutsche Uebersetzung von Weinstein. Bd. 1. p. 497.

stimmung einen ihm möglichst nahe gleichen Etalonwiderstand w zur Vergleichung aus und gibt den Gleichungen (10) und (14) entsprechend jedem der beiden Ballastwiderstände R_1 und R_2 möglichst nahe den Werth:

$$R = \sqrt{\frac{w_0 x (2W + x)}{w_0 + 2x}} - \frac{1}{2} \frac{l}{q} x.$$

Zur Uebersicht über die Grösse der Ballastwiderstände R unter verschiedenen Verhältnissen diene folgende Tafel. Es ist dabei vorausgesetzt, dass der Gleitdraht aus einem 1 m langen Platinsilberdraht (2 Theile Platin, 1 Theil Silber) von 1 mm Durchmesser besteht, und dass seine Temperatur bei der Messung 20° C beträgt. Aus dem specifischen Widerstand der Legirung 2419 [C.-G.-S.] und dem Temperaturcoëfficienten bezogen auf 1° C. 0,00031 findet sich:

$$\begin{aligned} \frac{l}{q} x &= 0,0308 (1 + 0,00031 \cdot 20) \text{ Ohm} \\ &= 0,0310 \text{ Ohm.} \end{aligned}$$

Es werde ferner ein grosses Bunsen'sches Element angewandt, dessen Widerstand zu:

$$W = 0.1 \text{ Ohm}$$

angenommen werden soll. Man findet dann für den günstigsten Werth, welcher jedem der Ballastwiderstände R zu ertheilen ist, wenn x und w_0 verschiedene Werthe besitzen.

x	$w_0 = 1$	$w_0 = 10$	$w_0 = 100$
0,1	0,143	0,156	0,158
0,5	0,403	0,549	0,573
1	0,617	0,985	1,069
5	1,522	3,590	4,846
10	2,188	5,815	9,204
100	7,045	21,828	57,777
1000	22,342	70,526	218,225

Die Werthe von x , w_0 und R sind hierbei in Ohm ausgedrückt.

2) Es sei das Galvanometer mit seinem Widerstande w_0 und eine Anzahl Elemente gegeben, welche auf verschiedene Weise in Gruppen geschaltet werden können, dann kann man über die Widerstände L und W frei verfügen. Aus Gleichung (14) und (16) ergeben sich als günstigste Werthe:

$$L = \frac{x(w_0 + \sqrt{w_0(9w_0 + 16x)})}{w_0 + 2x},$$

$$W = \frac{1}{4} \frac{x(3w_0 + 4x + \sqrt{w_0(9w_0 + 16x)})}{w_0 + 2x}.$$

Man hat die gegebenen Elemente so in Gruppen zu schalten, dass der Widerstand der Säule dem obigen Werthe W gleich wird. Die Grössen R und W ergeben sich für einige Werthe von x und w_0 unter den nämlichen Voraussetzungen wie vorher aus folgender Tabelle.

x	$w_0 = 1$		$w_0 = 10$		$w_0 = 100$	
	R	W	R	W	R	W
0,1	0,162	0,139	0,182	0,149	0,184	0,150
0,5	0,625	0,570	0,923	0,719	0,978	0,747
1	0,985	1,000	1,758	1,387	1,958	1,487
5	2,356	3,686	6,388	5,702	9,372	7,194
10	3,318	6,667	9,985	10,000	17,717	13,867
100	10,211	55,113	33,318	66,667	99,985	100,000
1000	31,850	515,933	102,254	551,135	333,31	666,667

3) Kann man über die Grössen L , W , w_0 frei disponiren, so hat man ihnen, wie aus den Gleichungen (14), (15), (16) hervorgeht, den Werth zu ertheilen:

$$L = 2x, \quad W = x, \quad w_0 = x,$$

wo wiederum W den Widerstand bezeichnet, den man durch geeignete Gruppierung den gegebenen Elementen zu geben hat. Man findet dann:

x	R	W	w_0
0,1	0,085	0,1	0,1
0,5	0,485	0,5	0,5
1	0,985	1	1
5	4,985	5	5
10	9,985	10	10
100	99,985	100	100
1000	999,985	1000	1000

woraus hervorgeht, dass wenigstens für grössere Widerstände x die günstigsten Verhältnisse eintreten, wenn die Grössen RWw_0 gleich gross gewählt werden.

