8. *Neue Deutung der magnetischen Drehung der Polarisationssebene; von R. Reiff.*

1. Seit der Zeit der Entdeckung der magnetischen Drehung der Polarisationssebene ist eine Reihe von Versuchen gemacht worden, eine vollständige Theorie dieser Erscheinung aufzustellen. Keiner von ihnen befriedigt jedoch ganz, sofern sie eben Annahmen zu Hülfe nehmen müssen, die selbst wieder sehr der Erklärung bedürftig sind; so namentlich die Rowland'sche, welche eine rotatorische electromotorische Kraft annimmt. Im Folgenden soll nun eine Deutung gerade der Rowland'schen Annahme gegeben werden, welche sich durch grosse Einfachheit auszeichnet. Diese Deutung nehmen wir aus der Helmholtz'schen Hypothese vom Mitschwingen der Atome bei den Lichtbewegungen. Helmholtz nimmt bei seiner electromagnetischen Theorie der Farbenzerstreuung an, dass die Atome des Molecüls um den Schwerpunkt desselben Schwingungen ausführen; dabei setzt er der Einfachheit halber voraus, dass die Geschwindigkeiten der Atome eines bipolaren Molecüls einander entgegengesetzt gleich seien.

Wenn man aber bedenkt, dass auf die Atome eines Molecüls ausser den äusseren electrischen Kräften und den inneren des Molecüls selbst auch noch die Kräfte der umgebenden Molecüle wirken, welche wegen des verschiedenen Verhaltens der Stoffe gegen positive und negative Electricität auch verschiedener Art sein müssen, so ist es wahrscheinlicher, dass die Atome eines Molecüls selbst wieder *verschiedene* Geschwindigkeiten haben. Bezeichnen wir die Componenten dieser Geschwindigkeiten nach der x -Axe mit α_1 und α_2 (wobei α_1 und α_2 verschiedenes Vorzeichen haben), so können wir setzen:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha + \alpha' \\ \alpha_2 &= \alpha - \alpha',\end{aligned}$$

sodass also $\alpha_1 + \alpha_2 = 2\alpha$ ist. Dann bewegt sich also das Molecül mit der Geschwindigkeit α als ganzes und die relativen Geschwindigkeiten der Atome sind α' und $-\alpha'$. Ist σ_1

die electriche Dichtigkeit der positiven Atome, σ_2 die electriche Dichtigkeit der negativen Atome, so ist die x -Componente des von der Bewegung der Atome herrührenden „Verschiebungsstromes“:

$$\alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_2 = \alpha (\sigma_1 + \sigma_2) + \alpha' (\sigma_1 - \sigma_2),$$

und da für ein bipolares neutrales Molecül $\sigma_1 = -\sigma_2 = \sigma/2$ ist, wenn σ die absolute electriche Dichte des Stoffes ist, so folgt für die Componente des Verschiebungsstromes

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \alpha' \sigma.$$

Das ist aber die Veränderung der electriche Polarisation in der Zeiteinheit, wenn wir ein Dielectricum zu Grunde legen.

Kann man zeigen, dass α klein ist gegen α' , so kommt man zu den Helmholtz'schen Gleichungen. Das wird sich in der That ergeben. Nehmen wir dieses Resultat vorweg, so ergibt sich, dass unsere Annahme in Wirklichkeit keine Veränderung der Helmholtz'schen Theorie der Farbenzerstreuung bildet, sondern lediglich eine folgerichtige Ausbildung derselben.

2. Nach dieser Voraussetzung, dass das Molecül als ganzes mit der Geschwindigkeit α hin und her schwingt, geräth also das ganze Dielectricum in einen Schwingungszustand. Man hätte demnach statt der gemeinen Gleichungen der Electricität für ruhende Körper die Gleichungen für bewegte Körper in der Optik zu benutzen. Nun ist aber erfahrungsgemäss der Satz der Gleichungen für ruhende Körper hinreichend, um die Bewegung des Lichtes im Dielectricum darzustellen, wenn keine anderen Einwirkungen auf das Dielectricum vorhanden sind. Es sind also diejenigen Glieder der Gleichungen, welche die Producte der Geschwindigkeiten und der von der Lichtbewegung herrührenden electriche und magnetischen Polarisationen enthalten, in diesem Falle zu vernachlässigen.

