Ueber die Erhaltung des Geschlechts bei zwei ein-eindeutig auf einander bezogenen Plancurven.

Von

H. SCHUBERT in Hamburg.

Der einfache Inhalt des Riemann'schen Satzes von der Erhaltung des Geschlechts fordert einen Beweis, welcher von keinem anderen Hilfsmittel Gebrauch macht, als von dem *Chasles'schen Correspondenzprincip*, weil dieses die gemeinsame Basis aller auf Punktepaare bezüglichen Abzählungen bildet. Der folgende Beweis erfüllt diese bei geometrischer Auffassung berechnete Forderung, und dürfte an Kürze nichts zu wünschen übrig lassen. *)

Die beiden ein-eindeutig bezogenen Plancurven C und C' mögen von jeder Geraden ihrer Ebenen in n resp. n' Punkten geschnitten werden, durch jeden Punkt r resp. r' Tangenten schicken, und x resp. x' Rückkehrpunkte besitzen. Wir ordnen nun den Curven C und C' zwei nicht auf ihnen liegende Punkte P und P' zu, und bestimmen dann auf zweifache Weise, nämlich durch Anwendung des Chasles'schen Correspondenzprincips sowohl auf den Strahlbüschel P , wie auf den Strahlbüschel P' , wie oft es vorkommt, dass ein durch P gehender Strahl s und ein durch P' gehender Strahl s' derartig zusammengehören, dass zwei von den n Schnittpunkten des Strahls s mit der Curve C zweien von den Schnittpunkten des Strahls s' mit der Curve C' entsprechen. Die Zahl der so beschaffenen Strahlenpaare sei V .

Ein beliebiger Strahl durch P schneidet C in n Punkten, denen auf C' n Punkte entsprechen. Die Verbindungslinie jedes der letztgenannten Punkte mit P' liefert auf C' noch $n' - 1$ weitere Schnittpunkte, denen auf der Curve C $n' - 1$ Punkte entsprechen. Jeden dieser Punkte verbinden wir mit P . Dadurch haben wir dem beliebig

*) Hierbei sei erwähnt, dass gegen den ersten von den 7 Beweisen, welche Lindemann in seinen Vorles. v. Clebsch anführt (pag. 681 bis 685), der Umstand spricht, dass die Correspondenzen, welche zu der Relation für x - x' -deutig auf einander bezogenen Plancurven (pag. 459) führen, illusorisch werden, sobald x und x' kleiner als 2 sind.

gewählten Strahle durch P $n \cdot (n' - 1)$ andere Strahlen durch P zugeordnet. Umgekehrt entsprechen einem dieser Strahlen auch $n \cdot (n' - 1)$ Strahlen von der ersten Sorte. Es giebt also durch P

$$2 \cdot n \cdot (n' - 1)$$

Coincidenzstrahlen. Zu diesen gehört aber erstens jeder der gesuchten V Strahlen zweimal, zweitens jeder der r' Strahlen, welche zu den r' Punkten gehen, die den Berührungspunkten der von P' an C' gelegten Tangenten entsprechen, drittens jeder der α' Strahlen, welche zu den α' Punkten gehen, die den auf C' gelegenen Rückkehrpunkten entsprechen. Die auf C' gelegenen Doppelpunkte mit verschiedenen Tangenten geben zu Coincidenzstrahlen keine Veranlassung, weil jedem von ihnen zwei *nicht unendlich nahe* Punkte auf C' entsprechen. Also ist:

$$(1) \quad 2 \cdot V = 2 \cdot n \cdot (n' - 1) - r' - \alpha'.$$

Wiederholt man nun die eben angestellte Betrachtung, indem man nur die gestrichelten Buchstaben in nichtgestrichelte und umgekehrt verwandelt, so bekommt man eine zweite Gleichung für die gesuchte Zahl V , nämlich:

$$(2) \quad 2 \cdot V = 2 \cdot n' \cdot (n - 1) - r - \alpha.$$

Die Vergleichung von (1) und (2) ergibt eine Relation zwischen $n, r, \alpha, n', r', \alpha'$, welche in folgender Form geschrieben werden kann:

$$(3) \quad r + \alpha - 2 \cdot n + 2 = r' + \alpha' - 2 \cdot n' + 2.$$

Da die linke Seite dieser Gleichung das doppelte Geschlecht $2 \cdot p$ der Curve C , die rechte Seite das doppelte Geschlecht $2 \cdot p'$ der Curve C' darstellt, so ist der Riemann'sche Satz bewiesen.

Für V ergibt sich nach Einführung der Geschlechtzahl p aus (1) und aus (2):

$$(4) \quad V = (n - 1) \cdot (n' - 1) - p.$$

Mit Hilfe der Zahl V kann man leicht die Zahl D der Strahlen bestimmen, welche die Curven C und C' in *zwei* Paaren von entsprechenden Punkten schneiden. Ordnet man nämlich je zwei Strahlen einander zu, von denen der eine aus C zwei Punkte ausschneidet, welche zweien von den n' Schnittpunkten der Curve C' mit dem anderen Strahle entsprechen, und wendet man dann auf das so definirte zweistufige System von Strahlenpaaren die Strahlenpaarformeln für eine feste Ebene (cf. des Verfassers Kalkül d. abz. Geom. § 15, F. 37) an, so erhält man für die gesuchte Zahl D :

$$(5) \quad D = \frac{1}{2} n(n - 1) + \frac{1}{2} n'(n' - 1) + V$$

oder, mit Benutzung von (4):

$$(6) \quad D = \frac{1}{2} (n + n' - 1) (n + n' - 2) - p.$$

Die durch die Zahl D zusammengefassten Geraden sind aber nichts anderes, als die Doppeltangenten der von den Verbindungslinien entsprechender Punkte eingehüllten Curve. Für den Rang R dieser Curve erhält man ohne Weiteres aus dem Correspondenzprincip den Werth $n + n'$, also für ihr Geschlecht Π

$$\Pi = \frac{1}{2} (n + n' - 1) \cdot (n + n' - 2) - D$$

oder, mit Benutzung von (6):

$$(7) \quad \Pi = p.$$

Dieses Resultat konnte vorausgesehen werden, da die Curve, welche durch die Verbindungslinien entsprechender Punkte der Curven C und C' erzeugt wird, auf jede dieser Curven ein-eindeutig bezogen ist.

Die voranstehenden Erörterungen lassen sich ohne Schwierigkeit auf den allgemeinen Fall übertragen, wo die Punkte und Tangenten der gegebenen Plancurven x - x' -deutig auf einander bezogen sind. Dann treten in die Formeln ausser x und x' noch die Zahlen y und y' , welche für die Curve C , resp. C' angeben, wie oft von den x resp. x' Punkten, die einem und demselben Punkte der anderen Curve entsprechen, zwei unendlich nahe rücken. (Cf. Lindemanns Vorl. v. Clebsch, pag. 459.)

Hamburg, 9. October 1879.