Hat man in dem einen oder anderen Falle den Grössen w , R_1 , R_2 , W , w_0 Werthe ertheilt, welche annähernd den

günstigsten Verhältnissen entsprechen, so findet sich x aus der Gleichung:

$$\left(R_1 + \frac{\alpha_0}{q} x\right) x = \left(R_2 + \frac{l - \alpha_0}{q} x\right) w.$$

Es empfiehlt sich jedoch, die Messung von der eventuell unrichtigen Lage des Nullpunktes der Scala, auf welcher α_0 gemessen wird, sowie von derjenigen des Index, an welchem die Lage des Contactpunktes D bestimmt wird, frei zu machen, da im allgemeinen nicht vorausgesetzt werden darf, dass die Punkte M und D mit dem Nullpunkt und dem Index zusammenfallen. Man erreicht dies bekanntlich dadurch, dass man zwei Messungen ausführt, bei denen die Widerstände x und w vertauscht werden. Ist α_0' die Ablesung nach der Vertauschung, so gilt die Gleichung:

$$\left(R_1 + \frac{\alpha_0'}{q} x\right) w = \left(R_2 + \frac{l - \alpha_0'}{q} x\right) x.$$

Setzt man wie früher:

$$(17) \quad R_1 + R_2 + \frac{l}{q} x = L,$$

so lassen sich die beiden Gleichungen schreiben:

$$\begin{aligned} \left(R_1 + \frac{\alpha_0}{q} x\right) \frac{x}{w} &= L - \left(R_1 + \frac{\alpha_0}{q} x\right), \\ \left(R_1 + \frac{\alpha_0'}{q} x\right) \frac{w}{x} &= L - \left(R_1 + \frac{\alpha_0'}{q} x\right). \end{aligned}$$

Addirt man auf beiden Seiten der ersten Gleichung $R_1 + (\alpha_0'/q)x$ und auf beiden Seiten der zweiten $R_1 + (\alpha_0/q)x$ und dividirt die erste Gleichung durch die zweite, so erhält man:

$$x = \frac{L + \frac{\alpha_0' - \alpha_0}{q} x}{L - \frac{\alpha_0' - \alpha_0}{q} x} \cdot w.$$

Der Werth von L ist hierbei durch Gleichung (17) bestimmt, wenn der Widerstand des Gleitdrahtes $(l/q)x$ für die Temperatur, bei welcher gemessen wird, bekannt ist. Ist ferner der Gleitdraht graduirt, so ist der Werth von $(\alpha_0/q)x$ für jedes beobachtete α_0 bekannt. Besitzen endlich w und x nahezu gleiche Werthe, so ist $((\alpha_0' - \alpha_0)/q)x$ eine kleine Grösse, und ein kleiner Fehler in der Bestimmung von L hat nur einen geringen Einfluss auf das Resultat.

Die Formeln von Oliver Heaviside.

Hr. Oliver Heaviside¹⁾ hat eine Untersuchung über die vortheilhaftesten Werthe angestellt, welche man dem Widerstand L und dem Etalonwiderstand w zu geben hat, wenn der Widerstand W der Batterie und derjenige des Galvanometers w_0 gegeben sind. Es gelten diese Betrachtungen jedoch nur für den Fall, dass man lediglich auf den Beobachtungsfehler, der bei der Intensitätsmessung begangen wird, Rücksicht nimmt und eine absolute Genauigkeit bei der Längenmessung voraussetzt. In diesem Falle wird der Fehler im Resultat dargestellt durch Gl. (9):

$$F_2 = \left[\frac{AB + BC}{C^2} \right]_0 \frac{Q}{\sqrt{w_0}} \Delta \varphi.$$

Führt man für A, B, C, D (Gl. 3) ihre Werthe ein, indem man wieder:

$$a + b = L$$

oder da:

$$ax = bw$$

$$(18) \quad a = \frac{L}{w+x} w \quad b = \frac{L}{w+x} x$$

setzt, so findet sich:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} F_2 &= \frac{Q \Delta \varphi}{\sqrt{w_0} \int E dt} \frac{1}{L} \left\{ L^2 \left[\frac{wx}{w+x} + \frac{(w_0+x)x}{w+x} \right] \right. \\ &+ L \left[\frac{w+x}{w} (w_0+x) W + (w+x) (W+x) + 2w_0 x \right] \\ &\left. + (w+x) \left[\frac{Ww_0 x}{w} + (W+x) w_0 \right] \right\}. \end{aligned} \right.$$

Die Gleichungen:

$$\frac{\partial F_2}{\partial L} = 0 \quad \frac{\partial F_2}{\partial w} = 0$$

führen zu den Gleichungen:

$$(20) \quad L = (w+x) \sqrt{\frac{w_0(Ww + Wx + wx)}{wx(w+w_0+x)}},$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{L^2 w_0 x}{(w+x)^2} + L \left[\frac{w_0+x}{w^2} Wx - (W+x) \right] \\ &+ \frac{Ww_0 x^2}{w^2} - (W+x) w_0 = 0. \end{aligned} \right.$$

1) Heaviside, Phil. Mag. (4) 45. p. 114. 1873.