Anders dagegen wird die Sache, wenn auf das Dielectricum von aussen her eine starke magnetische Kraft wirkt. Dann lässt sich schon von vornherein auch ohne Rechnung die Folge dieser Einwirkung übersehen. Wir wollen zu dem Zwecke annehmen, das Dielectricum schwinde längs der x -Axe hin und her, die magnetische Kraft wirke in der Richtung der

+ z -Axe. Geht dann das Dielectricum in Richtung der + x -Axe, so wird unter dem Einfluss der magnetischen Kraft eine electromotorische Kraft nach der + y -Richtung im Dielectricum erzeugt unter Annahme eines links drehenden Coordinatensystems (wie bei Hertz); geht das Dielectricum in der Richtung der - x -Axe, so wird durch die magnetische Kraft eine electromotorische Kraft in der - y -Richtung erzeugt. Wirkt nun zu gleicher Zeit in der Richtung der x -Axe eine electromotorische Kraft mit derselben Schwingungszahl, wie die des Körpers ist, so setzen sich die beiden electromotorischen Kräfte zu einer zusammen, deren Richtung zwischen die x - und y -Axen fällt, man erhält also eine Drehung der Richtung der im Dielectricum wirkenden electricischen Kraft, d. h. im Falle der Lichtbewegung die Drehung der Polarisationssebene.

3. Nach unserer Annahme bedingen die electricischen Schwingungen des Lichtes zugleich auch körperliche Schwingungen der Moleküle. Die Geschwindigkeiten der letzteren hängen ab von den Geschwindigkeiten der electricischen Polarisationen; es ist aber auch möglich, dass neben den ersten Differentialquotienten auch noch die höheren eingehen¹⁾; wir haben also im allgemeinen:

$$(1) \quad \begin{cases} \alpha = f_1 \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} \dots \right), \\ \beta = f_2 \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} \dots \right), \\ \gamma = f_3 \left(\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}, \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} \dots \right). \end{cases}$$

Die einfachste Annahme, die wir machen können und welche mit der Helmholtz'schen übereinstimmt, ist die, dass α eine lineare Function von $\partial \mathfrak{X} / \partial t$ und seiner Differentialquotienten ist, dass also

$$(2) \quad \alpha = f \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + g \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} + h \frac{\partial^3 \mathfrak{X}}{\partial t^3} \dots$$

Sind die Coefficienten der geraden Differentialquotienten von $\mathfrak{X}$ nicht Null, so tritt Dämpfung und Phasenverschiebung ein. Wollen wir Dämpfung ausschliessen, so ist die Phasenverschiebung 0 oder 180°.

1) Vgl. hierzu H. Ebert, Wied. Ann. 48. p. 1. 1893; R. Reiff, Wied. Ann. 55. p. 82. 1895.

Wir wollen im Folgenden ein nicht absorbirendes Dielectricum betrachten, haben also den letzten Fall allein zu betrachten und setzen:

$$(3) \quad \alpha = f_1 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \quad \beta = f_2 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t}, \quad \gamma = f_3 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t},$$

wobei f_1, f_2, f_3 noch Functionen des Quadrates der Schwingungszahlen sein können. Ist der Körper isotrop, so wird noch $f_1 = f_2 = f_3 = f$ sein.

