ASTRONOMISCHE NACHRICHTEN.

Nº 3043.

Ueber wahrscheinlichste Fehlervertheilungen.

Von R. Lehmann-Filhés.

Alle Untersuchungen über die Vertheilungen von Beobachtungsfehlern innerhalb bestimmter Grenzen führen naturgemäss zu der Frage, wie diese Vertheilung unter Annahme eines bestimmten Wahrscheinlichkeitsgesetzes für die Fehlerhäufigkeit ausfallen würde. Bei Beantwortung dieser Frage wird nur zu leicht übersehen, dass unter Voraussetzung irgend eines Wahrscheinlichkeitsgesetzes sehr viele Vertheilungen möglich, wenn auch nicht gleich wahrscheinlich sind, dass es sich also vor allen Dingen darum handelt, unter allen jenen Vertheilungen die wahrscheinlichste herauszusuchen, deren Eintreten aber keineswegs als selbstverständlich erwartet werden darf.

Im Folgenden soll diese wahrscheinlichste Vertheilung nebst den Gewichten und mittleren Fehlern der sie darstellenden Zahlen näher untersucht werden.

Bei Bestimmung der theoretisch zu erwartenden Fehlervertheilung wird durchweg ein ziemlich unzulängliches Verfahren in Anwendung gebracht, welches sich allerdings durch seine Einfachheit, aber nicht durch die Richtigkeit seiner Resultate empfiehlt: Man multiplicirt nämlich die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler innerhalb gewisser Grenzen fällt, mit der Gesamtzahl aller Fehler und nimmt das Product als die Anzahl der zwischen jene Grenzen fallenden Fehler an, unbekümmert darum, dass jenes Product im Allgemeinen eine gebrochene Zahl ist, während die gesuchte Anzahl doch nothwendig eine ganze Zahl sein muss.

Das Auskunftsmittel, statt der berechneten gebrochenen jedesmal die nächstliegende ganze Zahl zu nehmen, ist nicht ausreichend, wie leicht aus folgendem Zahlenbeispiel ersehen werden kann: Für die bekannten 300 Bradley'schen Declinationsbestimmungen, die Bessel in den Fundamenta Astronomiae mittheilt, hat man unter Annahme eines mittleren Fehlers = 1".45 und unter Zugrundelegung des Gauss'schen Fehlergesetzes, auf dessen Gültigkeit es übrigens in der folgenden Untersuchung gar nicht ankommt, folgende theoretische Vertheilung:

Fehlergrenzen	Anzahl nach der Gauss'schen Formel	Nächstliegende ganze Zahlen
0".0 – 0".4	65.08	65
0.4 – 0.8	60.35	60
0.8 – 1.2	51.91	52
1.2 – 1.6	41.41	41
1.6 – 2.0	30.65	31

Fehlergrenzen	Anzahl nach der Gauss'schen Formel	Nächstliegende ganze Zahlen
2".0 – 2".4	21.03	21
2.4 – 2.8	13.38	13
2.8 – 3.2	7.90	8
3.2 – 3.6	4.31	4
3.6 – 4.0	2.20	2
4.0 – ∞	1.78	2
Summe:	300.00	299

Die nach dem oben angeführten Princip abgekürzten Zahlen haben also nicht, wie erforderlich, die Summe 300, sondern 299, d. h. man hat in der That nur 299 Fehler vertheilt. Es ist nicht schwer, Beispiele zu finden, in welchen dieser Uebelstand noch viel entschiedener hervortritt; man kann z. B. die Fehlergrenzen so wählen, dass die nach obiger Methode bestimmten ganzen Zahlen = 0 sind.

Nach dieser Erörterung ergibt sich die Nothwendigkeit, die Fehlervertheilung, wenn überhaupt das Gesetz der Fehlerwahrscheinlichkeit als bekannt angesehen werden darf, auf eine andere Weise zu untersuchen, die allerdings complicirter als die bisher übliche sein wird. Die Lösung dieser Aufgabe ist der Hauptzweck der folgenden Zeilen. Vorgreifend mag gleich hier bemerkt werden, dass unter Umständen die Aufgabe mehr als eine Lösung haben kann, d. h. dass mehrere Vertheilungen von gleicher maximaler Wahrscheinlichkeit möglich sein können.