Setzt man den Werth (20) in die Gleichung (21) ein, so lässt sich dieselbe auf die Form bringen:

$$\left\{ \frac{Wx(w_0 + x)}{w^2} - (W + x) \right\} \left\{ (w + x) \sqrt{\frac{w w_0 (w + w_0 + x) (Ww + Wx + wx)}{x}} + w w_0 (w + x) \right\} = 0.$$

Der erste Factor gibt den Werth:

$$(22) \quad w = \sqrt{\frac{Wx(w_0 + x)}{W + x}}.$$

Der Bau des zweitens Factors zeigt, dass es weiter keinen reellen und positiven Werth von w gibt, welcher der Gleichung genügt. Um mit Hülfe dieses Werthes von w denjenigen von L zu finden, schreiben wir Gl. (20):

$$L = (w + x) \sqrt{\frac{w_0 (W + x)}{x (w_0 + x)}} \cdot \sqrt{\frac{w + \frac{Wx}{W + x}}{w + \frac{w^2}{w_0 + x}}}.$$

Man sieht alsdann, wenn man den Werth von w in diese Gleichung einführt, dass:

$$L = \sqrt{W w_0} + \sqrt{w_0 x \frac{W + x}{w_0 + x}}$$

wird und sich nach Gl. (18) u. (22):

$$a = \sqrt{W w_0}, \quad b = \sqrt{w_0 x \frac{W + x}{w_0 + x}}, \quad w = \sqrt{Wx \frac{w_0 + x}{W + x}}$$

findet. Setzt man voraus, im Gegensatz wie dies hier geschehen, dass sich das Galvanometer in der Brücke *BED*, Fig. 8, befindet, und die electromotorische Kraft im Zweige *AGC* eingeschaltet ist, und bezeichnet auch dann noch den Widerstand des Zweiges, welches das Galvanometer enthält, durch w_0 , denjenigen, der die electromotorische Kraft enthält, durch W , so ergeben sich die diesem Falle entsprechenden Formeln, indem man in den obigen Gleichungen w_0 mit W vertauscht.

Formel von Schwendler.

Hr. Schwendler¹⁾ nimmt die Widerstände x , w und L als gegeben an und bestimmt den vortheilhaftesten Werth

1) Schwendler, Pogg. Ann. 130. p. 574. 1867.

des Widerstandes w_0 , welchen man dem Galvanometerzweige zu ertheilen hat, damit ein Fehler in der Galvanometerbeobachtung den geringsten Einfluss auf das Resultat hat. Nach Gl. (9) ist der Fehler der Galvanometerbeobachtung gegeben durch:

$$F_2 = \left[\frac{AD + BC}{C^2} \right]_0 \frac{Q}{\sqrt{w_0}} \Delta \varphi.$$

Bildet man mit Hülfe des Werthes (19) die Gleichung:

$$\frac{\partial F_2}{\partial w_0} = 0,$$

so findet sich aus ihr:

$$w_0 = \frac{L(w+x)}{L+w+x},$$

oder da:

$$L = a + b,$$

$$w_0 = \frac{(a+b)(w+x)}{a+b+w+x},$$

und das ist die von Schwendler gegebene Formel.

Braunschweig, im December.

VII. *Erwiderung auf die letzten Bemerkungen¹⁾ des Hrn. Hoppe über die unipolare Induction; von E. Edlund.*

(Hierzu Taf. VI Fig. 11.)

Meines Erachtens ist jede Theorie der unipolaren Induction, welche den Forderungen der mechanischen Wärmetheorien nicht vollkommen genügt, unrichtig; dieselbe muss in Folge dessen zu Resultaten führen, die wenigstens theilweise fehlerhaft sind. Es wäre leicht, den Nachweis zu liefern, dass die von Hrn. Hoppe vertretene Inductionstheorie diesen Forderungen nicht entspricht. Um aber meinen Aufsatz nicht in die Länge zu ziehen, werde ich mich damit begnügen, andere Punkte in der Abhandlung des Hrn. Hoppe zu besprechen.

Ich weise auf Fig. 19 in dem Aufsatz des Hrn. Hoppe hin. Wenn der röhrenförmige Magnet um seine Axe rotirt,

1) Hoppe, Wied. Ann. 29. p. 544. 1886.

Fig. 4.

Fig. 6.

Fig. 3.

Fig. 1.

Fig. 11.

Fig. 2.

Fig. 8.

Fig. 7.

Fig. 9.