4. Wir nehmen im Folgenden an, dass ein Dielectricum unter dem Einfluss einer constanten magnetischen Kraft stehe. Die Componenten der magnetischen Polarisation, die von dieser Kraft herrührt, heissen wir $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0$. Durch das Dielectricum pflanzt sich eine Lichtbewegung fort, deren electricische Polarisation wir mit $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$, deren magnetische Polarisation wir mit $\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ bezeichnen, sodass also die Componenten der gesammten magnetischen Polarisation sind:

$$(4) \quad \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}_0 + \mathfrak{L} \text{ etc.}$$

Nach unserer Annahme befinden sich die Theilchen des Dielectricums in einem Schwingungszustande, dessen Geschwindigkeitscomponenten durch die Gleichungen (3) dargestellt sind.

Wir haben also jetzt statt der Gleichungen für ruhende Körper diejenigen für bewegte Körper zu benutzen. Dieselben lauten in der Hertz'schen Form¹⁾:

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} & A \left\{ \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{X} \beta - \mathfrak{Y} \alpha) - \frac{\partial}{\partial x} (\mathfrak{Z} \alpha - \mathfrak{X} \gamma) \right\} \\ & \quad = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{M}_1}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{N}_1}{\mu}, \\ & A \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} (\mathfrak{L}_1 \beta - \mathfrak{M}_1 \alpha) - \frac{\partial}{\partial x} \mathfrak{N}_1 \alpha - \mathfrak{L}_1 \gamma \right\} \\ & \quad = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon}, \end{aligned} \right.$$

wo ε die Dielectricitätsconstante, μ die Permeabilität des betreffenden Mediums ist, und:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}, \\ 0 &= \frac{\partial \mathfrak{L}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}_1}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

1) H. v. Hertz, Ges. Werke 2. p. 256.

Setzen wir hierin die Werthe von α , β , γ ein und beachten, dass die Gleichung für $\mathfrak{L}_0 = 0$, $\mathfrak{M}_0 = 0$, $\mathfrak{N}_0 = 0$ sich auf die gewöhnlichen Gleichungen für die Bewegung des Lichtes reduciren müssen, dass wir also die Differentialquotienten der Producte der α mit den Polarisationen, die von der Lichtbewegung herrühren, vernachlässigen müssen, so folgen, wenn wir schreiben:

$$(6) \quad Af\mathfrak{L}_0 = p, \quad Af\mathfrak{M}_0 = q, \quad Af\mathfrak{N}_0 = r$$

die Gleichungen für die Lichtbewegung unter dem Einfluss äusserer constanter magnetischer Kräfte:

$$(7) \quad \begin{cases} A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{\mathfrak{M}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{N}}{\mu}, \\ A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{N}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{\mathfrak{L}}{\mu}, \\ A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{L}}{\mu} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{M}}{\mu} \end{cases}$$

und

$$(8) \quad \begin{cases} A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial y} \left(q \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - p \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \right) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial \pi} \left(p \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - r \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \right), \\ A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \pi} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial \pi} \left(r \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - q \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial x} \left(q \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - p \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \right), \\ A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - r \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} \right) \\ \quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(r \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - q \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} \right); \end{cases}$$

das sind aber die Rowland'schen Gleichungen. Die Bewegung findet also so statt, als ob die electromotorischen Kräfte

$$(9) \quad \begin{cases} X_1 = \frac{\mathfrak{X}}{\varepsilon} + r \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} - q \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t}, \\ Y_1 = \frac{\mathfrak{Y}}{\varepsilon} + p \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} - r \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t}, \\ Z_1 = \frac{\mathfrak{Z}}{\varepsilon} + q \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} - p \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} \end{cases}$$

wirksam wären.

Man gelangt also in sehr einfacher Weise zu jenen rotatorischen electromotorischen Kräften Rowland's.