Es seien n gleichartige Elemente gegeben, welche regellos so vertheilt werden sollen, dass jedes von ihnen in eine von k Abtheilungen oder Classen $A_1, A_2, \dots, A_k$ fallen muss. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein vereinzelt gedachtes Element in die Classe A_i fällt, sei bekannt = w_i . Es fragt sich nun, welche von allen möglichen Vertheilungen der n Elemente die wahrscheinlichste ist. Nehmen wir an, in die Classen $A_1, A_2, \dots, A_k$ fielen resp. $n_1, n_2, \dots, n_k$ Elemente. Die Wahrscheinlichkeit dieser Vertheilung ist offenbar proportional $w_1^{n_1} \cdot w_2^{n_2} \cdot \dots \cdot w_k^{n_k}$. Jedoch stellt dieser Ausdruck unmittelbar nur die Wahrscheinlichkeit dar, dass n_1 bestimmte Elemente in die Classe A_1 , n_2 bestimmte Elemente in die Classe A_2 , u. s. w. fallen. Vertheilungen mit den genannten Classenzahlen $n_1, n_2, \dots, n_k$ giebt es aber so viele, als sich die n Elemente permutiren lassen, wobei jedoch alle Permutationsformen, die sich nur durch die gegenseitige Stellung der in dieselbe Classe

fallenden Elemente unterscheiden, als identisch anzusehen sind. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass überhaupt in die Classen $A_1, A_2, \dots, A_k$ resp. $n_1, n_2, \dots, n_k$ Elemente fallen, gleich

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!} \cdot w_1^{n_1} \cdot w_2^{n_2} \dots w_k^{n_k} \quad (1)$$

wobei

$$w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1 \quad (2)$$

und $n_1, n_2, \dots, n_k$ alle positiven ganzzahligen Werthe annehmen können, welche der Relation

$$n_1 + n_2 + \dots + n_k = n \quad (3)$$

genügen.

Will man nun die wahrscheinlichste Vertheilung der Elemente kennen lernen, so sind den soeben angeführten

$$\frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_i! \dots n_k!} w_1^{n_1} w_2^{n_2} \dots w_i^{n_i} \dots w_k^{n_k} > \frac{n!}{(n_1 \pm 1)! n_2! \dots (n_i \mp 1)! \dots n_k!} w_1^{n_1 \pm 1} w_2^{n_2} \dots w_i^{n_i \mp 1} \dots w_k^{n_k}.$$

Für das obere Vorzeichen erhält man

$$\frac{w_1}{w_i} < \frac{n_i + 1}{n_i},$$

für das untere dagegen

$$\frac{w_1}{w_i} > \frac{n_i}{n_i + 1}.$$

Beachten wir, dass wir statt des Index i irgend einen anderen wählen können, so erhalten wir

$$\left. \begin{aligned} \frac{n_1 + 1}{n_i} &> \frac{w_1}{w_i} > \frac{n_1}{n_i + 1} \\ \frac{n_2 + 1}{n_i} &> \frac{w_2}{w_i} > \frac{n_2}{n_i + 1} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{n_i + 1}{n_i} &> \frac{w_i}{w_i} > \frac{n_i}{n_i + 1} \\ &\dots \dots \dots \\ \frac{n_k + 1}{n_i} &> \frac{w_k}{w_i} > \frac{n_k}{n_i + 1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Da i jede beliebige ganze Zahl von 1 bis k ist, so hat man offenbar ganz allgemein, wenn p und q gleichfalls irgend welche ganze Zahlen von 1 bis k sind:

$$\frac{n_p + 1}{q} > \frac{w_p}{w_q} > \frac{n_p}{q + 1} \quad (5)$$

Die Relation (5) umfasst im Ganzen $\frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}$ von einander unabhängige Fälle.

Die Addition der Ungleichheiten (4) ergibt mit Rücksicht auf (2) und (3)

Bedingungen gemäss die ganzen positiven Zahlen $n_1, n_2, \dots, n_k$ so zu bestimmen, dass der Ausdruck (1) ein Maximum wird.

Da obiger Ausdruck nichts Anderes ist als das allgemeine Glied der Entwicklung des Polynoms

$$(w_1 + w_2 + \dots + w_k)^n,$$

so können wir das erlangte Resultat auch dahin aussprechen, dass die Classenzahlen der gesuchten wahrscheinlichsten Vertheilung gleich den Exponenten des grössten Gliedes der Entwicklung des Polynoms $(w_1 + w_2 + \dots + w_k)^n$ sind.

Wir haben jetzt die Maximalbedingungen aufzusuchen. Soll der Ausdruck (1) ein Maximum sein, so muss er jedenfalls verkleinert werden, wenn man eine beliebige Classenzahl um 1 erhöht und dafür eine andere um 1 erniedrigt, da ja nach (3) die Summe aller Classenzahlen keine Aenderung erfahren darf. Es muss z. B. sein

$$\frac{n + k}{n_i} > \frac{1}{w_i} > \frac{n}{n_i + 1},$$

oder

$$nw_i - 1 < n_i < (n + k) w_i \quad (6)$$

woraus k Fälle hervorgehen, indem i alle ganzzahligen Werthe von 1 bis k annimmt.

Die Grenzbestimmungen (6) können jedoch nicht die Bedingungen (5) ersetzen; sie dienen vielmehr nur dazu, in bequemer Weise vorläufige Grenzen für $n_1, n_2, \dots, n_k$ zu bestimmen, wobei man übrigens für einige dieser Zahlen meist schon definitive Werthe erhalten wird, was sehr nützlich ist. Hiernach wird man an die unter Umständen allerdings etwas weitläufige Arbeit gehen, durch Versuche diejenigen Werthe der Classenzahlen zu bestimmen, welche allen Bedingungen (5) genügen. Es ist nicht ausgeschlossen, dass in der Entwicklung von $(w_1 + w_2 + \dots + w_k)^n$ mehrere Maximalglieder von gleichem Werthe auftreten, wie es z. B. für das Polynom

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^4$$

der Fall ist, in welchem

$$w_1 = \frac{1}{2}, w_2 = \frac{1}{3}, w_3 = \frac{1}{6}, n = 4, k = 3$$

ist; denn hier sind die wahrscheinlichsten und zugleich gleich wahrscheinlichen Vertheilungen die folgenden

$$(I) \quad n_1 = 3, n_2 = 1, n_3 = 0$$

$$(II) \quad n_1 = 2, n_2 = 2, n_3 = 0$$

$$(III) \quad n_1 = 2, n_2 = 1, n_3 = 1.$$

Allen dreien entspricht dieselbe Maximalwahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$.

Einer besonderen eingehenden Behandlung bedürfen derartige Fälle nicht, da sie sich stets leicht erledigen lassen.

Sind alle Bedingungen (5) erfüllt, so ist (1) ein Maximum, wie sogleich gezeigt werden soll. Es seien $a, b, c, \dots$, $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ ganze positive Zahlen von der Art, dass

$$a + b + c + \dots = \alpha + \beta + \gamma + \dots \quad (7)$$

Aus (5) folgt mit Leichtigkeit:

$$\frac{(n_p + 1)^a \cdot (n_r + 1)^b \cdot (n_t + 1)^c \dots}{n_q^a \cdot n_s^b \cdot n_u^c \dots} > \frac{w_p^a \cdot w_r^b \cdot w_t^c \dots}{w_q^a \cdot w_s^b \cdot w_u^c \dots} > \frac{n_p^a \cdot n_r^b \cdot n_t^c \dots}{(n_q + 1)^a \cdot (n_s + 1)^b \cdot (n_u + 1)^c \dots} \quad (8)$$

Soll nun der Ausdruck (1) eine Verkleinerung erfahren, wenn man die Classenzahlen ändert, also

$$\left. \begin{array}{l} n_q \text{ in } n_q + a \\ n_s > n_s + b \\ n_u > n_u + c \\ \dots \dots \dots \text{ und mit Rücksicht auf (3) und (7) } \dots \dots \dots \end{array} \right\} \quad (9)$$