Nimmt man $\Omega_3 = 0$, $\mathfrak{M}_0 = 0$ und lässt eine ebene Welle nach der Z -Axe ablaufen, so erhält man aus (7) und (8):

$$(10) \quad \begin{cases} A^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\mathfrak{X}}{2\mu} + \frac{r}{\mu} \frac{\partial^3 \mathfrak{Y}}{\partial x^2 \partial t}, \\ A^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\mathfrak{Y}}{2\mu} - \frac{r}{\mu} \frac{\partial^3 \mathfrak{X}}{\partial x^2 \partial t}. \end{cases}$$

Setzt man hierin

$$\mathfrak{X} = B \cos (n t - l z) \cos \varrho z,$$

$$\mathfrak{Y} = B \cos (n t - l z) \sin \varrho z,$$

wo $n = 2\pi/\tau$, $l = 2\pi/\lambda$, τ die Schwingungsdauer, λ die Wellenlänge im Dielectricum ist, so findet man nach einiger Rechnung:

$$(11) \quad \varrho = \frac{2\pi^2 i^3}{\lambda_0^3} f N.$$

Dabei ist N die magnetische Kraft, λ_0 die Wellenlänge im Vacuum für die Schwingungsdauer τ , i der entsprechende Brechungsindex. f selbst ist nach dem, was wir oben gesagt haben, eine quadratische Function der Schwingungsdauer. Man hat also in zweiter Annäherung zu setzen:

$$f = f_0 (1 - g_0 n^2)$$

und erhält

$$(12) \quad \varrho = \frac{2\pi^2 i^3}{\lambda_0^3} N f_0 (1 - g_0 n^2).$$

Ein Ausdruck, der also zwei noch zu bestimmende Constanten enthält.

Um ein Maass für die Grösse von f zu bekommen, berechnen wir f für Schwefelkohlenstoff und Natriumlicht. Dann liefert der Werth von ϱ für $N=1$ wegen der Wahl des Coordinatensystems

$$\varrho_0 = -1,16 \cdot 10^{-5},$$

$$f = -5,18 \cdot 10^{-16}.$$

Nach Helmholtz¹⁾ ist die relative Geschwindigkeit der Atome α' bestimmt durch

$$\alpha' \sigma = \frac{x-1}{4\pi} \frac{\partial X}{\partial t}.$$

1) H. v. Helmholtz, Wied. Ann. 48. p. 389. 1893.

Nach unserer Formel ist

$$\alpha = f \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{x}{4\pi} f \frac{\partial X}{\partial t}$$

X gemessen in electrostatischem Maasse. Nun ist für Schwefelkohlenstoff in electrostatischem Maasse

$$\sigma = 3,81 \cdot 10^{13}, \quad x = 2,642,$$

wenn wir, wie wir hier thun müssen, für x das Quadrat des Brechungsindex einsetzen. Man erhält also

$$\alpha : \alpha' = 3,17 \cdot 10^{-2},$$

d. h. α ist ungefähr dreissigmal kleiner als α' , womit wenigstens für CS_2 die Richtigkeit der Behauptung erwiesen ist, dass man α gegen α' vernachlässigen kann. Es kann aber auf dieselbe Weise gezeigt werden, dass die übrigen Dielectrika sich ebenso verhalten.

5. Die Entscheidung, unter welchen Umständen die Körper positive¹⁾ oder negative Drehung zeigen, ist in unserer Theorie darauf zurückgeführt, dass Molecüle, deren negativer Bestandtheil grössere Geschwindigkeit als der positive besitzt, positive Drehung zeigen (vgl. oben p. 283) und umgekehrt. Nun zeigen die meisten Stoffe positive Drehung, doch gibt es auch solche mit negativem Drehvermögen: Fe-Salze und TiCl_2 .²⁾ Danach besitzen in diesen die Fe- und Ti-Atome grössere Geschwindigkeiten, als die negativen Molecülreste. Trotzdem kann aber sehr wohl das Eisenmolecül als solches positive Drehung zeigen, da damit nur gesagt ist, dass der positive Bestandtheil des Eisenmolecüls kleinere Geschwindigkeit besitzt als der negative.