übergehen lässt, so ergibt sich aus den beiden in Frage kommenden Werthen des Ausdrucks (1)

$$\frac{w_p^a \cdot w_r^b \cdot w_t^c \dots}{w_q^a \cdot w_s^b \cdot w_u^c \dots} > \frac{[(n_p - \alpha + 1)(n_p - \alpha + 2) \dots n_p] \cdot [(n_r - \beta + 1)(n_r - \beta + 2) \dots n_r] \cdot [(n_t - \gamma + 1)(n_t - \gamma + 2) \dots n_t] \dots}{[(n_q + 1)(n_q + 2) \dots (n_q + a)] \cdot [(n_s + 1)(n_s + 2) \dots (n_s + b)] \cdot [(n_u + 1)(n_u + 2) \dots (n_u + c)] \dots}$$

Da (8) erfüllt ist, so ist die vorstehende Ungleichheit offenbar a fortiori erfüllt; d. h.: wenn den Bedingungen (5) genügt ist, so ist der Ausdruck (1) in der That das gesuchte Maximum.

Die vorstehende Entwicklung ist offenbar auf die Fehlertheorie ohne Weiteres anwendbar, wenn man statt der Elemente die Fehler, statt der Classen $A_1, A_2, \dots, A_k$ die Intervalle nimmt, innerhalb welcher die Anzahlen der Fehler gesucht werden.

Wir wollen nun für das im Eingange dieser Untersuchung gegebene Zahlenbeispiel unter Zugrundelegung des Gauss'schen Gesetzes nach den hier erörterten Principien die wahrscheinlichste Fehlervertheilung suchen. Zunächst hat man für die bereits angegebenen 11 Classen:

$$\begin{array}{ll} w_1 = 0.21692 & w_7 = 0.04460 \\ w_2 = 0.20117 & w_8 = 0.02633 \\ w_3 = 0.17305 & w_9 = 0.01438 \\ w_4 = 0.13804 & w_{10} = 0.00733 \\ w_5 = 0.10216 & w_{11} = 0.00593 \\ w_6 = 0.07009 & \end{array}$$

Ferner ergibt sich nach (6), da hier $n = 300$, $k = 11$ ist

$$\begin{array}{llll} \frac{w_1}{w_9} = 1.078 & & & \\ \frac{w_1}{w_3} = 1.254 & \frac{w_2}{w_3} = 1.162 & & \\ \frac{w_1}{w_4} = 1.571 & \frac{w_2}{w_4} = 1.457 & \frac{w_3}{w_4} = 1.254 & \\ \frac{w_1}{w_5} = 2.123 & \frac{w_2}{w_5} = 1.969 & \frac{w_3}{w_5} = 1.694 & \frac{w_4}{w_5} = 1.351 \\ \frac{w_1}{w_6} = 3.095 & \frac{w_2}{w_6} = 2.870 & \frac{w_3}{w_6} = 2.469 & \frac{w_4}{w_6} = 1.969 \quad \frac{w_5}{w_6} = 1.458 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 64.08 < n_1 < 67.46 \\ 59.35 < n_2 < 62.56 \\ 50.91 < n_3 < 53.82 \\ 40.41 < n_4 < 42.93 \\ 29.65 < n_5 < 31.77 \\ 20.23 < n_6 < 21.80 \\ 12.38 < n_7 < 13.87 \\ 6.90 < n_8 < 8.19 \\ 3.31 < n_9 < 4.47 \\ 1.20 < n_{10} < 2.28 \\ 0.78 < n_{11} < 1.84 \end{array}$$

Hieraus findet man folgende vorläufige Möglichkeiten:

$$\begin{array}{ll} n_1 & 65, 66, 67 \\ n_2 & 60, 61, 62 \\ n_3 & 51, 52, 53 \\ n_4 & 41, 42 \\ n_5 & 30, 31 \\ n_6 & 21 \end{array} \quad \begin{array}{ll} n_7 & 13 \\ n_8 & 7, 8 \\ n_9 & 4 \\ n_{10} & 2 \\ n_{11} & 1 \end{array}$$

Für die Classenzahlen $n_6, n_7, n_8, n_{10}, n_{11}$ hat man also bereits definitive Werthe. Um die Kriterien (5) anzuwenden, bedürfen wir folgender Quotienten:

$\frac{w_1}{w_7} = 4.864$	$\frac{w_2}{w_7} = 4.511$	$\frac{w_3}{w_7} = 3.880$	$\frac{w_4}{w_7} = 3.095$	$\frac{w_5}{w_7} = 2.291$	$\frac{w_6}{w_7} = 1.572$	
$\frac{w_1}{w_8} = 8.239$	$\frac{w_2}{w_8} = 7.640$	$\frac{w_3}{w_8} = 6.572$	$\frac{w_4}{w_8} = 5.243$	$\frac{w_5}{w_8} = 3.880$	$\frac{w_6}{w_8} = 2.662$	$\frac{w_7}{w_8} = 1.694$
$\frac{w_1}{w_9} = 15.085$	$\frac{w_2}{w_9} = 13.989$	$\frac{w_3}{w_9} = 12.034$	$\frac{w_4}{w_9} = 9.599$	$\frac{w_5}{w_9} = 7.104$	$\frac{w_6}{w_9} = 4.874$	$\frac{w_7}{w_9} = 3.101$
						$\frac{w_8}{w_9} = 1.831$
$\frac{w_1}{w_{10}} = 29.594$	$\frac{w_2}{w_{10}} = 27.445$	$\frac{w_3}{w_{10}} = 23.608$	$\frac{w_4}{w_{10}} = 18.832$	$\frac{w_5}{w_{10}} = 13.937$	$\frac{w_6}{w_{10}} = 9.562$	$\frac{w_7}{w_{10}} = 6.085$
					$\frac{w_8}{w_{10}} = 3.592$	$\frac{w_9}{w_{10}} = 1.962$
$\frac{w_1}{w_{11}} = 36.581$	$\frac{w_2}{w_{11}} = 33.924$	$\frac{w_3}{w_{11}} = 29.182$	$\frac{w_4}{w_{11}} = 23.278$	$\frac{w_5}{w_{11}} = 17.228$	$\frac{w_6}{w_{11}} = 11.820$	$\frac{w_7}{w_{11}} = 7.521$
				$\frac{w_8}{w_{11}} = 4.440$	$\frac{w_9}{w_{11}} = 2.425$	$\frac{w_{10}}{w_{11}} = 1.236$

Mit Hülfe dieser Zahlen ergibt sich nach (5), dass folgende Zahlenverbindungen in der gesuchten Vertheilung nicht vorkommen dürfen:

$n_1 = 66$	in Verbindung mit	$n_2 = 60$	(10)
$n_1 = 65$	»	»	
$n_1 = 66$	»	»	
$n_1 = 67$	»	»	
$n_2 = 62$	»	»	
$n_2 = 60$	»	»	
$n_3 = 51$	»	»	
$n_3 = 53$	»	»	
$n_4 = 42$	»	»	
$n_5 = 30$	»	»	

Die letzte dieser Verbindungen würde z. B. ergeben:

$$\frac{n_5 + 1}{n_8} = \frac{31}{8} = 3.875 < \frac{w_5}{w_8},$$

während doch nach (5)

$$\frac{n_5 + 1}{n_8} > \frac{w_5}{w_8}$$

sein soll.