Es ist übrigens zu beachten, dass die Geschwindigkeiten der Molecüle nicht nur von der Natur der Molecüle selbst abhängen, sondern auch von der Natur der Umgebung. Demnach wird also bei gelösten Salzen die Dissociation ebenfalls eine Rolle spielen, sodass wir auf solche Gemische nicht ohne weiteres die Gleichungen für Dielectrica anwenden können. Es legen sich eben zwei Bewegungen übereinander, die Bewegung der freien und der gebundenen Ionen.

1) d. h. Drehung im Sinne der Ampèreströme.

2] G. Wiedemann, *El.* 3. p. 1065. 1895.

6. Wenn sich die Ionen unter dem Einfluss eines Potentialgefälles X ($g^{1/2}$ cm^{1/2}/sec) in Richtung der X -Axe bewegen, und zwar die positiven Ionen mit der Geschwindigkeit

$$\alpha' = \frac{u}{A} X$$

die negativen mit der Geschwindigkeit

$$\alpha'' = -\frac{v}{A} X,$$

sodass man also schreiben kann:

$$\alpha' = \frac{u-v}{2A} X + \frac{u+v}{2A} X,$$

$$\alpha'' = \frac{u-v}{2A} X - \frac{u+v}{2A} X,$$

so bewegen sich die Molecüle als Ganzes mit der Geschwindigkeit

$$\alpha = \frac{u-v}{2A} X$$

und die relativen Geschwindigkeiten der Ionen gegen die Molecüle sind dann $(u+v)X/2A$ und $-(u+v)X/2A$. Wirkt nun in Richtung der Z -Axe eine magnetische Polarisation $\mathfrak{N}_1$ in den Ionen, so entsteht infolge der Bewegung in Richtung der Y -Axe ein Potentialgefälle

$$(13) \quad \frac{u-v}{2} X \mathfrak{N}_1,$$

wie man aus den Gleichungen (5) ersehen kann, d. h. es entsteht ein Halleffect und dieser Halleffect lagert sich über die von Bewegung des Dielectricums (d. h. des Lösungsmittels und der nicht dissociirten Molecüle des gelösten Stoffes) herührende electromotorische Kraft, sodass man also als gesamtes transversales Potentialgefälle hat

$$(14) \quad \frac{u-v}{2} X \mathfrak{N}_1 + Af \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \mathfrak{N},$$

und dieses wäre dann für ein solches Gemisch, d. h. für eine Lösung von Metallsalzen in die Gleichungen der Electricität einzuführen.

7. Aus der Gleichung

$$(15) \quad \alpha = \frac{\pi}{4\pi} f \frac{dX}{dt}$$

erhält man durch Integration die Verschiebung ξ des Molecüls aus der Gleichgewichtslage

$$(16) \quad \xi = \frac{\pi}{4\pi} f X.$$

Nehmen wir einen eben polarisirten Lichtstrahl von der Intensität des Sonnenlichtes, so ist in

$$X = B \cdot \sin nt$$

$B = \frac{1}{30} g^{1/2} \text{ cm}^{1/2} \text{ sec}^{-1}$ ($= 10 \text{ Volt}$) zu setzen; n ist für Natriumlicht $= 3,5 \cdot 10^{15}$ und wir erhalten die maximale Verschiebung der Molecüle in CS_2 für einen eben polarisirten Lichtstrahl von der Intensität des Sonnenlichtes die maximale Verschiebung

$$(17) \quad \xi_0 = 3,63 \cdot 10^{-18} \text{ cm},$$

die maximale Geschwindigkeit

$$(18) \quad \alpha_0 = 1,27 \cdot 10^{-2} \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

die Wellenlänge des gelben Lichtes in S_2C ist

$$\lambda = 3,628 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$$

und daher ergibt sich für die „moleculare Welle“, d. h. für die Wellenbewegung der Molecüle, das Verhältniss

$$\frac{\xi_0}{\lambda} = 1 \cdot 10^{-13}.$$

Bilden wir also die Wellenlänge etwa auf die Länge des Erdquadranten (10^9 cm ab, so ist die Amplitude in der Grösse 10^{-4} cm darzustellen.

Heilbronn, 11. Nov. 1895.