Da bereits die Classenzahlen $n_6, n_7, n_9, n_{10}, n_{11}$, deren Summe = 41 ist, definitiv bestimmt sind, so bleibt für die anderen noch unbekannten Zahlen die Summe 259 übrig. Aus diesen noch unbestimmten Classenzahlen lassen sich mit grösster Leichtigkeit 48 Systeme bilden, welche der

Raumersparniss wegen nicht hierher gesetzt werden sollen, von denen jedoch mit Rücksicht auf (10) 46 zu verwerfen sind, so dass nur die beiden folgenden Systeme übrig bleiben:

	I	II		I	II
n_1	65	66	n_7	13	13
n_2	61	61	n_8	8	8
n_3	52	52	n_9	4	4
n_4	42	41	n_{10}	2	2
n_5	31	31	n_{11}	1	1
n_6	21	21			

welche allen Anforderungen genügen. Der Umstand, dass wir zwei gleichwahrscheinliche wahrscheinlichste Vertheilungen erhalten, liegt an einem zufälligen Zahlenverhältniss; es ist nämlich

$$\frac{w_1^{65} \cdot w_4^{42}}{65! \cdot 42!} = \frac{w_1^{66} \cdot w_4^{41}}{66! \cdot 41!}, \text{ d. h.}$$

$$\frac{w_1}{w_4} = \frac{66}{42}.$$

Beide Brüche sind nämlich = 1.571429.

In vielen Fällen ist es von Wichtigkeit zu wissen, mit welcher Leichtigkeit die erfahrungsmässig bestimmten Classenzahlen von den hier berechneten abweichen können. Wir nennen $W_{(m)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass in die Classe A_i m Elemente fallen, wie auch in den übrigen Classen die Elemente vertheilt sein mögen. Offenbar ist

$$W_{(m)} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot w_i^m (1-w_i)^{n-m} = \binom{n}{m} w_i^m (1-w_i)^{n-m},$$

wenn

$$\binom{n}{m} = \binom{n}{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m}$$

gesetzt wird.

Wie bisher sei n_i diejenige Classenzahl, welche der wahrscheinlichsten Vertheilung entspricht, sodass $m - n_i$ die Abweichung oder gewissermassen den Fehler der zu A_i gehörigen Classenzahl m bedeutet. Lässt n_i mehrere Werthe zu, so kann man die Abweichungen auf jeden derselben beziehen.

Wir setzen nun

$$M_i^2 = \sum_{m=0}^{m=n} (m - n_i)^2 W_{(m)}$$

und nennen M_i den mittleren zu befürchtenden Fehler der für A_i geltenden Classenzahl. Mit Berücksichtigung der Identität

$$(m - n_i)^2 = m(m - 1) - (2n_i - 1)m + n_i^2$$

kann man auch schreiben

$$M_i^2 = \sum_{m=2}^{m=n} m(m - 1) W_{(m)} - (2n_i - 1) \sum_{m=1}^{m=n} m W_{(m)} + n_i^2 \sum_{m=0}^{m=n} W_{(m)}.$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned} \sum_{m=2}^{m=n} m(m - 1) W_{(m)} &= n(n - 1) w_i^2 \cdot \sum_{m=2}^{m=n} \binom{n-2}{m-2} w_i^{m-2} (1 - w_i)^{n-2-(m-2)} = n(n - 1) w_i^2 \\ \sum_{m=0}^{m=n} m W_{(m)} &= n w_i \cdot \sum_{m=1}^{m=n} \binom{n-1}{m-1} w_i^{m-1} (1 - w_i)^{n-1-(m-1)} = n w_i \\ \sum_{m=0}^{m=n} W_{(m)} &= 1, \end{aligned}$$

so dass

$$M_i^2 = n(n - 1) w_i^2 - (2n_i - 1) n w_i + n_i^2$$

oder

$$M_i^2 = (n w_i - n_i)^2 + n w_i (1 - w_i). \quad (11)$$

Aus (6) folgt

$$1 > n w_i - n_i > -k w_i,$$

d. h., jenachdem $n w_i - n_i$ positiv oder negativ ist, bleibt der absolute Werth dieser Grösse unterhalb 1 oder $k w_i$; jedenfalls ist also $(n w_i - n_i)^2$ kleiner als die grössere der beiden Grössen 1 und $k^2 w_i^2$. Wie gross also auch die Anzahl n der Beobachtungen werden mag, so wird doch das erste Glied der rechten Seite in der Gleichung (11) nie eine bestimmte Grenze überschreiten, die von der Anzahl der Beobachtungen ganz unabhängig ist. Daher wird für ein unbegrenzt wachsendes n , d. h. für unbegrenzte Vermehrung der Beobachtungen,

$$\lim \frac{M_i}{n_i} = \lim \sqrt{\frac{n w_i (1 - w_i)}{n_i^2}}.$$

Da aber nach (6)

$$\frac{n w_i (1 - w_i)}{(n + k)^2 w_i^2} < \frac{n w_i (1 - w_i)}{n_i^2} < \frac{n w_i (1 - w_i)}{(n w_i - 1)^2},$$

so ist

$$\lim \frac{n w_i (1 - w_i)}{n_i^2} = \frac{1 - w_i}{n w_i},$$

mithin

$$\lim \frac{M_i}{n_i} = \sqrt{\frac{1 - w_i}{n w_i}}. \quad (12)$$

Während also nach (11) der mittlere Fehler M_i nahezu proportional $\sqrt{n}$ wächst, wenn die Anzahl der Beobach-

tungen vermehrt wird, so nimmt doch sein Verhältniss zu der wahrscheinlichsten Classenzahl n_i zufolge (12) im Verhältniss $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ab.

Das Gewicht P_i der zu A_i gehörigen Classenzahl ist proportional $\frac{1}{M_i^2}$, d. h.

$$P_i \text{ prop. } \frac{1}{(n w_i - n_i)^2 + n w_i (1 - w_i)} \quad (13)$$

In den meisten Fällen wird es genügen, abgekürzt zu setzen

$$\left. \begin{aligned} M_i^2 &= n w_i (1 - w_i) \text{ oder auch } = \frac{n_i (n - n_i)}{n} \\ P_i \text{ prop. } &\frac{1}{w_i (1 - w_i)} \text{ oder auch prop. } \frac{1}{n_i (n - n_i)} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Nur wenn $n w_i (1 - w_i)$ ziemlich klein, d. h. von derselben Ordnung wie $(n w_i - n_i)^2$ ist, wird man die strengen Ausdrücke (11) und (13) benutzen. Aus den abgekürzten Ausdrücken (14) folgt, dass M_i mit w_i wächst, so lange $w_i < 1/2$ ist.

Wenn mehrere wahrscheinlichste Classenzahlen n_i möglich sind, so gehört natürlich jeder derselben ein besonderer Werth von M_i und P_i an. Diese Werthe werden aber, falls n beträchtlich ist, verhältnissmässig sehr wenig von einander abweichen, da ihr Unterschied nur von dem Gliede $(n w_i - n_i)^2$ herrührt, in welchem n_i verschiedene, jedoch unmittelbar benachbarte Werthe annimmt.

Zur bequemen Vergleichung stellen wir in der folgenden Tabelle die wichtigsten Zahlen unseres Beispiels zusammen, wobei wir noch die wirklich abgezählten Anzahlen unter der Ueberschrift »Erfahrung« hinzufügen.

Fehlergrenzen	Anzahl nach der Gauss'schen Formel	Nächst- liegende ganze Zahlen	I			II			Er- fahrung
			n_i	M_i	P_i proportional	n_i	M_i	P_i proportional	
0.0 - 0.4	65.08	65	65	7.14	196	66	7.20	193	66
0.4 - 0.8	60.35	60	61	6.97	206	61	6.97	206	58
0.8 - 1.2	51.91	52	52	6.55	233	52	6.55	233	55
1.2 - 1.6	41.41	41	42	6.00	277	41	5.99	279	28
1.6 - 2.0	30.65	31	31	5.26	362	31	5.26	362	27
2.0 - 2.4	21.03	21	21	4.42	511	21	4.42	511	23
2.4 - 2.8	13.38	13	13	3.59	774	13	3.59	774	10
2.8 - 3.2	7.90	8	8	2.77	1298	8	2.77	1298	15
3.2 - 3.6	4.31	4	4	2.09	2299	4	2.09	2299	8
3.6 - 4.0	2.20	2	2	1.49	4500	2	1.49	4500	4
4.0 - ∞	1.78	2	1	1.54	4210	1	1.54	4210	6
	300.00	299	300			300			300

Es kann von Interesse sein, zu wissen, wie die Wahrscheinlichkeit einer wirklich aus den Beobachtungen bestimmten Fehlervertheilung sich zu der Maximalwahrscheinlichkeit verhält. Man braucht zu diesem Zweck offenbar nur den Ausdruck (1) für die beiden genannten Vertheilungen zu bilden und den Quotienten beider Zahlen zu berechnen. In unserem Beispiele erhält man 0.000593, eine Zahl, aus deren Kleinheit wohl gefolgert werden darf, dass das Gauss'sche Fehlergesetz zur Darstellung des gegebenen Zahlenmaterials wenig geeignet ist.

Denselben Schluss könnte man übrigens aus der Grösse der Abweichungen der Erfahrungszahlen von den n_i im Verhältniss zu den mittleren Fehlern M_i ziehen.

Berlin 1891 März 31.

R. Lehmann-Filhés.

Verbesserte Elemente und Ephemeride des Wolf'schen Cometen für die zweite Erscheinung 1891...

Von A. Thraen.

Nachdem Herr Spitaler seine erste Beobachtung des Cometen Wolf (1884 III) nach seiner Wiederauffindung in Wien am 1. Mai 1891 mir gütigst brieflich mitgetheilt hatte und die Beobachtung der Lick-Sternwarte vom 3. Mai bekannt geworden war, habe ich im Anschluss an beide Beobachtungen meine Elemente desselben (A. N. Nr. 2790) in der Weise verbessert, dass ich zunächst für die erste Erscheinung 1884-85 die Coordinaten-Störungen durch Erde und Jupiter unter Hinzunahme der Störungen durch Saturn neu berechnete, die Störungs-Werthe von 1884-1891 (A. N. 3025) aber vorläufig unverändert (also ohne Rücksicht auf Saturn) beibehielt. Den acht früheren Normalörter fügte ich als neunten den aus der Vereinigung der beiden eben genannten Beobachtungen entstandenen Ort 1891 Mai 2.5 hinzu: $\alpha = 337^\circ 30' 27''.00$; $\delta = +12^\circ 50' 24''.92$. Für letzteren Ort ergab die Berechnung der Differentialquotienten:

$$\begin{array}{llll}
 \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial M} = 0.39872; & \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \mu} = 3.78748; & \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \varphi} = 0.22175_n; & \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial \pi'} = 9.89338; \\
 \frac{\partial \delta}{\partial M} = 9.29220; & \frac{\partial \delta}{\partial \mu} = 2.69075; & \frac{\partial \delta}{\partial \varphi} = 8.79875_n; & \frac{\partial \delta}{\partial \pi'} = 8.64710; \\
 & \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\sin i' \partial \Omega'} = 8.30515_n; & \frac{\cos \delta \partial \alpha}{\partial i'} = 8.65219_n & \\
 & \frac{\partial \delta}{\sin i' \partial \Omega'} = 9.82878_n; & \frac{\partial \delta}{\partial i'} = 9.74033 &
 \end{array}$$

Die aus den 18 Bedingungsgleichungen abgeleiteten Normalgleichungen lauteten bei der zweiten Auflösung:

$$\begin{array}{l}
 1) +3.22320 x - 0.19884 y - 1.17016 z - 0.03437 t + 3.10393 u - 2.16528 w = -2.79597 \\
 2) -0.19884 + 19.93328 - 1.24999 - 0.24966 - 0.29767 + 1.69617 = +0.47670 \\
 3) -1.17016 - 1.24999 + 3.89221 - 0.11664 - 1.13356 + 0.27058 = +0.85159 \\
 4) -0.03437 - 0.24966 - 0.11664 + 2.73419 - 0.06537 - 0.08621 = +0.18982 \\
 5) +3.10393 - 0.29767 - 1.13356 - 0.06537 + 3.01066 - 2.14960 = -2.71981 \\
 6) -2.16528 + 1.69617 + 0.27058 - 0.08621 - 2.14960 + 2.15390 = +2.01299
 \end{array}$$

$$[nn] = +3.13598$$